



Odległość punktów na osi liczbowej

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Prezentacja multimedialna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Wiesz już czym jest odległość (zobacz temat: Pojęcie odległości). W tej lekcji zajmiemy się szczegółowo odległością euklidesową między punktami na osi liczbowej. Ponieważ oś liczbową jest przestrzenią jednowymiarową, pojęcie odległości staje się tutaj wyjątkowo łatwym do zinterpretowania.

Twoje cele

- Wyznaczysz odległość między punktami na osi liczbowej.
- Wykorzystasz wzór na odległość punktów na osi liczbowej do rozwiązywania zadań z parametrem.

Przeczytaj

Odległość między punktami A i B leżącymi na jednej prostej to długość odcinka AB , czyli długość najkrótszej krzywej (drogi) od punktu A do punktu B .

Odległością dwóch liczb na osi liczbowej jest odległość punktów odpowiadających tym liczbom.

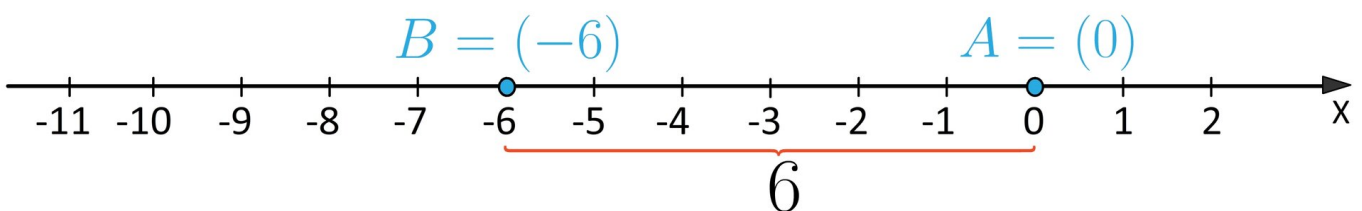
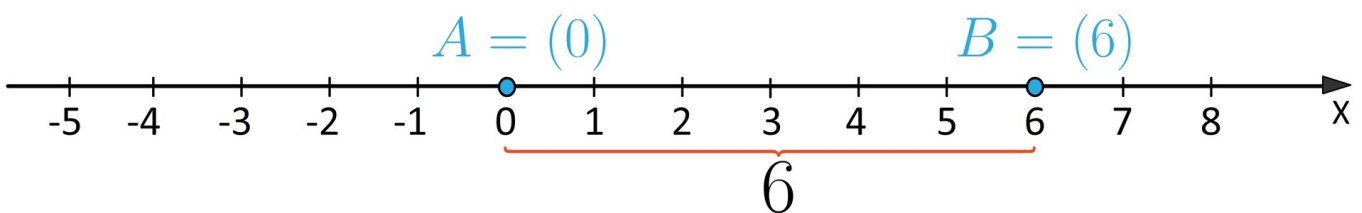
Oczywiście odległość $d(A; B)$ punktu A od punktu B spełnia następujące warunki:

