



Zastosowanie twierdzenia sinusów w dowodzeniu twierdzeń

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Zastosowanie twierdzenia sinusów w dowodzeniu twierdzeń

Źródło: Sraone, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

W matematyce szkolnej, zwłaszcza na poziomie podstawowym, sformułowania: „udowodnij” czy „wykaż, że”, są najbardziej niepożądanymi poleceniami na sprawdzianie czy egzaminie maturalnym. Jednak to w nich tkwi istota nie tylko samej matematyki, ale całego procesu edukacyjnego, którego zadaniem jest ukształtować młodego człowieka jako jednostkę, która dostrzega potrzebę oceny zjawisk przed podjęciem ważnych dla siebie działań, potrafi uzasadnić, czy coś jest lub nie jest prawdą i wreszcie dokonuje wyborów zgodnych z przyjętą hierarchią ważności. Ważna jest nie tyle wiedza, ale to jak potrafimy z niej korzystać – i właśnie proces dowodzenia w matematyce, z reguły odbiegający od schematów i algorytmów, daje przedsmak tego krytycznego i efektywnego korzystania z wiedzy. Ale tak, jak w codziennym życiu opieramy się na autorytetach czy systemach wartości, w których wzrastaliśmy, tak w matematyce korzystamy z narzędzi, o których wiemy, że są „prawdziwe”. Takimi narzędziami są twierdzenia, a wśród nich twierdzenie sinusów. Pokażemy zastosowanie tego ostatniego w sytuacjach typowych, ale także nieco odbiegających od praktyki szkolnej.

Twoje cele

- Zbadasz związki miarowe między odcinkami, które dwusieczne kątów wewnętrznych wyznaczają w trójkącie i udowodnisz twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie.

- Skonstruujesz, w oparciu o twierdzenie sinusów, model geometryczny zależności trygonometrycznych w trójkącie i wykorzystasz ten model w dowodzeniu twierdzeń.
- Zastosujesz poznane zależności w sytuacjach typowych i problemowych.

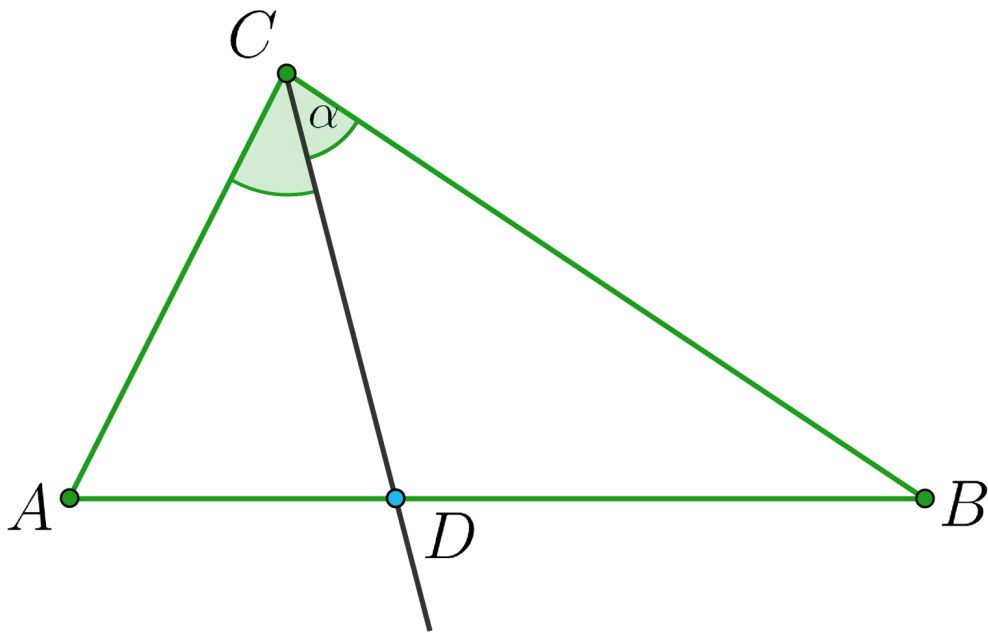
Przeczytaj

O pewnej prostej konsekwencji twierdzenia sinusów, która jest potężnym narzędziem w planimetrii

