Rozwiązywanie równań kwadratowych z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia

Rozwiązywanie równań kwadratowych z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia

Źródło: dostępny w internecie: pxfuel.com, domena publiczna.

Równania kwadratowe najczęściej rozwiązujemy stosując odpowiednie algorytmy.

W tym materiale skoncentrujemy się na wykorzystaniu wzorów skróconego mnożenia do rozwiązywania równań kwadratowych oraz obliczania współczynników równania kwadratowego o danym rozwiązaniu.

Twoje cele

- Rozwiążesz równanie kwadratowe z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia.
- Obliczysz współczynniki równania kwadratowego o danym rozwiązaniu, wykorzystując wzory skróconego mnożenia.

Przeczytaj

Przykład 1

Rozwiążemy równanie $3x^2 - 4 = 0$.

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów.

$3x^2 - 4 = 0$

$\left(\sqrt{3}x - 2\right)\left(\sqrt{3}x + 2\right) = 0$

$\sqrt{3}x - 2 = 0$ lub $\sqrt{3}x + 2 = 0$

$\sqrt{3}x = 2$ lub $\sqrt{3}x = -2$

$x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ lub $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

$x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ lub $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Przykład 2

Rozwiążemy równanie $9x^2 - (x-3)^2 = 0$.

Zastosujemy wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń.

$9x^2 - (x-3)^2 = 0$

$[3x - (x-3)] \cdot [3x + (x-3)] = 0$

$(3x - x + 3)(3x + x - 3) = 0$

$(2x+3)(4x-3) = 0$

$(2x+3) = 0$ lub $(4x-3) = 0$

$2x = -3$ lub $4x = 3$

$x = -1\frac{1}{2}$ lub $x = \frac{3}{4}$

Rozwiązanie równania: $\left\{-1\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right\}$.

Przykład 3

Rozwiążemy równanie $(3x-1)(3x+1) = (x-3)^2 - 18x - 28$.

Zastosujemy wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń i wzór na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń.

$(3x-1)(3x+1)=(x-3)^2-18x-28$

$9x^2-1=x^2-6x+9-18x-28$

$8x^2+24x+18=0 \,\big|\, :2$

$4x^2+12x+9=0$

$(2x+3)^2=0$

$2x+3=0$

$x=-1\frac{1}{2}$

Rozwiązaniem równania jest liczba $-1\frac{1}{2}$.

Przykład 4

Rozwiążemy równanie kwadratowe $4x^2-4x-15=0$ z zastosowaniem wzoru skróconego mnożenia.

$4x^2-4x-15=0$

Zapiszemy równanie w postaci równoważnej.

$4x^2-4x+1-16=0$

$(2x-1)^2=16$

$2x-1=-4$ lub $2x-1=4$

$2x=-3$ lub $2x=5$

$x=-1\frac{1}{2}$ lub $x=2\frac{1}{2}$

Przykład 5

Obliczymy, dla jakich wartości parametru b równanie kwadratowe zupełne $4x^2+bx+9=0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Równanie kwadratowe zupełne, które ma jedno rozwiązanie, można zapisać w postaci kwadratu sumy dwóch wyrażeń lub kwadratu różnicy dwóch wyrażeń.

Kwadrat pierwszego wyrażenia jest równy $4x^2=(2x)^2$, czyli pierwsze wyrażenie jest równe $2x$.

Analogicznie możemy zapisać, że $9 = 3^2$, czyli drugie wyrażenie to liczba 3.

Zatem $(2x+3)^3 = 4x^2 + 12x + 9$ lub $(2x-3)^3 = 4x^2 - 12x + 9$.

Wynika z tego, że $b = 12$ lub $b = -12$.

Przykład 6

Wyznaczymy takie wartości parametru z, dla których liczba $x_0 = \frac{1}{3}$ jest jedynym pierwiastkiem rzeczywistym równania $x^2 - \frac{2}{3}x = 4z^2 - 2\frac{1}{9}$.

Zapiszemy równanie w postaci równoważnej.

$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = 4z^2 - 2$

Lewą stronę równania zapiszemy za pomocą wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń.

$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = 4z^2 - 2$

Aby liczba $x_0 = \frac{1}{3}$ była jedynym pierwiastkiem rzeczywistym równania musi zachodzić warunek $4z^2 - 2 = 0$.

Podzielimy obie strony równania przez liczbę 2.

$2z^2 - 1 = 0$

$\left(\sqrt{2}z - 1\right)\left(\sqrt{2}z + 1\right) = 0$

$\sqrt{2}z = 1$ lub $\sqrt{2}z = -1$

$z = \frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $z = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Dla $z \in \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ liczba $x_0 = \frac{1}{3}$ jest jedynym pierwiastkiem rzeczywistym równania.

Słownik

kwadrat sumy dwóch wyrażeń

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

kwadrat różnicy dwóch wyrażeń

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z infografiką przedstawiającą sposób rozwiązywania równań kwadratowych z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia.

Polecenie 2

Rozwiąż równania, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.

a) $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0$

b) $x^2 - x + 1 = 0$

c) $x^2 + 6x + 8 = 0$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Rozwiązywanie równań kwadratowych z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje równanie kwadratowe z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia
- oblicza współczynniki trójmianu kwadratowego o danym rozwiązaniu, wykorzystując wzory skróconego mnożenia
- analizuje podane warunki i buduje na ich podstawie rozwiązanie

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- stoliki zadaniowe
- burza mózgów

- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e–materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają podstawowe postaci równań kwadratowych.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi uczniów o samodzielne rozwiązanie trzech przykładów z sekcji „Przeczytaj”.
2. Uczniowie podzieleni na grupy 4 – 6 osobowe omawiają rezultaty swojej pracy i porównują rozwiązania.
3. Następnie wspólnie omawiają kolejne przykłady.
4. Uczniowie oglądają infografikę i analizują ją wraz z nauczycielem.
5. Uczniowie w parach rozwiązują zadania metodą stolików zadaniowych. Na każdym stoliku zadaniowym „znajdują się” 2 zadania interaktywne. Warunkiem przejścia do następnego stolika jest poprawne rozwiązanie danych zadań. Para, która najszybciej rozwiąże wszystkie zadania otrzymuje stopień bardzo dobry.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące rozwiązywania równań kwadratowych z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie polecenia 2.

Materiały pomocnicze:

Równanie kwadratowe

Wskazówki metodyczne:

Infografika może być wykorzystana przez chętnych uczniów do samodzielnego przygotowania prezentacji pokazującej sposoby rozwiązywania równań kwadratowych z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia.