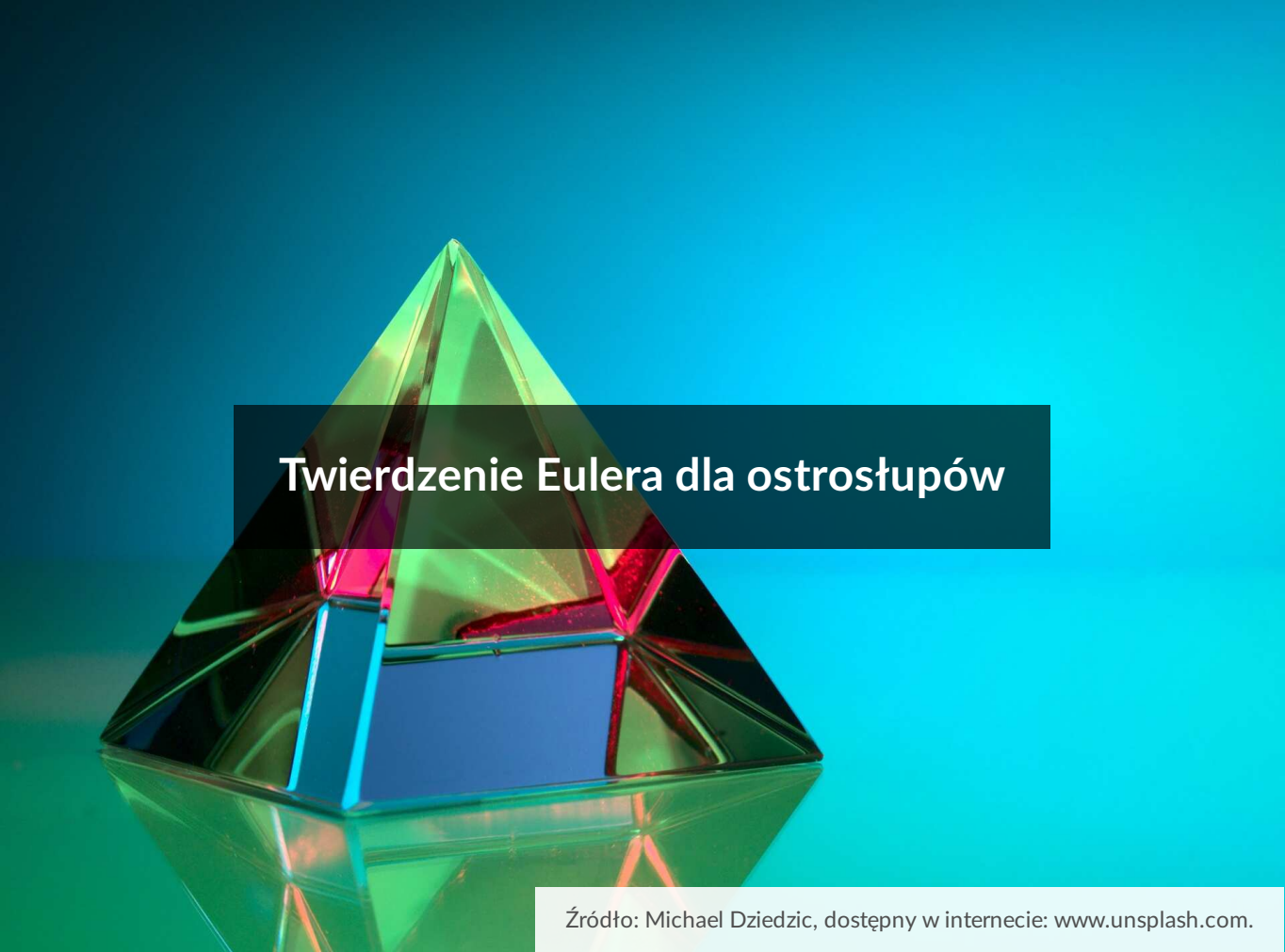




Twierdzenie Eulera dla ostrosłupów

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja 3D](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Twierdzenie Eulera dla ostrosłupów

Źródło: Michael Dziedzic, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Treści zawarte w tym e-materiale wykraczają poza podstawę programową. Jeśli jednak:

- **interesujesz się matematyką,**
- **chcesz studiować na kierunku, gdzie będzie wykładana matematyka,**
- **bierzesz udział w konkursach matematycznych,** zachęcamy Cię do zapoznania się z tym e-materiałem.