Kolejne zmiany opisu wymagań, jakie szkoła stawia przed absolwentem liceum czy technikum, a które podane są w podstawie programowej, wprowadzają do praktyki lub też eliminują z niej pewne zagadnienia. Dotyczy to m. in. elementów logiki, teorii zbiorów, konstrukcji geometrycznych, ale także pewnego szczególnego twierdzenia z planimetrii, dobrze znanego pod nazwą twierdzenia o dwusiecznej. Jego dowód można przeprowadzić na wiele elementarnych sposobów, ale tutaj pokażemy, że jest ono prostą konsekwencją twierdzenia [sinusów](#).

Twierdzenie: o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie

Punkt D jest punktem wspólnym boku AB trójkąta ABC i dwusiecznej kąta wewnętrznego ACB , jak na rysunku.



$$\text{Wtedy } \frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|BC|}.$$

Dowód

Zauważmy, że $|\sphericalangle BDC| = 180^\circ - |\sphericalangle ADC|$, ale $\sin(180^\circ - \sphericalangle ADC) = \sin(\sphericalangle ADC)$, zatem $\sin(\sphericalangle BDC) = \sin(\sphericalangle ADC)$. Korzystając z twierdzenia sinusów dla trójkąta ADC ,

mamy: $\frac{|AD|}{\sin \alpha} = \frac{|AC|}{\sin(\angle ADC)}$. Stąd $\sin(\angle ADC) = \frac{|AC| \cdot \sin \alpha}{|AD|}$.

Analogicznie, korzystając z twierdzenia sinusów dla trójkąta BDC mamy:

$\frac{|BD|}{\sin \alpha} = \frac{|BC|}{\sin(\angle BDC)}$. Stąd $\sin(\angle BDC) = \frac{|BC| \cdot \sin \alpha}{|BD|}$. Ale $\sin(\angle BDC) = \sin(\angle ADC)$, zatem $\frac{|BC| \cdot \sin \alpha}{|BD|} = \frac{|AC| \cdot \sin \alpha}{|AD|}$. Stąd $\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|BC|}$.

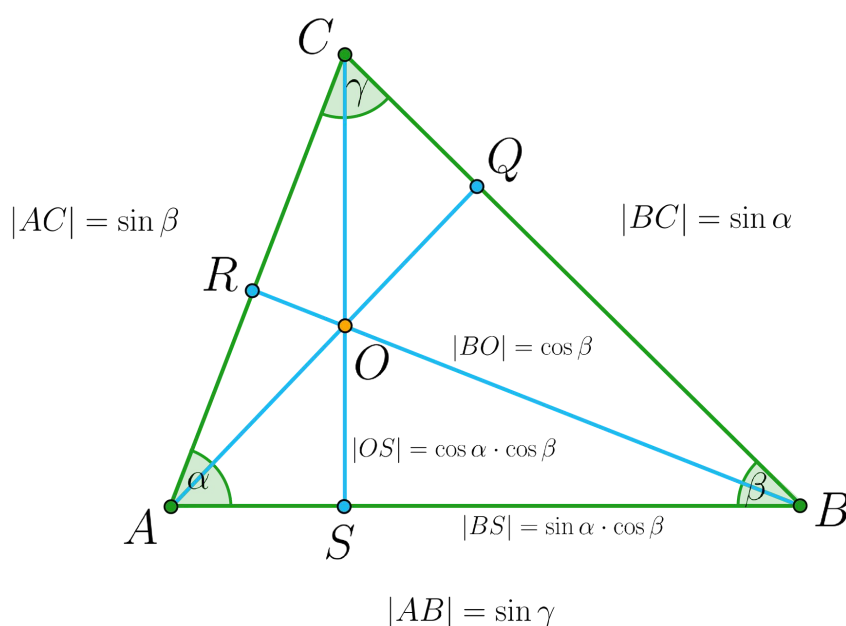
Co należało udowodnić.

Niekiedy, przywołując twierdzenie o dwusiecznej, mówimy krótko, że dwusieczna dzieli przeciwległy bok trójkąta na odcinki proporcjonalne do długości pozostałych boków, przyległych do tych odcinków.

O trygonometrii w trójkącie „niezupełnie prostokątnym”. Czy twierdzenie sinusów jest generatorem nowych twierdzeń, a może tylko automatem do ich dowodzenia?

Model przedstawiony na poniższym rysunku, jest świetną ilustracją pozwalającą zapisywać zależności między funkcjami trygonometrycznymi kątów dowolnego trójkąta, a także stanowi bazę do dowodzenia wzorów na sumy i różnice funkcji trygonometrycznych, o czym będzie mowa przy okazji trygonometrii. Oczywiście trójkąt może być dowolny („niezupełnie prostokątny”), ale zauważ, że wszystkie zależności są wyprowadzane w trójkątach prostokątnych wyznaczonych przez [spodki wysokości](#) i [ortocentrum trójkąta](#).

Rozważmy odcinki w trójkącie wpisanym w okrąg o średnicy 1. Długości wybranych spośród tych odcinków są podane na rysunku.



Pokażemy, że rzeczywiście długość odcinka BC jest w przyjętym modelu równa $\sin \alpha$. Rzeczywiście, z twierdzenia sinusów wynika, że $\frac{|BC|}{\sin \alpha} = 2R$. Ale średnica okręgu jest równa 1, stąd $\frac{|BC|}{\sin \alpha} = 1$. Po wymnożeniu ostatniej równości przez $\sin \alpha$ otrzymujemy, że $|BC| = \sin \alpha$.

Ostatni wynik oraz zastosowanie definicji funkcji cosinus oraz tangens w trójkącie BCS pozwala wyznaczyć długość odcinków BS oraz CS . Mamy $\cos \beta = \frac{|BS|}{|BC|}$, stąd $|BS| = |BC| \cdot \cos \beta = \sin \alpha \cdot \cos \beta$. Z kolei $\operatorname{tg} \beta = \frac{|CS|}{|BS|}$, stąd $|CS| = |BS| \cdot \operatorname{tg} \beta = \sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot \operatorname{tg} \beta = \sin \alpha \cdot \sin \beta$.

Wyznaczenie długości odcinka OS wymaga zauważenia równości odpowiednich kątów. Kąt ACS ma miarę $90^\circ - \alpha$, co oznacza, że kąt COR ma miarę α . Tak więc kąt BOS , jako kąt wierzchołkowy ma tę samą miarę. Możemy więc zapisać, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{|BS|}{|OS|}$. Ale $|BS| = \sin \alpha \cdot \cos \beta$, zatem $|OS| = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \cos \alpha \cdot \cos \beta$. Nietrudno zauważyć, że przyjmujemy bez zastrzeżeń fakt, że kąt α nie jest kątem prostym i jego tangens istnieje.

Wyznaczenie długości pozostałych odcinków, które widać na rysunku, jak również tych, które nie zostały zapisane, można, a nawet warto potraktować jako ciekawe ćwiczenie.

A teraz czas na zapisanie przykładowych zależności trygonometrycznych, dla których swoistym generatorem jest powyższy, przedstawiony na rysunku, model.

Zauważmy, że bezpośrednio z nierówności trójkąta, mówiącej o tym, że suma długości dwóch boków trójkąta jest większa od długości trzeciego boku wynika np., że:

- $\sin \alpha + \sin \beta > \sin \gamma$,
- $\cos \beta + \cos \alpha \cdot \cos \beta > \sin \alpha \cdot \sin \beta$.

Bez dodatkowej inwencji można zapisać kolejne tożsamości, korzystając tylko z oznaczeń na rysunku, a jeśli zechcielibyśmy zastosować twierdzenie Pitagorasa, to tych zależności mielibyśmy „odkryć” znacznie więcej.

