



Stosunek pól powierzchni brył podobnych

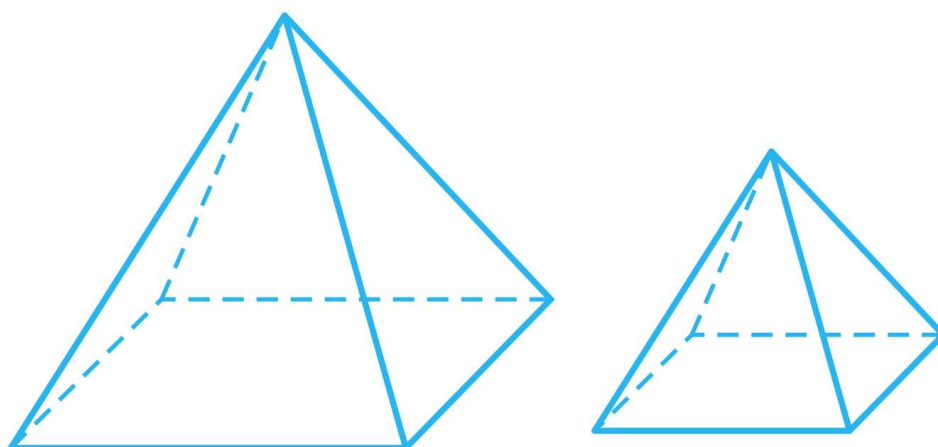
- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Stosunek pól powierzchni brył podobnych

Źródło: dostępny w internecie: pxfuel.com, domena publiczna.

Bryły podobne są kolejnym interesującym tematem, gdyż cały szereg takich brył możemy spotkać w rzeczywistości. W Paryżu zbudowano Piramidę Luwru, która jest podobna do Piramidy Cheopsa. Piramida w Rapie także ma przypominać egipskie piramidy. W tym materiale skupimy się na porównywaniu pól powierzchni brył podobnych.





Źródło: dostępny w internecie: www.pixabay.com, www.wikipedia.org, domena publiczna.

Twoje cele

- Poznasz zależność pomiędzy skalą podobieństwa brył a stosunkiem ich pól.
- Obliczysz skalę podobieństwa brył podobnych.
- Obliczysz pola brył podobnych.

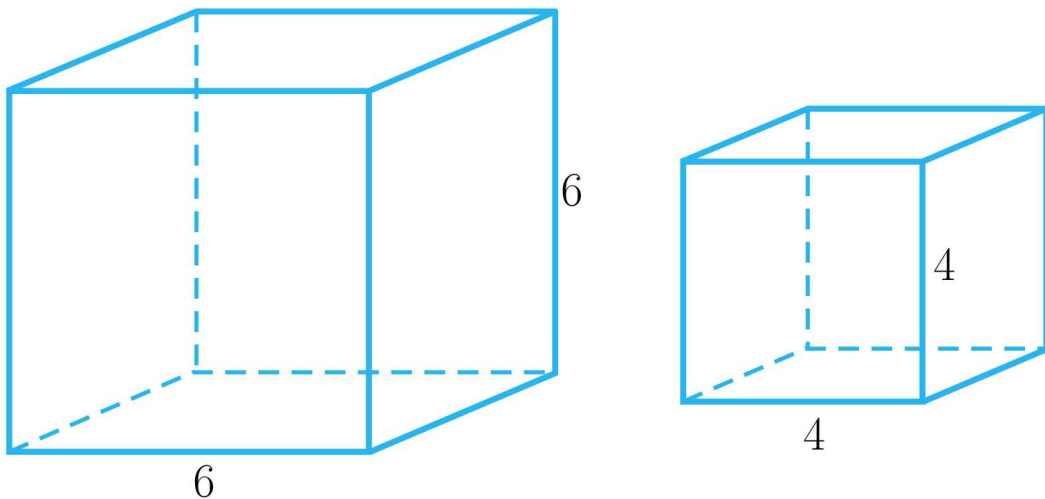
Przeczytaj

Dwie bryły są podobne, jeśli odległości między punktami jednej bryły są proporcjonalne do odległości między odpowiednimi punktami drugiej bryły.

Stosunek odległości między odpowiednimi punktami brył **podobnych** nazywamy skalą podobieństwa.

Przykład 1

Rozpatrzmy teraz dwa sześciany o krawędziach długości odpowiednio 4 cm i 6 cm.



Są to bryły podobne. Ich skala podobieństwa wynosi $k = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Policzmy ich pola powierzchni całkowitej.

$$P_{c_1} = 6 \cdot 6^2 = 216 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$P_{c_2} = 6 \cdot 4^2 = 96 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Stosunek pól mniejszej bryły do większej wynosi więc:

$$\frac{P_{c_2}}{P_{c_1}} = \frac{96}{216} = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = k^2.$$

Twierdzenie: o powierzchni brył podobnych

Jeśli skala podobieństwa brył podobnych jest równa k , to stosunek pól powierzchni tych brył jest równy k^2 .

Przykład 2

Dane są dwa sześciany. Pole powierzchni pierwszego z nich jest dziewięciokrotnie większe od pola powierzchni drugiego. Jaka jest skala podobieństwa większego z tych sześcianów do mniejszego?

Rozwiązanie

Z zadania wiemy, że stosunek pól powierzchni sześcianów wynosi 9, zatem jeśli skalę podobieństwa oznaczmy k , to możemy zapisać równanie:

$$k^2 = 9$$

$$k = 3.$$

Zatem sześciany są podobne w skali $k = 3$.

Przykład 3

Dane są dwie kule. Pole pierwszej z nich wynosi $s\pi \text{ cm}^2$. Druga kula ma promień dwa razy dłuższy niż pierwsza kula. Obliczymy pole drugiej kuli.

Rozwiązanie

Skoro promień drugiej kuli jest dwa razy większy od promienia pierwszej kuli, tzn. że skala podobieństwa tych brył wynosi $k = 2$. Zatem stosunek ich pól wynosi $k^2 = 4$.

Pole drugiej kuli (oznaczymy P) wynosi więc $\frac{P}{s\pi} = 4$,
czyli $P = 4s\pi \text{ cm}^2$.

Przykład 4

Dane są dwa podobne stożki. Pole powierzchni całkowitej większego z nich jest o 156% większe od pola powierzchni całkowitej mniejszego z nich. Obliczymy wysokość większego stożka, jeśli wysokość mniejszego wynosi 4 cm.

Rozwiązanie

Oznaczmy pole powierzchni mniejszego stożka jako P . Wówczas pole większego z nich wynosi

$$P' = P + 156\%P = 256\%P = 2,56P.$$

Zatem stosunek pól wynosi $k^2 = 2,56$, czyli $k = 1,6$.

Obliczmy więc wysokość większego stożka:

$$h = 1,6 \cdot 4 = 6,4 \text{ cm}.$$

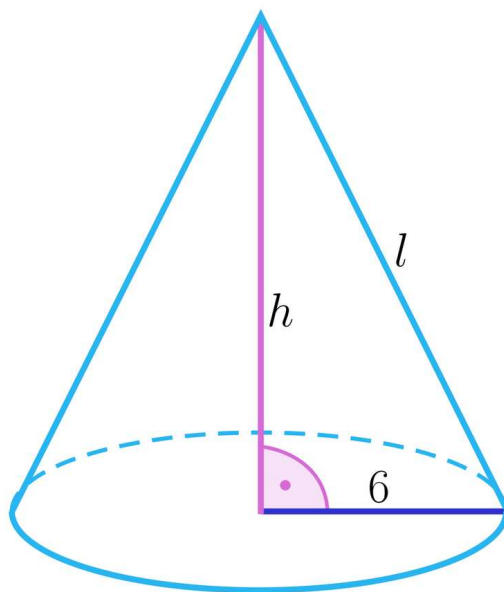
Przykład 5

Uzasadnimy, że stożek o promieniu długości 6 cm i polu powierzchni $96\pi \text{ cm}^2$ jest podobny do stożka o wysokości długości 4 cm i objętości $12\pi \text{ cm}^3$. Podamy skalę podobieństwa większego stożka do mniejszego.

Rozwiązanie

Obliczmy niezbędne długości w obydwu stożkach.