Poznasz twierdzenie Eulera dla ostrosłupów. Na lekcjach matematyki poznałeś już twierdzenia, których treść jest ściśle związana z nazwiskiem autora (na przykład twierdzenie Pitagorasa albo twierdzenie Talesa). Euler należał niewątpliwie do najbardziej genialnych i płodnych matematyków wszech czasów. Jego imię stawia się w historii nauk ścisłych na równi z Newtonem, Kartezjuszem czy Galileuszem.



Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

Leonard Euler (1707–1783) urodził się w Szwajcarii. W Bazylei słuchał wykładów wielkiego matematyka Jana Bernoulliego. Już w wieku lat szesnastu otrzymał tytuł magistra. Pierwsze jego prace dotyczyły nawigacji. Później jednak poświęcił się matematyce. W 1748 roku wydano w Lozannie jego trzypięciotomowe dzieło „*Wstęp do analizy nieskończone małych*”, które było zbiorem prac i artykułów Eulera pisanych na przestrzeni lat. Dzieło to ugruntowało jego pozycję jako najwybitniejszego ówczesnego matematyka.

Znasz już twierdzenie Eulera dotyczące własności wielościanów wypukłych. Udoskonalisz umiejętność jego stosowania w przypadku ostrosłupów. Nauczysz się, jak klasyfikować ostrosłup dzięki ilości jego wierzchołków, krawędzi i ścian. Twoim głównym celem jest ćwiczenie wyobraźni przestrzennej. Po ukończeniu tej lekcji będziesz w stanie określić nazwę ostrosłupa, znając wyłącznie liczbę jego krawędzi. Będziesz też w stanie odpowiedzieć na pytanie, jaki jest związek między liczbą wierzchołków a liczbą ścian dowolnego ostrosłupa. Niech mottem tej lekcji będzie wypowiedź wielkiego matematyka francuskiego Laplace’a:

“ Czytajcie, czytajcie Eulera, on jest naszym wielkim nauczycielem.

Twoje cele

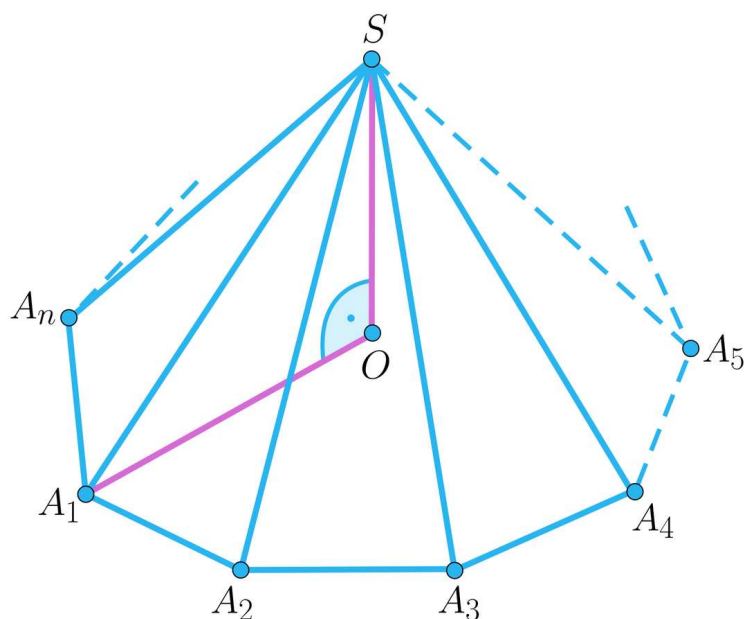
- rozpoznasz wielościany, w szczególności ostrosłupy;
- zastosujesz zależności między liczbą krawędzi, wierzchołków i ścian ostrosłupów;
- przeprowadzisz rozumowanie pomagające ustalić strategię rozwiązania zadania.