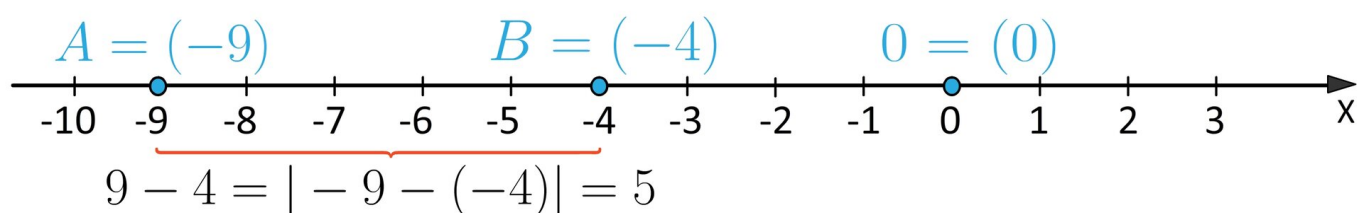
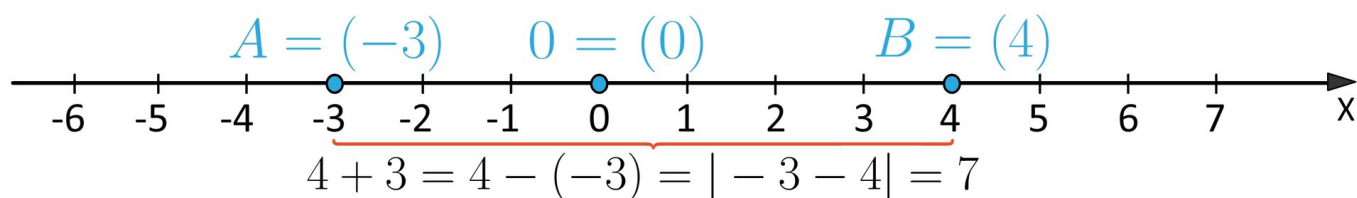
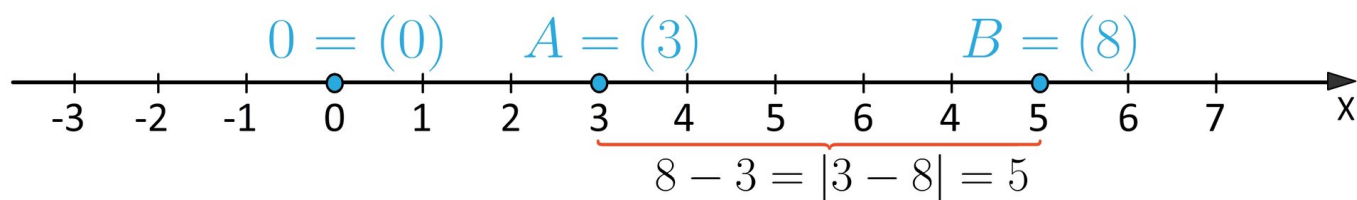
- Dla dowolnego punktu A : $d(A; A) = 0$, czyli odległość dowolnego punktu od siebie samego jest równa zero (tzw. *identyczność nierozróżnialnych*).
- Dla dowolnych punktów A i B : $d(A; B) = d(B; A)$, czyli odległość punktu A od punktu B jest taka sama jak odległość punktu B od punktu A (tzw. *symetria*).
- Dla dowolnych punktów A , B , C : $d(A; B) + d(B; C) \geq d(A; C)$, czyli suma odległości punktów A i B oraz punktów B i C jest nie mniejsza niż odległość punktów A i C (tzw. *nierówność trójkąta*).

Rozważmy teraz punkty A , B na osi liczbowej. Mogą one być położone względem zera na różne sposoby.

- Jeden z punktów ma współrzędną równą zero.
- Oba punkty mają współrzędne dodatnie.
- Punkty mają współrzędne o różnych znakach.
- Oba punkty mają współrzędne ujemne.

Przeanalizuj poniższe przykłady:





Zwróć uwagę, że niezależnie od położenia punktów na osi liczbowej względem zera, odległość między nimi można obliczyć jako wartość bezwzględną różnicy ich współrzędnych.

Zatem dla punktów na osi $A = (x_A)$, $B = (x_B)$ odległość tych punktów jest równa $d(A; B) = |x_A - x_B|$

W aplecie możesz zmieniać położenie punktów A i B na osi liczbowej. Obserwuj jak zmienia się wartość odległości między punktami.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DFbaFplWc>

Przykład 1

Obliczymy **odległość między punktami** na osi $A = (-12)$ i $B = (-17)$. Odległość ta jest równa $d(A; B) = |-12 - (-17)| = |-12 + 17| = |5| = 5$.

Przykład 2

Wyznamy wszystkie wartości parametru m tak, aby odległość między punktami $A = (m^2)$, $B = (5m)$ była równa 6.

Aby wyznaczyć wartości parametru m spełniające warunki zadania wystarczy rozwiązać równanie $|m^2 - 5m| = 6$ wynikające z powyższego wzoru.

Opuszczając wartość bezwzględną otrzymujemy alternatywę równań:

$$m^2 - 5m = 6 \text{ lub } m^2 - 5m = -6$$

$$m^2 - 5m - 6 = 0 \text{ lub } m^2 - 5m + 6 = 0$$

$$(m - 6)(m + 1) = 0 \text{ lub } (m - 3)(m - 2) = 0$$

$$m = 6 \text{ lub } m = -1 \text{ lub } m = 3 \text{ lub } m = 2$$

Odp. Odległość między punktami $A = (m^2)$, $B = (5m)$ jest równa 6 dla $m \in \{-1, 2, 3, 6\}$.

