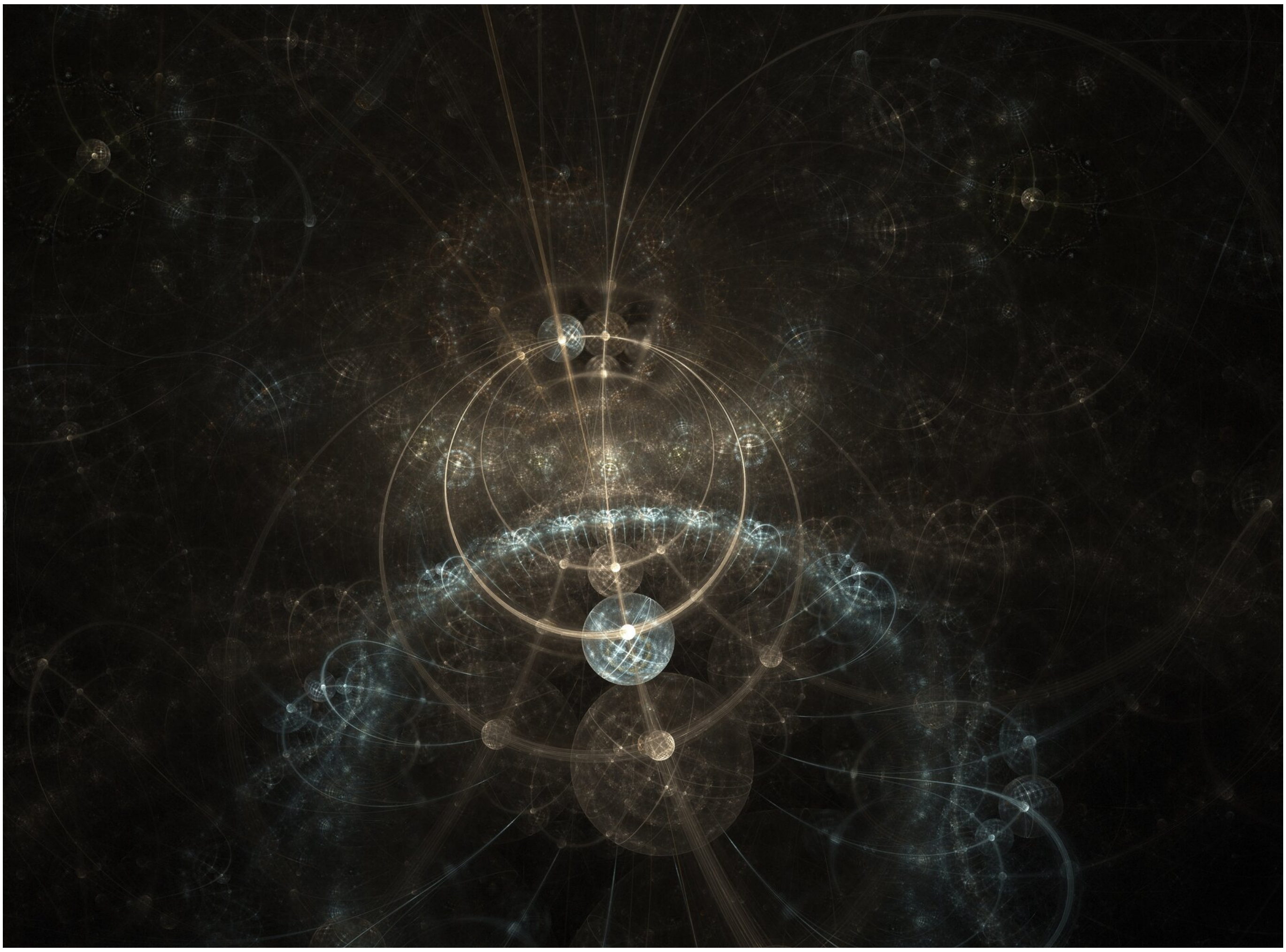

Działania na pierwiastkach

Źródło: Garik Barseghyan, dostępny w internecie: https://pixabay.com/, domena publiczna.

W tej lekcji omówimy bardziej szczegółowo własności działań na pierwiastkach. Przypomnimy już poznane oraz podamy takie, o których dotychczas nie wspominaliśmy. Zagadnienia te ilustrujemy przykładami, w których będziemy korzystać z własności działań na pierwiastkach w zbiorze liczb rzeczywistych.

Twoje cele

- Zastosujesz własności działań na pierwiastkach.
- Zastosujesz prawa działań na pierwiastkach w zbiorze liczb rzeczywistych.