Przeczytaj

W tym materiale zajmiemy się analizą własności ostrosłupów w zależności od ich liczby ścian, krawędzi i wierzchołków. Zauważmy, że wprost z definicji ostrosłupa wynika, że jeżeli podstawą ostrosłupa jest dany n -kąt, wówczas prawdziwe są następujące obserwacje.

Obserwacja 1

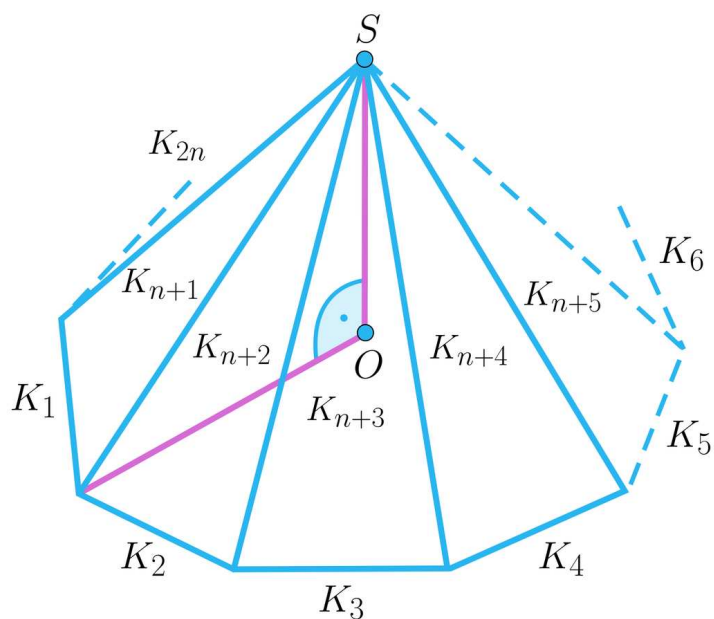
Ostrosłup ten posiada dokładnie $n + 1$ wierzchołków.



Istotnie, n wierzchołków ostrosłupa należy do płaszczyzny podstawy, zaś jeden jest wspólnym wierzchołkiem ścian bocznych.

Obserwacja 2

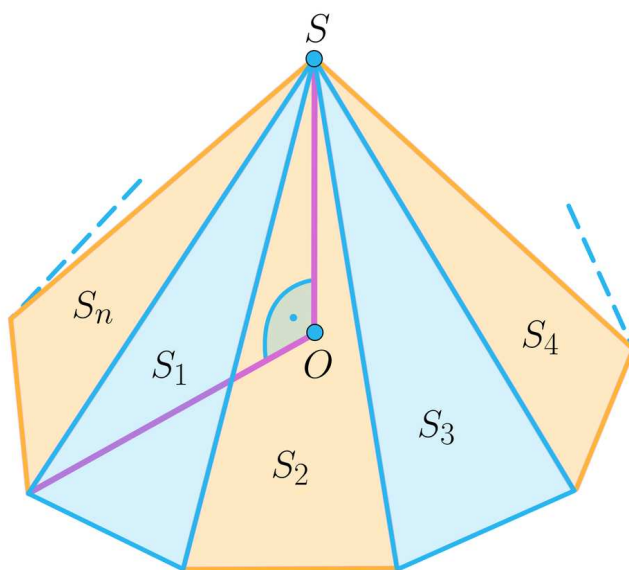
Ostrosłup ten posiada dokładnie $2n$ krawędzi.



Faktycznie, n krawędzi ostrosłupa to boki wielokąta podstawy. Z każdego wierzchołka podstawy (których to wierzchołków jest oczywiście n) poprowadzona jest dokładnie jedna krawędź boczna, łącząca ten wierzchołek podstawy z (pojedynczym) wierzchołkiem całego ostrosłupa. W sumie daje to $2n$ krawędzi ostrosłupa.