Słownik

odległość między dwoma punktami

odległość między punktami A i B leżącymi na jednej prostej to długość odcinka AB , czyli długość najkrótszej krzywej (drogi) od punktu A do punktu B

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Poniższa prezentacja dotyczy odległości punktów znajdujących się na osi liczbowej. Dowiesz się z niej między innymi, jak obliczyć odległość między punktami na osi liczbowej i w jaki sposób zastosować poznany wzór do rozwiązywania zadań z parametrem.

Przeanalizuj informacje zawarte w prezentacji i na ich podstawie rozwiąż zadanie.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1GIp8Wo3>

Polecenie 2

Rozwiąż test.

1. Punkty $A = (-5)$ i $B = (10)$ są odległe o:

☐ 10

☐ 15

☐ 5

2. Jeśli punkt A odległy jest od punktu B o 7, to punkt B jest odległy od punktu A o:

☐ -7

☐ Nie można tego stwierdzić.

☐ 7

3. Punkty $A = (m^2)$ i $B = (16)$ są odległe o 9 dla m równego:

☐ $-\sqrt{7}$

☐ -5

☐ 5

4. Punkty $A = (m^4)$ i $B = (2)$ są odległe o 79 dla m równego

☐ $\sqrt[4]{77}$

☐ 3

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Odległość punktu od samego siebie jest równa . Dla dowolnych dwóch punktów A i B odległość punktu A od punktu B jest odległości punktu B od punktu A . Własność tę nazywamy odległości. Własność zwana trójkąta orzeka z kolei, że dla dowolnych punktów A, B, C suma odległości A od B i B od C jest niż odległość A od C .

zeru

niemniejsza

symetrią

większa

mniejsza

równa

zwrotnością

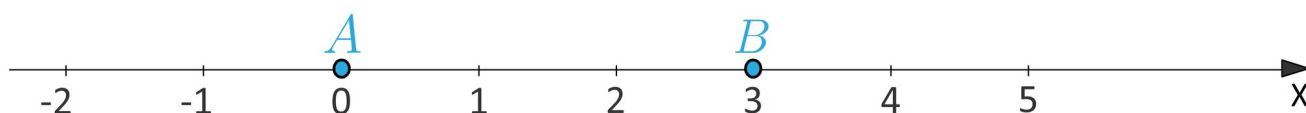
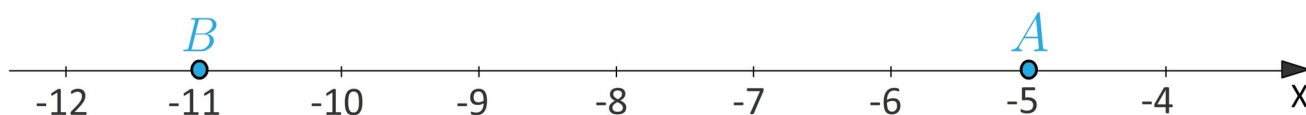
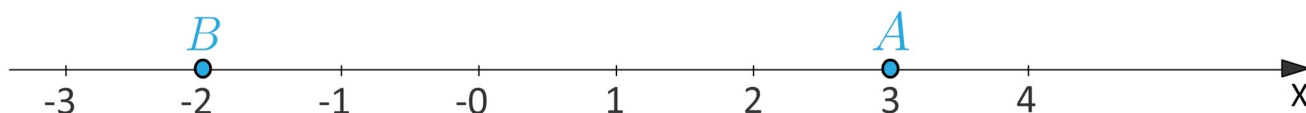
nierównością

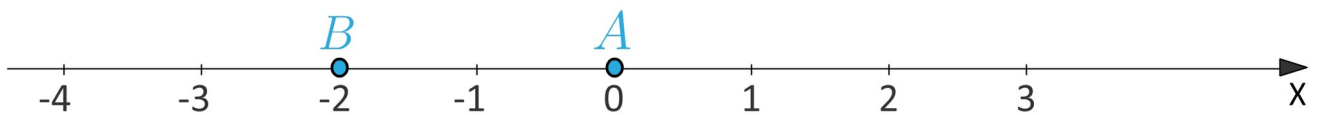
dowolnego

Ćwiczenie 2



Wskaż ilustrację, której odległość punktu A do punktu B wynosi 6. Współrzędne punktów A i B są liczbami całkowitymi.

☐☐☐☐



Ćwiczenie 3



Zaznacz zdania prawdziwe.