Stożek nr 1.



$$r = 6 \text{ cm}$$

$$P_c = 96\pi \text{ cm}^2$$

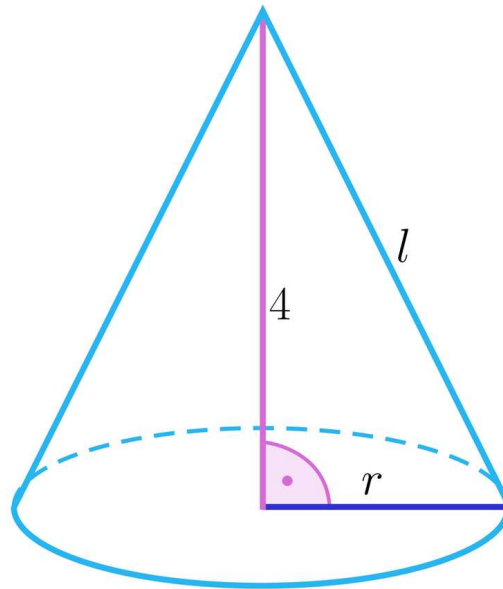
$$96\pi = 36\pi + 6\pi \cdot l$$

$$l = 10$$

$$h^2 + 6^2 = 10^2$$

$$h = 8$$

Stożek nr 2.



$$h = 4 \text{ cm}$$

$$V = 12\pi \text{ cm}^3$$

$$12\pi = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot 4$$

$$r^2 = 9$$

$$r = 3$$

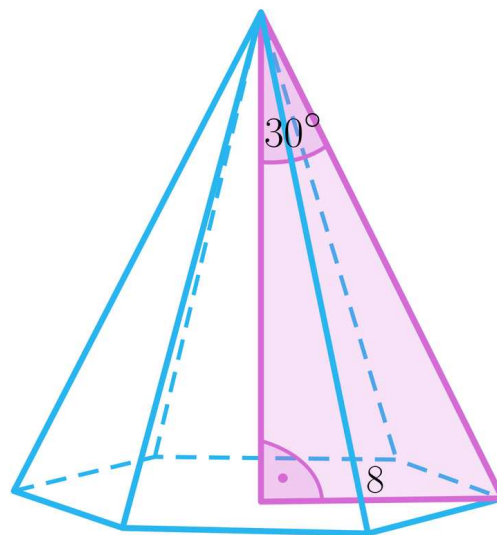
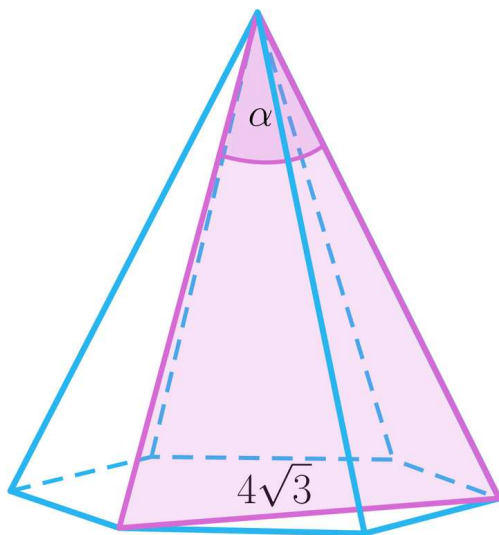
$$4^2 + 3^2 = l^2$$

$$l = 5$$

Analizując długości poszczególnych **odcinków** w stożkach zauważamy, że są one proporcjonalne. Wszystkie odcinki w drugim stożku są 2 razy krótsze. Zatem skala podobieństwa $k = 2$.

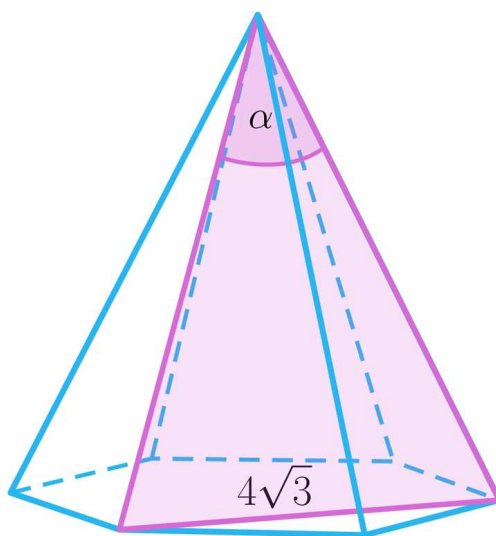
Przykład 6

Na rysunkach przedstawiono dwa ostrosłupy prawidłowe sześciokątne. Wiadomo, że $\sin \alpha = \frac{\sqrt{39}}{8}$, $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$. Pokażemy, że są to bryły podobne oraz obliczymy skalę podobieństwa oraz stosunek pól podstaw obu brył.