Przeczytaj

Przypomnijmy, że pierwiastkiem stopnia n z liczby nieujemnej a jest taka liczba nieujemna b, która podniesiona do potęgi n jest równa liczbie a, czyli

$\sqrt[n]{a} = b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b^n$, dla $a \geq 0$, $b \geq 0$ i $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Ponadto jeśli stopień pierwiastka jest liczbą nieparzystą, to możemy zdefiniować również pierwiastek z liczby ujemnej.

Własność: Własności pierwiastkowania

Przy okazji wcześniejszych tematów omówiliśmy dwie własności pierwiastkowania:

- rozdzielność pierwiastkowania względem mnożenia, która orzeka, że: $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, dla $a \geq 0$, $b \geq 0$ i $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$,
- rozdzielność pierwiastkowania względem dzielenia, która orzeka, że: $\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$, dla $a \geq 0$, $b > 0$ i $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Analogiczne własności mają pierwiastki nieparzystego stopnia z liczb ujemnych.

W poniższej tabelce zestawimy pozostałe własności pierwiastkowania wraz z koniecznymi założeniami:

$\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$	$a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$	$a \geq 0,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
$\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$	$a \geq 0,\ p \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

Rozważmy teraz następujący przykład.

Przykład 1

$\sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[3]{27} = 3$

$\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt{9} = 3$

$\sqrt[6]{729} = 3$

$\sqrt[5]{\sqrt{1024}} = \sqrt[5]{32} = 2$

$\sqrt{\sqrt[5]{1024}} = \sqrt{4} = 2$

$\sqrt[10]{1024} = 2$

Na podstawie powyższego przykładu można postawić hipotezę, że:

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$, dla $a \geq 0$ oraz $n,\ m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, której dowód tutaj pomijamy.

W trakcie rozwiązywania zadań będą nam przydatne również prawa działań w zbiorze liczb rzeczywistych:

- przemienność dodawania i mnożenia:
  $a + b = b + a$ oraz $a \cdot b = b \cdot a$, dla dowolnych $a,\ b \in \mathbb{R}$;
- rozdzielność mnożenia względem dodawania i odejmowania:
  $a(x + y) = a \cdot x + a \cdot y$ oraz $a(x - y) = a \cdot x - a \cdot y$, dla dowolnych $a,\ x,\ y \in \mathbb{R}$;
- prawostronna rozdzielność dzielenia względem dodawania i odejmowania:
  $(x + y) : a = x : a + y : a$ oraz $(x - y) : a = x : a - y : a$, dla dowolnych $x,\ y \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Przykład 2

Przekształcimy do postaci sumy następujące wyrażenia:

a) $\left(\sqrt{2} - 1\right)\left(\sqrt{3} + 1\right) =$

Z rozdzielności mnożenia względem odejmowania.

$= \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{3} + 1\right) - 1 \cdot \left(\sqrt{3} + 1\right) =$

Z rozdzielności mnożenia względem dodawania.

$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 1 =$

Z rozdzielności pierwiastkowania względem mnożenia.

$= \sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 1$

b) $\left(\sqrt{2} + 3\right)\left(\sqrt{2} - 4\right) =$

Z rozdzielności mnożenia względem dodawania.

$= \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{2} - 4\right) + 3 \cdot \left(\sqrt{2} - 4\right) =$

Z rozdzielności mnożenia względem odejmowania.

$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 3 \cdot 4 =$

Z rozdzielności pierwiastkowania względem mnożenia.

$= 2 - 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 12 =$

Redukcja wyrazów podobnych.

$= -\sqrt{2} - 10$

c) $\left(\sqrt[3]{25} + 5\right) : \sqrt[3]{5} =$

$= \sqrt[3]{25} : \sqrt[3]{5} + 5 : \sqrt[3]{5} =$

Z rozdzielności dzielenia względem dodawania.

$= \sqrt[3]{25:5} + \frac{5}{\sqrt[3]{5}} =$

Z rozdzielności pierwiastkowania względem dzielenia.

$= \sqrt[3]{5} + \frac{5}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{25}} =$

Usunięcie niewymierności z mianownika.

$= \sqrt[3]{5} + \frac{5\sqrt[3]{25}}{5} =$

$= \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25}$

Przykład 3

Przedstawimy podane liczby w postaci iloczynów

a) $\sqrt[5]{8} - \sqrt[5]{4} =$

$= \sqrt[5]{4 \cdot 2} - \sqrt[5]{4} =$

Z rozdzielności pierwiastkowania względem mnożenia.