☐ Odległość pomiędzy punktami $A = (10)$ i $B = (7)$ na osi liczbowej wynosi 3.

☐ Odległość pomiędzy punktami $A = (-10)$ i $B = (-8)$ na osi liczbowej wynosi 18.

☐ Odległość pomiędzy punktami $A = (13)$ i $B = (-4)$ na osi liczbowej wynosi 9.

☐ Odległość pomiędzy punktami $A = (0)$ i $B = (5)$ na osi liczbowej wynosi 5.

☐ Odległość pomiędzy punktami $A = (-9)$ i $B = (0)$ na osi liczbowej wynosi 9.

Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których punkty $A = (m^2 + 2m)$, $B = (-3m)$ są odległe o 6.

Ułóż w kolejności schemat postępowania.

$$m^2 + 5m - 6 = 0 \text{ lub } m^2 + 5m + 6 = 0$$



Aby rozwiązać zadanie, wystarczy rozwiązać równanie



$$m = -6 \text{ lub } m = 1 \text{ lub } m = -2 \text{ lub } m = -3$$



$$|m^2 + 5m| = 6$$



$$m^2 + 5m = 6 \text{ lub } m^2 + 5m = -6$$



$$|m^2 + 2m - (-3m)| = 6$$



$$(m + 6)(m - 1) = 0 \text{ lub } (m + 2)(m + 3) = 0$$



Zatem punkty A i B są odległe o 6 dla $m \in \{-6; 1; -2; -3\}$.



Ćwiczenie 7



Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi.

Pytanie	Odpowiedzi:		
Punkty $A = (m^3)$ i $B = (1)$ są odległe o 7 dla m równego:	8 ☐	2 ☐	$\sqrt[3]{6}$ ☐
Punkty $A = (m^3)$ i $B = (2)$ są odległe o 1 dla m równego:	1 ☐	3 ☐	$\sqrt[3]{3}$ ☐
Punkty $A = (m^3)$ i $B = (7)$ są odległe o 20 dla m równego:	$\sqrt[3]{-13}$ ☐	3 ☐	$-\sqrt[3]{13}$ ☐
Punkty $A = (m^4)$ i $B = (1)$ są odległe o 15 dla m równego:	2 ☐	-2 ☐	4 ☐

Ćwiczenie 8



Wyznacz wartości parametru m , dla których punkty $A = (m^3 - m^2)$, $B = (-m^2 - m)$ są odległe o 2.

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Odległość punktów na osi liczbowej

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zakres podstawowy. Uczeń:

3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza odległość między punktami na osi liczbowej,
- wykorzystuje wzór na odległość punktów na osi liczbowej do rozwiązywania zadań z parametrem.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- metoda akwariów;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Przybliżenie przez nauczyciela tematu: „Odległość punktów na osi liczbowej” i celów lekcji. Określenie wiążących dla uczniów kryteriów sukcesu.
2. Prowadzący prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi, aby wybrany uczeń przeczytał polecenie numer 1 z sekcji „Prezentacja multimedialna” – „Poniższa prezentacja dotyczy odległości punktów znajdujących się na osi liczbowej. Dowiesz się z niej między innymi, jak obliczyć odległość między punktami na osi liczbowej i w jaki sposób zastosować poznany wzór do rozwiązywania zadań z parametrem. Przeanalizuj informacje zawarte w prezentacji i na ich podstawie rozwiąż zadanie.” Następnie prosi uczniów, aby zapoznali się z materiałem. Po ustalonym wcześniej czasie pyta czy były wątpliwości z jego zrozumieniem i tłumaczy je.
2. Wybrani uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1-2 na forum klasy. Nauczyciel sprawdza poprawność ich wykonania, omawiając je wraz z uczniami na bieżąco.
3. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 3-5 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy komentowane są przez nauczyciela po ich zakończeniu.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel ponownie odczytuje temat lekcji: „Odległość punktów na osi liczbowej” i inicjuje krótką rozmowę na temat kryteriów sukcesu. Czego się uczniowie nauczyli? Na koniec prosi chętnego ucznia o podsumowanie i – jeśli to potrzebne – uzupełnia informacje.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Położenie – oś liczbową i układ współrzędnych](#)
- [Odległość na osi liczbowej](#)

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Prezentacja multimedialna” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania w temacie „Odległość punktów na osi liczbowej”.