Rozwiązanie

Aby porównać odpowiednie odcinki w ostrosłupach, musimy je obliczyć. Zajmijmy się każdym ostrosłupem z osobna.



Wiemy, że $\sin \alpha = \frac{\sqrt{39}}{8}$, więc z jedynki trygonometrycznej otrzymujemy równanie:

$$\frac{39}{64} + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{25}{64}$$

$$\cos \alpha = \frac{5}{8}, \alpha \in (0^\circ, 90^\circ).$$

Krótsza przekątna podstawy ma długość $4\sqrt{3}$, zatem sześciokąt foremny ma bok długości:

$$a\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

$$a = 4.$$

Oznaczmy krawędzie boczne jako k . Wówczas z twierdzenia cosinusów otrzymujemy:

$$(4\sqrt{3})^2 = k^2 + k^2 - 2k^2 \cos \alpha$$

$$48 = 2k^2 - 2k^2 \cdot \frac{5}{8}$$

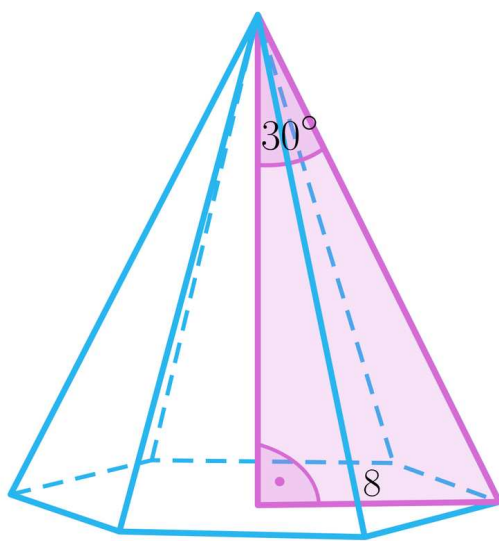
$$48 = 2k^2 - \frac{5}{4}k^2$$

$$48 = \frac{3}{4}k^2$$

$$64 = k^2$$

$$8 = k.$$

Zajmijmy się teraz drugim ostrosłupem:



Wysokość ostrosłupa H ma długość

$$\frac{8}{H} = \operatorname{tg} 30^\circ$$

$$H = 8\sqrt{3}.$$

Oznaczmy krawędzie boczne jako k' . Wówczas

$$\frac{8}{k'} = \sin 30^\circ$$

$$k' = 16.$$

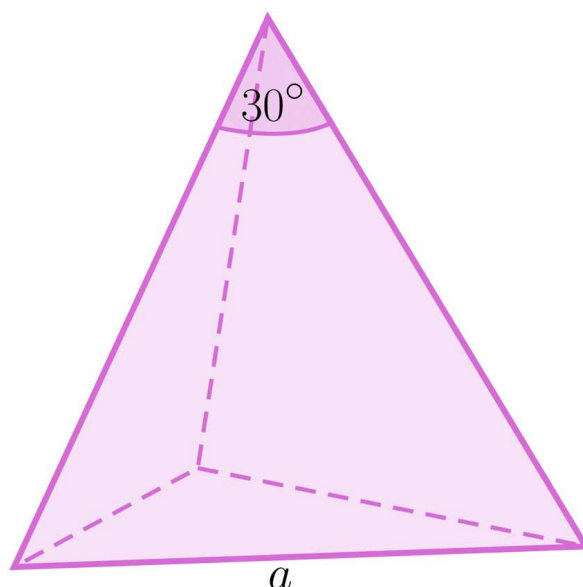
Porównajmy teraz odpowiednie odcinki w naszych ostrosłupach:

- długości krawędzi podstawy: $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$
- długości krawędzi bocznych: $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

Wniosek: ostrosłupy są podobne w skali $k = \frac{1}{2}$, co oznacza, że ich pola powierzchni są w stosunku $k^2 = \frac{1}{4}$.