Na koniec trzeba wspomnieć, że także w przypadku trójkąta rozwartokątnego wpisanego w okrąg o średnicy 1 długości boków wyrażają się przez sinusy odpowiednich kątów.

Słownik

sinus kąta w trójkącie prostokątnym

stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw tego kąta do długości przeciwprostokątnej w tym trójkącie

spodek wysokości poprowadzonej z wybranego wierzchołka trójkąta

spodkiem wysokości poprowadzonej z wybranego wierzchołka trójkąta nazywamy punkt, który jest jednym z końców tej wysokości, różnym od wierzchołka, z którego prowadzona jest wysokość

ortocentrum trójkąta

punkt przecięcia się wysokości trójkąta

Animacja

Polecenie 1

Przeanalizuj w animacji zapisy prowadzące do wyznaczenia długości odpowiednich odcinków, a następnie wyznacz długości pozostałych boków i wysokości danego trójkąta w zależności od miar kątów trójkąta.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D14U5xWuR>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej zastosowania twierdzenia sinusów w dowodzeniu twierdzeń.

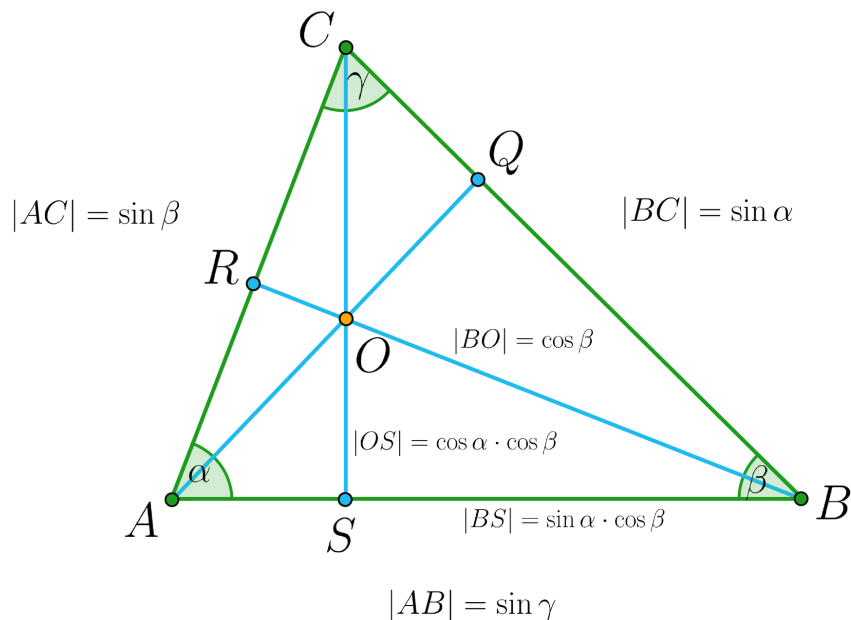
Polecenie 2

Korzystając z otrzymanych rezultatów i nierówności trójkąta, uzasadnij, że $\sin \alpha + \sin \beta > \sin \gamma$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Korzystając z modelu opisanego na powyższym rysunku i oznaczeń tam przyjętych, wyznacz długość odcinka AO , a następnie wykaż, że w dowolnym trójkącie o kątach α, β, γ zachodzi nierówność $\cos \alpha + \cos \beta > \sin \gamma$.

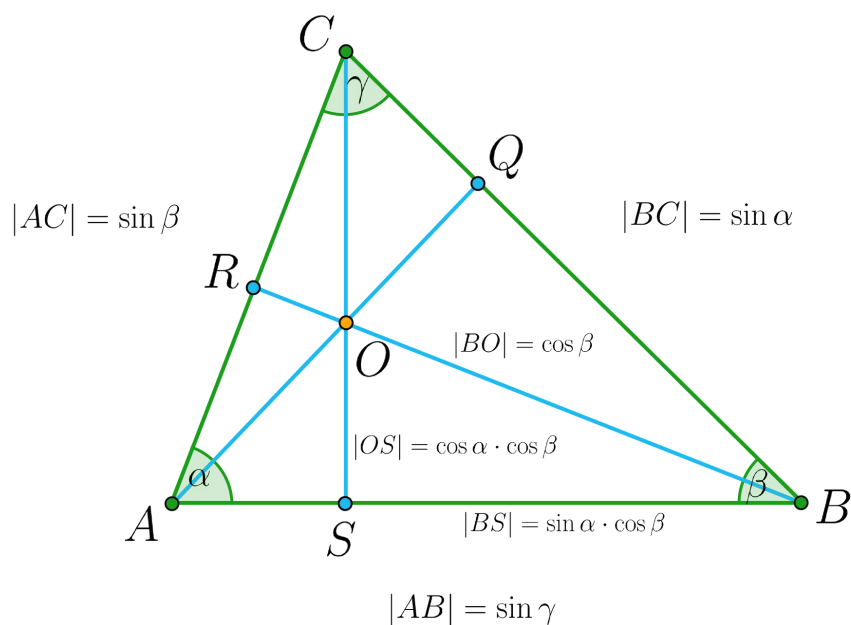
Uzupełnij puste pola, dobierając odpowiedni tekst (oznaczenia) spośród podanych niżej.

Ponieważ $|\sphericalangle AOB| = \alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$, więc = $\frac{|OS|}{|AO|}$.

Stąd $|AO| = \frac{|OS|}{\cos \beta} = \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \beta} = \cos \alpha$.

Ale z nierówności trójkąta (dla trójkąta AOB) mamy w szczególności,

że $|AO| +$ $>$, a stąd wynika teza.



Wiedząc, że dla dowolnego kąta δ prawdziwy jest wzór $\cos(180^\circ - \delta) = -\cos \delta$ oraz korzystając z modelu opisanego na rysunku i oznaczeń tam przyjętych, wyznacz długość odcinków OR oraz BR , a następnie wykaż, że w dowolnym trójkącie o kątach α, β, γ zachodzi równość $\cos(\alpha + \gamma) = \cos \alpha \cdot \cos \gamma - \sin \alpha \cdot \sin \gamma$.

Zapisz dowód modyfikując kolejność poniższych sformułowań.

Ponieważ $\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$, więc
 $\cos \beta = \cos(180^\circ - (\alpha + \gamma)) = -\cos(\alpha + \gamma)$

Ponadto $\sin \alpha = \frac{|BR|}{|AB|}$, czyli $|BR| = \sin \alpha \cdot \sin \gamma$.

Ponieważ $|\angle AOR| = \gamma$, więc $\cos \gamma = \frac{|OR|}{|AO|}$.

Stąd $|OR| = |AO| \cdot \cos \gamma = \cos \alpha \cdot \cos \gamma$.

Ale $|BO| + |OR| = |BR|$, czyli $\cos \beta + \cos \alpha \cdot \cos \gamma = \sin \alpha \cdot \sin \gamma$.

Zatem $\cos \beta = \sin \alpha \cdot \sin \gamma - \cos \alpha \cdot \cos \gamma$.

Ćwiczenie 3



Udowodnij, że jeśli w trójkącie rozwartokątnym kąty mają miary α , β , γ i γ jest kątem o największej mierze, to $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta < \sin^2 \gamma$. Wskazówka: zauważ, że boki dowolnego trójkąta wpisanego w okrąg o średnicy 1 mają długości równe sinusom kątów leżących naprzeciwko tych boków.

Ćwiczenie 4



Uzupełnij zdanie, by uzyskać zdanie prawdziwe. Istnieje trójkąt ostrokątny, w którym kąty mają miary α , β , γ , taki, że

☐ $\sin \alpha \cdot \sin \gamma < \sin \alpha \cdot \cos \beta$

☐ $\sin \alpha \cdot \sin \gamma = \cos \beta$

☐ $\cos \beta > \sin \alpha \cdot \sin \beta$

☐ $\sin \alpha \cdot \sin \gamma > \sin \alpha \cdot \cos \beta$

Ćwiczenie 5



Udowodnij, że w trójkącie ostrokątnym, w którym kąty mają miary α , β , γ , prawdziwa jest nierówność $\sin \alpha + \cos \alpha > 1$.

Ćwiczenie 6



Punkt O jest ortocentrum trójkąta ostrokątnego ABC . Udowodnij, że promień okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równy promieniowi okręgu opisanego na trójkącie ABO .

Ćwiczenie 7



W danym trójkącie, dwusieczna jednego z jego kątów podzieliła bok przeciwległy na odcinki o długościach 4 i 5. Uzasadnij, że żaden z boków tego trójkąta nie może mieć długości 3.

Ćwiczenie 8



W trójkącie, dwusieczna kąta γ podzieliła bok przeciwległy na odcinki o długościach x , $x + 5$. Krótszy z boków przyległych do kąta γ ma długość $x + 2$, a dłuższy z boków przyległych do tego kąta, ma długość $x + 8$. Najdłuższy z boków trójkąta ma długość

☐ 12

☐ 18

☐ 30

☐ 25

Dla nauczyciela

Imię i nazwisko autora: Jacek Człapiński

Przedmiot: Matematyka

Temat zajęć: Zastosowanie twierdzenia sinusów w dowodzeniu twierdzeń

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa

VII. Trygonometria

Uczeń

2) znajduje przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych, korzystając z tablic lub kalkulatora;

5) stosuje twierdzenia sinusów i cosinusów oraz wzór na pole trójkąta $P_{\Delta} = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \gamma$

6) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty)

VIII. Planimetria

2) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i twierdzenie cosinusów); stosuje twierdzenie: w trójkącie naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok;

7) stosuje twierdzenia: Talesa, odwrotne do twierdzenia Talesa, o dwusiecznej kąta oraz o kącie między styczną a cięciwą

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- bada zależności między bokami i kątami w trójkącie i formułuje hipotezy dotyczące tych zależności
- dowodzi twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie
- stosuje twierdzenie sinusów do wyznaczania zależności miarowych w trójkącie
- stosuje twierdzenie sinusów do badania istnienia trójkątów o danych własnościach
- buduje model geometryczny do badania zależności trygonometrycznych

Strategie i metody nauczania:

- konstruktywizm.
- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

Formy zajęć:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda grupa uczniów miała do dyspozycji komputer. Lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym.

Przebieg lekcji:

Faza wprowadzająca

1. Nauczyciel prosi uczniów o przypomnienie twierdzenia Snelliusa.
2. Nauczyciel prosi uczniów o przypomnienie pojęcia sinusa kąta w trójkącie prostokątnym oraz ortocentrum trójkąta.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna

1. Nauczyciel formułuje problem związany z dwusieczną kąta i prosi uczniów o sformułowanie hipotezy. Następnie formułują i dowodzą twierdzenie.
2. Uczniowie, pracując w grupach, wykorzystują animację i wykonują odpowiednie polecenia.

3. Nauczyciel w rozmowie z każdą grupą lub całą klasą sugeruje (w razie potrzeby) wykorzystanie twierdzenia sinusów. W zależności od tempa pracy poszczególnych grup, nauczyciel może udzielać wskazówek lub zakończyć ten etap lekcji, gdy nie wszystkie długości będą wyznaczone.

4. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, wykorzystując umiejętności z różnych działów matematyki.

Faza podsumowująca

Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji. Nauczyciel inicjuje dyskusję na temat modelowania matematycznego i zastosowania modelu opisanego w animacji.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć.

Materiały pomocnicze:

- [O twierdzeniu Snelliusa, czyli rozwiązywaniu trójkątów dowolnych](#)
- [Zastosowanie twierdzenia sinusów do obliczania miar kątów w wielokątach](#)

Wskazówki metodyczne:

Można zastosować do dowodzenia różnych zależności trygonometrycznych, w szczególności wzorów na funkcje trygonometryczne sumy argumentów.