Obserwacja 3

Ostrosłup ten posiada dokładnie $n + 1$ ścian.



Aby to pokazać, zauważmy, że n ścian to trójkąty tworzące ściany boczne. Ich podstawami są boki n -kąta podstawy, która jest ostatnią $n + 1$ -szą ścianą naszej bryły.

W XVIII wieku Leonard Euler odkrył prostą zależność między liczbą wierzchołków, ścian i krawędzi dowolnego **wielościanu** wypukłego. Zależność tą nazywamy dziś twierdzeniem Eulera dla wielościanów, albo też wzorem Eulera. Legenda mówi, że Euler odkrył tę zależność przez przypadek, próbując klasyfikować wielościany ze względu na liczbę ich ścian, analogicznie do znanej mu klasyfikacji wielokątów w zależności od liczby boków. Euler szybko zauważył jednak, że wielościany o równej liczbie ścian mogą mieć jednak różne liczby wierzchołków i krawędzi. Ostatecznie zaczął rozpatrywać jednocześnie wszystkie trzy wielkości i sformułował następujący związek.

Twierdzenie: o liczbie krawędzi wielościanu wypukłego

Liczba krawędzi wielościanu wypukłego jest o dwa mniejsza od sumy liczby wierzchołków i liczby ścian tego wielościanu.

Inaczej twierdzenie można to sformułować następująco

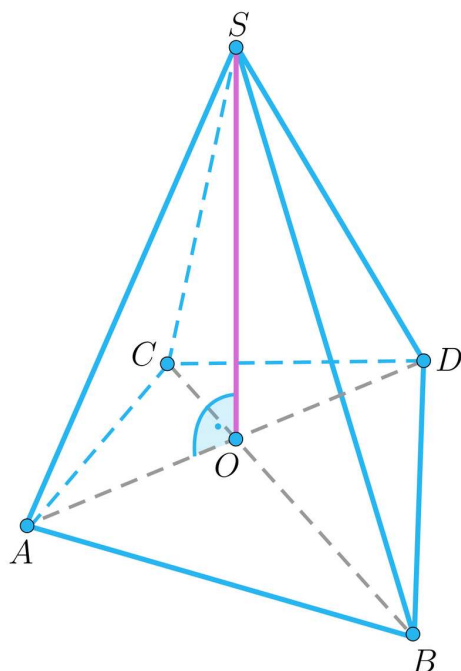
Twierdzenie: wzór Eulera

Niech W oznacza liczbę wierzchołków, K liczbę krawędzi, zaś S liczbę ścian wielościanu. Dla każdego wielościanu wypukłego zachodzi równość

$$W + S - K = 2.$$

Przykład 1

Rozważmy przykład ilustrujący wzór Eulera dla ostrosłupa o podstawie czworokąta.



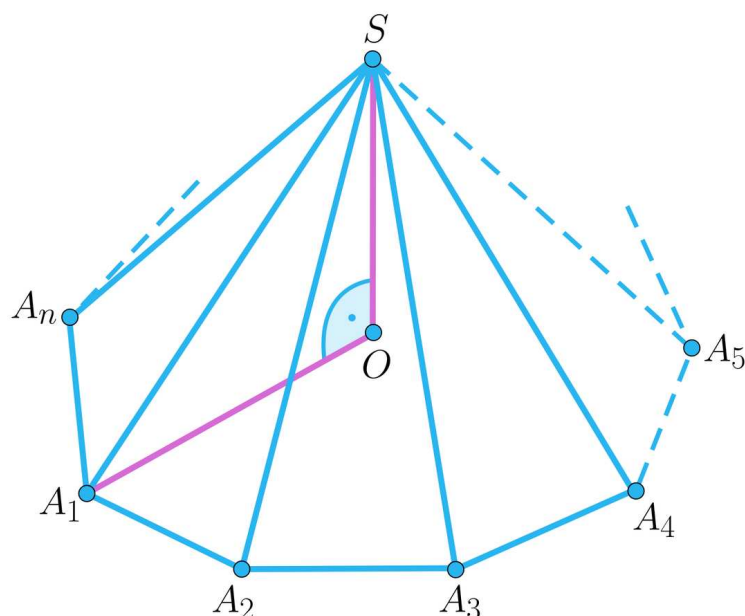
Możemy łatwo policzyć korzystając z rysunku albo modelu takiego ostrosłupa liczbę jego wierzchołków, krawędzi i ścian. W poniższej tabeli zebraliśmy wartości poszczególnych składowych ze wzoru Eulera.

Nazwa wielościanu	Ostrosłup czworokątny
Liczba wierzchołków	5
Liczba ścian	5
Liczba krawędzi	8

Zgodnie ze wzorem Eulera zachodzi równość $W + S - K = 5 + 5 - 8 = 2$.

Przykład 2

Zajmiemy się teraz twierdzeniem Eulera w przypadku dowolnego ostrosłupa o podstawie n -kątnej.



Przyjmijmy oznaczenie n na liczbę wierzchołków wielokąta będącego podstawą ostrosłupa. Z wcześniejszych obserwacji wiemy, że zachodzą związki $S = n + 1$, $W = n + 1$ oraz $K = 2n$.

Stąd otrzymujemy równość $W + S - K = (n + 1) + (n + 1) - 2n = 2$.

Zauważmy, że w powyższym dowodzie w żaden sposób nie wykorzystaliśmy informacji, że ostrosłup jest wypukły. Związki określające ilość krawędzi, wierzchołków i ścian ostrosłupa w zależności od ilości boków wielokąta podstawy są prawdziwe zawsze, nawet, gdy ostrosłup ten nie jest **bryłą wypukłą**. Możemy zatem stwierdzić, że wzór Eulera jest prawdziwy dla każdego ostrosłupa (nie tylko wypukłego).

Dzięki opisanym własnościom, można rozwiązywać zadania, w których musimy dokonać analizy bryły na podstawie wiadomości o liczbie jej ścian, krawędzi oraz wierzchołków.

Przykład 3

Ile ścian bocznych ma ostrosłup o 300 krawędziach?

Rozwiązanie

Jeżeli jest to ostrosłup n -kątny, to liczba jego krawędzi jest równa $2n = 300$. Stąd $n = 150$, co oznacza, że ostrosłup ten ma dokładnie 151 ścian.

Przykład 4

Liczba krawędzi pewnego ostrosłupa jest o 17 większa od liczby jego wszystkich wierzchołków. Oblicz, ile ścian ma ten ostrosłup.

Rozwiązanie

Pamiętając, że dla ostrosłupa o podstawie n -kątnej liczba krawędzi wynosi $2n$ zaś liczba wierzchołków $n + 1$, otrzymujemy następującą zależność:

$$2n = (n + 1) + 17.$$

Stąd już bezpośrednio wynika, że $n = 18$. Oznacza to, że omawianym ostrosłupem jest ostrosłup o podstawie osiemnastokątnej, a jego ilość ścian jest równa 19.

Przykład 5

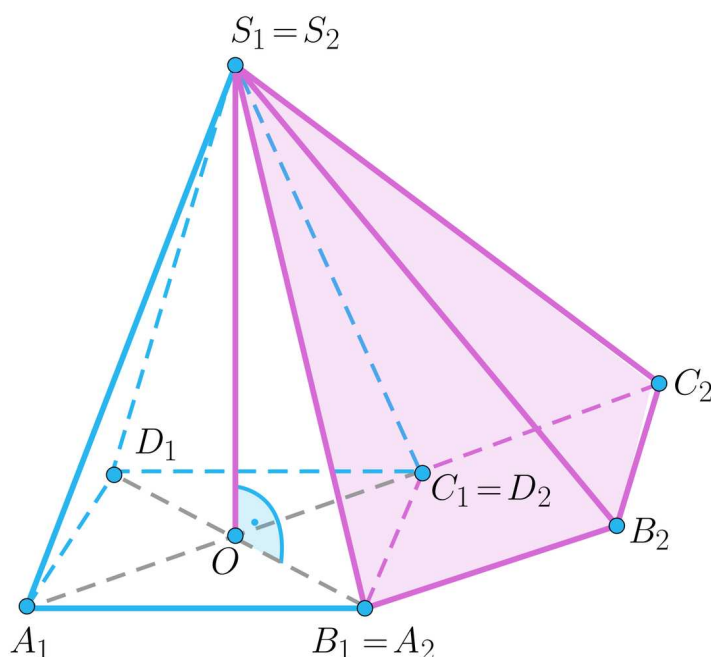
Charakterystyką Eulera wielościanu nazywamy liczbę $\chi = S + W - K$, gdzie S oznacza liczbę ścian wielościanu, W liczbę jego wierzchołków, a K liczbę jego krawędzi.

Rozpatrzmy ostrosłup prawidłowy czworokątny, w którym krawędź podstawy jest równa wysokości ściany bocznej.

1. Podajemy charakterystykę Eulera omawianego ostrosłupa.

Zauważmy, że charakterystyka Eulera jest sumą, która występuje w twierdzeniu Eulera o wielościanach wypukłych. Dla ostrosłupa (jak i dla każdego wielościanu wypukłego) mamy zatem $\chi = S + W - K = 2$.

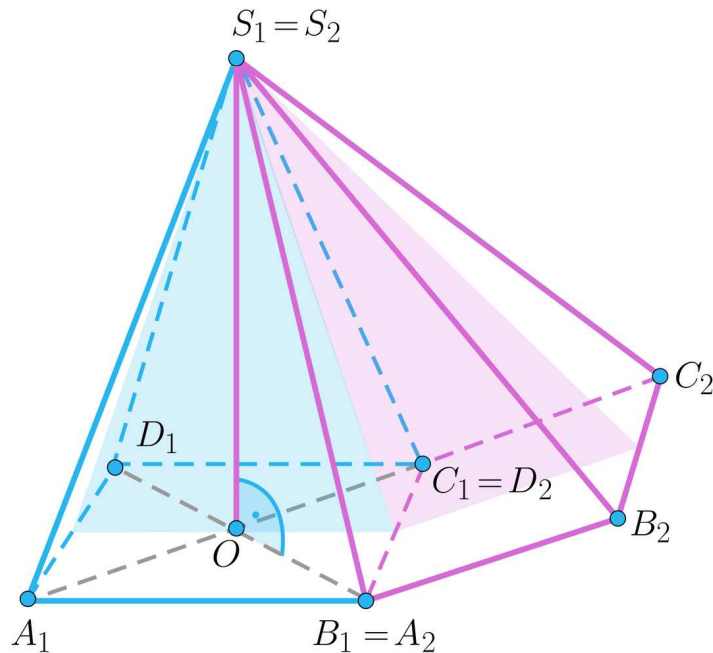
2. Do ściany $S_1B_1C_1$ danego ostrosłupa doklejamy identyczny ostrosłup. Podajemy charakterystykę Eulera wielościanu, który powstał po sklejeniu dwóch ostrosłupów.



Jeżeli skleimy dwa ostrosłupy, to ilość ścian otrzymanej bryły będzie równa sumie ilości ścian danych ostrosłupów pomniejszonej o 2 (bo dwie ściany zniknęły we wnętrzu bryły). Ilość krawędzi otrzymanej bryły będzie równa sumie ilości krawędzi każdego z ostrosłupów pomniejszonej o 3 (bo trzy krawędzi pokryły się). Ilość wierzchołków otrzymanej bryły będzie równa sumie ilości wierzchołków danych ostrosłupów pomniejszonej o 3 (bo trzy wierzchołki zostały zlepione). Ostatecznie $\chi = (5 + 5 - 2) + (5 + 5 - 3) - (8 + 8 - 3) = 2$.

3. Postępując analogicznie, do ściany $S_2B_2C_2$ doklejamy kolejny ostrosłup. Określ, ile maksymalnie identycznych ostrosłupów opisanych w zadaniu można skleić w ten sposób ze sobą.