Przykład 7

Na rysunku przedstawiono ostrosłup prawidłowy trójkątny o krawędzi podstawy a i kącie przy wierzchołku ostrosłupa o mierze 30° . Obliczmy pole powierzchni ostrosłupa czterokrotnie mniejszego.



Rozwiązanie

Obliczmy pole powierzchni wyjściowego ostrosłupa. Oznaczmy krawędzie boczne jako k . Wówczas z twierdzenia cosinusów otrzymujemy:

$$a^2 = k^2 + k^2 - 2k^2 \cos 30^\circ$$

$$a^2 = 2k^2 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$a^2 = 2k^2 \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$a^2 = (2 - \sqrt{3})k^2$$

$$k^2 = \frac{a^2}{2-\sqrt{3}}$$

$$k = \sqrt{\frac{a^2}{2-\sqrt{3}}}$$

$$k = \frac{a}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

Pole ściany bocznej możemy policzyć ze wzoru $P = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$.

Zatem:

$$P_{sb} = \frac{1}{2}k^2 \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{4(2-\sqrt{3})} = \frac{a^2(2+\sqrt{3})}{4(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{a^2(2+\sqrt{3})}{4}.$$

Mamy trzy ściany boczne, więc pole powierzchni bocznej wynosi:

$$P_b = 3 \cdot \frac{a^2(2+\sqrt{3})}{4} = \frac{3a^2(2+\sqrt{3})}{4}.$$

Policzmy pole podstawy. Jest to trójkąt równoboczny o podstawie długości a .

$$P_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa:

$$P_c = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3a^2(2+\sqrt{3})}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}+6a^2+3a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4a^2\sqrt{3}+6a^2}{4} = \frac{a^2(2\sqrt{3}+3)}{2}.$$

Drugi ostrosłup jest czterokrotnie mniejszy, czyli skala podobieństwa brył wynosi $k = \frac{1}{4}$. Zatem stosunek ich pól wynosi $k^2 = \frac{1}{16}$, co oznacza, że pole powierzchni drugiego ostrosłupa jest 16 razy mniejsze od pola powierzchni ostrosłupa wyjściowego. Pole powierzchni ostrosłupa podobnego do naszego ostrosłupa wyjściowego wynosi więc:

$$P_c = \frac{1}{16} \cdot \frac{a^2(2\sqrt{3}+3)}{2} = \frac{a^2(2\sqrt{3}+3)}{32}.$$

Słownik

odcinki proporcjonalne

jeżeli dane są cztery odcinki a , b , c , d takie, że stosunek pierwszych dwóch ($a : b$) jest równy stosunkowi dwóch ostatnich ($c : d$), to takie odcinki nazywamy proporcjonalnymi i wyrażamy to, pisząc proporcję

$$a : b = c : d$$

w uproszczeniu możemy powiedzieć, że ich iloraz jest stały

figury podobne

| mają ten sam kształt, ale mogą mieć inną wielkość

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Oglądając galerię zdjęć interaktywnych, spróbuj najpierw samodzielnie rozwiązać zamieszczone tam zadanie, a w dalszej kolejności porównać rozwiązania.

Polecenie 2

Objętość jednej z kul wynosi $8\sqrt{6}\pi s^3$. Pole drugiej $28\pi s^2$. Oblicz skalę podobieństwa brył i pole pierwszej z nich.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Powierzchnia kulistego balonu po dopompowaniu zwiększyła się o 69%. O ile procent wzrósł promień kuli? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ O 130%.

☐ O 69%.

☐ O 30%.

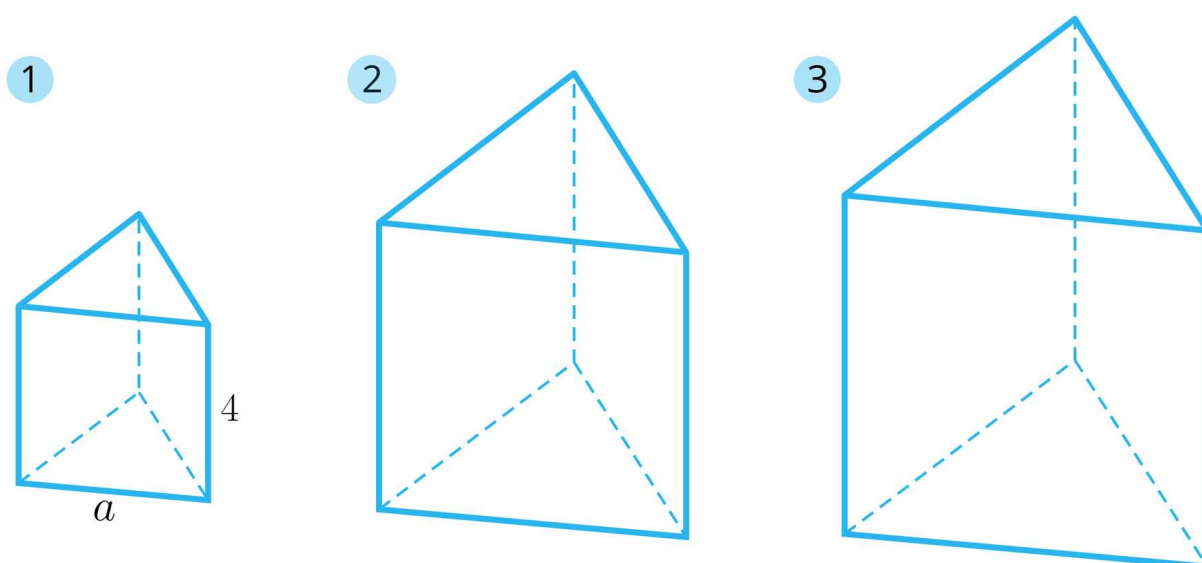
Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Graniastopy 1, 2 i 3 są podobne w skali 1 : 2 : 4.



Uzupełnij zdania przeciągając prawidłowe odpowiedzi w puste pola.

- Pole podstawy graniastopy nr 1 wynosi , natomiast graniastopy nr 3 - .
- Wysokość graniastopy nr 2 ma długość . Pole całkowite graniastopy nr 2 jest większe od pola graniastopy .

nr 1

$4a$

$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

2 razy

4 razy

nr 3

$4a^2\sqrt{3}$

a^2

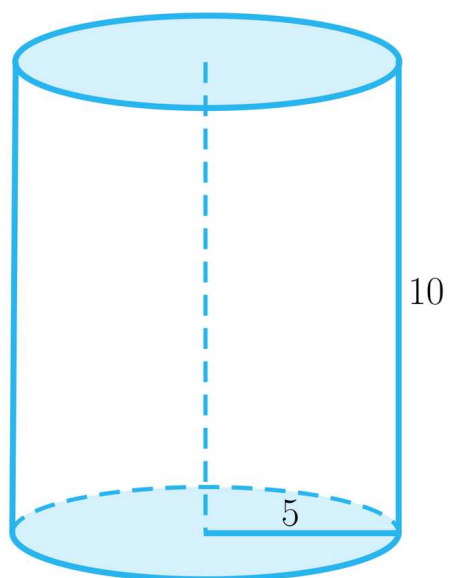
8

$16a^2\sqrt{3}$

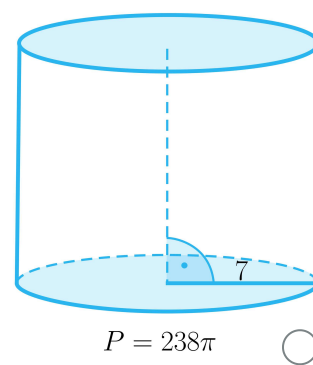
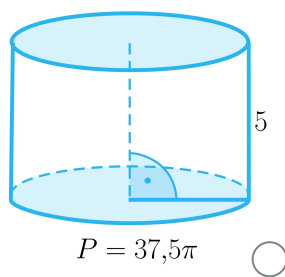
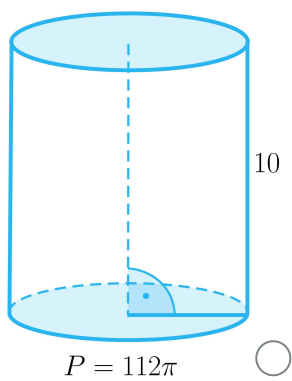
Ćwiczenie 4



Dany jest walec pokazany na rysunku poniżej.