$= \sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{2} - \sqrt[5]{4} =$

Z rozdzielności mnożenia względem odejmowania.

$= \sqrt[5]{4} \cdot \left(\sqrt[5]{2} - 1\right)$

b) $\sqrt[4]{10} - 3\sqrt[4]{2} - 4\sqrt[4]{5} + 12 =$

Z rozdzielności pierwiastkowania względem mnożenia.

$= \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{5} - 3\sqrt[4]{2} - 4\sqrt[4]{5} + 12 =$

Z rozdzielności mnożenia względem odejmowania.

$= \sqrt[4]{2} \cdot \left(\sqrt[4]{5} - 3\right) - 4 \cdot \left(\sqrt[4]{5} - 3\right) =$

Z rozdzielności mnożenia względem odejmowania.

$$= \left(\sqrt[4]{5} - 3\right)\left(\sqrt[4]{2} - 4\right)$$

Przykład 4

Uprościmy wyrażenie $\frac{\sqrt[7]{108}+\sqrt[7]{54}+2\sqrt[7]{27}}{\sqrt[7]{36}+\sqrt[7]{18}+2\sqrt[7]{9}}$:

$$\frac{\sqrt[7]{108}+\sqrt[7]{54}+2\sqrt[7]{27}}{\sqrt[7]{36}+\sqrt[7]{18}+2\sqrt[7]{9}} = \frac{\sqrt[7]{27\cdot 4}+\sqrt[7]{27\cdot 2}+2\sqrt[7]{27}}{\sqrt[7]{9\cdot 4}+\sqrt[7]{9\cdot 2}+2\sqrt[7]{9}} =$$

$$= \frac{\sqrt[7]{27}\cdot\sqrt[7]{4}+\sqrt[7]{27}\cdot\sqrt[7]{2}+2\sqrt[7]{27}}{\sqrt[7]{9}\cdot\sqrt[7]{4}+\sqrt[7]{9}\cdot\sqrt[7]{2}+2\sqrt[7]{9}} = \frac{\sqrt[7]{27}\cdot\left(\sqrt[7]{4}+\sqrt[7]{2}+2\right)}{\sqrt[7]{9}\cdot\left(\sqrt[7]{4}+\sqrt[7]{2}+2\right)} = \frac{\sqrt[7]{27}}{\sqrt[7]{9}} = \sqrt[7]{3}$$

Przykład 5

Suma dwóch liczb jest równa $\sqrt{10}$, zaś ich różnica jest równa $\sqrt{5}$. Wyznaczymy ich iloczyn.

Niech szukanymi liczbami będą a i b. Wówczas warunki zadania można zapisać następująco:

$$a + b = \sqrt{10} \ (1)$$

$$a - b = \sqrt{5} \ (2)$$

Zauważmy, że gdy dodamy lewą stronę pierwszego równania do lewej strony drugiego równania, zaś prawą stronę pierwszego równania do prawej strony drugiego równania, to otrzymamy równanie:

$$a + b + a - b = \sqrt{10} + \sqrt{5}$$

$$2a = \sqrt{10} + \sqrt{5}$$

$$a = \frac{\sqrt{10}+\sqrt{5}}{2}$$

Odejmijmy teraz lewą stronę drugiego równania od lewej strony pierwszego równania, zaś prawą stronę drugiego równania od prawej strony pierwszego równania:

$$a + b - a + b = \sqrt{10} - \sqrt{5}$$

$$2b = \sqrt{10} - \sqrt{5}$$

$$b = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}}{2}$$

Teraz możemy obliczyć iloczyn liczb a i b:

$$a \cdot b = \frac{\sqrt{10}+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}}{2} = \frac{\left(\sqrt{10}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{5}\right)}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{10}\cdot\left(\sqrt{10}-\sqrt{5}\right)+\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{10}-\sqrt{5}\right)}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}-\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}-\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}{4} = \frac{10-\sqrt{50}+\sqrt{50}-5}{4} = \frac{5}{4}$$

Ważne!

W przekształceniach wyrażeń postaci $(a+b)(a-b)$ możesz korzystać z jednego ze wzorów skróconego mnożenia: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, które szczegółowo omówimy w innych lekcjach.

Przykład 6

Skorzystamy z powyższego wzoru w następujących przykładach:

$$\left(\sqrt{7}-2\right)\left(\sqrt{7}+2\right) = \left(\sqrt{7}\right)^2 - 2^2 = 7 - 4 = 3$$

$$\left(\sqrt{11}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{11}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 11 - 3 = 8$$

$$\left(2\sqrt{3}+5\right)\left(2\sqrt{3}-5\right) = \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 5^2 = 12 - 25 = -13$$

Przykład 7

Usuniemy niewymierności z mianowników następujących ułamków:

$$\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{2\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)} = \frac{2\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1^2} =$$

$$= \frac{2\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}{3-1} = \frac{2\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}{2} = \sqrt{3}-1$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{5-2} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$$

Przykład 8

Przedstawimy w postaci sumy następujące wyrażenia:

$$\left(\sqrt{7}+2\right)^2 = \left(\sqrt{7}+2\right)\left(\sqrt{7}+2\right) = \sqrt{7}\cdot\left(\sqrt{7}+2\right) + 2\cdot\left(\sqrt{7}+2\right) =$$

$$= \sqrt{7}\cdot\sqrt{7} + \sqrt{7}\cdot 2 + 2\cdot\sqrt{7} + 4 = 7 + 2\sqrt{7} + 2\sqrt{7} + 4 = 11 + 4\sqrt{7}$$

$$\left(2\sqrt{3}-5\right)^2=\left(2\sqrt{3}-5\right)\left(2\sqrt{3}-5\right)=2\sqrt{3}\cdot\left(2\sqrt{3}-5\right)-5\cdot\left(2\sqrt{3}-5\right)=$$

$$=2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\cdot 5-5\cdot 2\sqrt{3}-5\cdot(-5)=12-10\sqrt{3}-10\sqrt{3}+25=$$

$$=37-20\sqrt{3}$$

Ważne!

W przekształceniach wyrażeń postaci $(a+b)^2$ i $(a-b)^2$ możesz korzystać z tzw. wzorów skróconego mnożenia:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

Przykład 9

Zastosujemy powyższe wzory do następujących wyrażeń:

$$\left(3\sqrt{2}-1\right)^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2-2\cdot 3\sqrt{2}\cdot 1+1^2=18-6\sqrt{2}+1=19-6\sqrt{2}$$

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2=2+2\sqrt{6}+3=5+2\sqrt{6}$$

Słownik

rozdzielność mnożenia względem dodawania

$a(x+y)=a\cdot x+a\cdot y$, dla dowolnych $a,\ x,\ y\in\mathbb{R}$

rozdzielność mnożenia względem odejmowania

$a(x-y)=a\cdot x-a\cdot y$, dla dowolnych $a,\ x,\ y\in\mathbb{R}$

Animacja

Polecenie 1

Przeanalizuj informacje zawarte w poniższej animacji.

Wystąpił błąd

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej działań na pierwiastkach.

Polecenie 2

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Uprość i zapisz bez kreski ułamkowej.

a) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$,

b) $\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}$.

Ćwiczenie 9

Oblicz.

a) $\left[\left(\sqrt{3}+\sqrt{10}\right)^2-\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)^2\right]^2$,

b) $\left(\sqrt[4]{2}-1\right)\left(\sqrt[4]{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Działania na pierwiastkach

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń:
3) stosuje własności pierwiastków dowolnego stopnia, w tym pierwiastków stopnia nieparzystego z liczb ujemnych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zastosuje własności działań na pierwiastkach;
- zastosuje prawa działań w zbiorze liczb rzeczywistych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Animacja” i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi wybraną osobę o odczytanie tematu lekcji tj. „Działania na pierwiastkach”, a następnie określa cele i kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi, aby wybrany uczeń przeczytał polecenie numer 1 z sekcji „Animacja”. Uczniowie zapoznają się z materiałem i zapisują ewentualne problemy z jego zrozumieniem. Następnie dzielą się na grupy i ponownie analizują jego treść wspólnie wyjaśniając zaistniałe wątpliwości.
2. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają odpowiedzi, a reszta klasy wspólnie ustosunkowuje się do nich. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. W kolejnym kroku uczniowie realizują w parach ćwiczenia 3-5, po ich wykonaniu porównują otrzymane wyniki z inną parą.
4. Uczniowie realizują indywidualnie ćwiczenia 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Po ich wykonaniu nauczyciel omawia najlepsze rozwiązania zastosowane przez uczniów.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel ponownie odczytuje temat lekcji: „Działania na pierwiastkach” i inicjuje krótką rozmowę na temat kryteriów sukcesu. Czego się uczniowie nauczyli? Na koniec prosi chętnego ucznia o podsumowanie i – jeśli to potrzebne – uzupełnia informacje.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują wskazane przez nauczyciela ćwiczenia interaktywne przygotowując uzasadnienia poprawnych odpowiedzi.

Materiały pomocnicze:

- Działania na pierwiastkach

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Działania na pierwiastkach”.