Zaznacz walec podobny do danego.



Ćwiczenie 5



Dany jest ostrosłup prawidłowy sześciokątny o wysokości H i krawędzi bocznej nachylonej do płaszczyzny podstawy pod kątem 45° . Ile wynosi pole powierzchni całkowitej ostrosłupa podobnego w skali $k = 3$? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $9H^2(\sqrt{3} + \sqrt{7})$

☐ $\frac{27}{2}H^2(\sqrt{3} + \sqrt{7})$

☐ $3H^2\sqrt{3}$

Ćwiczenie 6



Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o polu S .

Oceń, czy poniższe zdania są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.



Promień stożka, podobnego do wyjściowego stożka w skali $k = \frac{2}{9}$ ma miarę $\frac{1}{9}\sqrt{\frac{4S\sqrt{3}}{3}}$.



Długość boku trójkąta równobocznego, który jest przekrojem stożka wynosi $\frac{4S\sqrt{3}}{3}$.



Jeśli pole przekroju osiowego stożka podobnego do wyjściowego wynosi $\frac{4}{81}S^2$, to stożki te są podobne w skali $k = \frac{2}{9}$.

Ćwiczenie 7



Dane są dwie kule. Promień pierwszej kuli to $R = \frac{\sqrt{S}}{2}$. Pole powierzchni drugiej kuli to $P = \frac{2S}{3}\pi$. Oblicz skalę podobieństwa mniejszej bryły do większej oraz stosunek ich pól.

Ćwiczenie 8



Sprawdź, czy graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy a , w którym cosinus kąta nachylenia przekątnej graniastosłupa do przekątnej jego ściany bocznej wynosi $\frac{\sqrt{6}}{3}$ jest podobny do sześcianu o przekątnej długości $a\sqrt{3}$. Jeśli tak, podaj skalę ich podobieństwa.

Dla nauczyciela

Autor: Grażyna Kielczykowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Stosunek pól powierzchni brył podobnych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria. Zakres podstawowy:

9) wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych;

X. Stereometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykorzystuje stosunek pól figur podobnych do obliczenia skali podobieństwa brył,
- oblicza pola figur podobnych,
- oblicza długości odcinków w bryłach, wykorzystując ich podobieństwo.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm,
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- pogadanka,
- analiza pomysłów,
- burza mózgów.

Formy pracy:

- praca indywidualna,
- praca w grupach,
- praca całego zespołu.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu,
- projektor multimedialny,
- e-podręcznik,
- arkusze papieru, pisaki.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

- Wprowadzenie do lekcji. Omówienie celów lekcji. Ustalenie kryteriów sukcesu.
- Przypomnienie definicji brył podobnych. Odpowiedź na pytanie, jak zachowują się pola figur podobnych w skali k . Zauważenie, że ta zależność jest taka sama w bryłach.

Faza realizacyjna:

- Rozwiązanie zadań, które znajdują się w przykładach w e-materiale.
- Pokazanie na konkretnych przykładach, jak zachowują się pola brył podobnych (ich stosunek jest równy kwadratowi skali podobieństwa).
- Uczniowie w parach przeglądają materiał z medium bazowego, rozwiązują i porównują z wynikami. Wspólnie z całą klasą omawiamy błędy.
- Rozwiązanie testu sprawdź się, w którym zadania są zamknięte. Wspólna analiza odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

- Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia z uwzględnieniem kryteriów sukcesu postawionych na początku zajęć.

Praca domowa:

- Rozwiązanie zadań otwartych z testu „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Pola figur podobnych](#)

Wskazówki metodyczne:

Uczeń może wykorzystać galerię zdjęć interaktywnych do przypomnienia sobie informacji o polach figur podobnych. Dzięki temu łatwiej będzie mu zrozumieć dany temat.