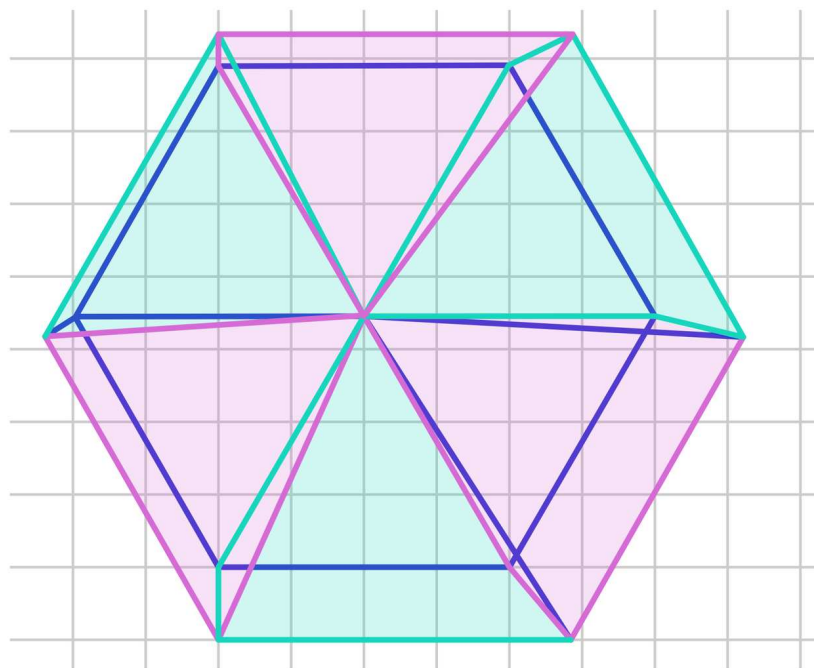
Rozpatrzmy w danym ostrosłupie trójkąt, którego wierzchołkami są środki dwóch przeciwległych krawędzi podstawy i wierzchołek górny ostrosłupa.



Ponieważ zgodnie z warunkami zadania wysokość ściany bocznej jest równa krawędzi podstawy, to ten trójkąt jest trójkątem równobocznym. Gdy doklejamy kolejne ostrosłupy, trójkąty te skleją się bokami należącymi do sklejanego ściany i są współpłaszczyznowe. Ponieważ kąt wewnętrzny trójkąta równobocznego jest równy 60° , to zlepimy maksymalnie sześć ostrosłupów, otrzymując w omawianym przekroju kąt pełny 360° .

4. Podajemy charakterystykę Eulera wielościanu sklejonego z tej maksymalnej liczby ostrosłupów.

Oto szkic otrzymanego wielościanu.



Na zamieszczonym rysunku możemy zauważyć, że omawiany wielościan sklejony z sześciu ostrosłupów ma: 18 ścian, 13 wierzchołków oraz 30 krawędzi. Obliczając jego charakterystykę Eulera otrzymujemy $\chi = 18 + 13 - 30 = 1$. Oznacza to, że po sklejeniu ostatnich ścian i domknięciu „pierścienia” otrzymamy wielościan, którego charakterystyka jest różna od charakterystyki użytych ostrosłupów.

Słownik

wielościan

część przestrzeni (bryła) ograniczona ze wszystkich stron wielokątami leżącymi w różnych płaszczyznach wraz z tymi wielokątami

bryła wypukła

zbiór punktów, który spełnia warunek, że każde dwa punkty należące do tego zbioru można połączyć odcinkiem zawartym w tym zbiorze

Animacja 3D

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją 3D dotyczącą twierdzenia Eulera dla ostrosłupów. Przeanalizuj przedstawione zadania i ich rozwiązania. Zwróć uwagę na przyjęte oznaczenia i sposób zapisu kolejnych etapów pracy.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DV9J769jU>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej twierdzenia Eulera dla ostrosłupów.

Polecenie 2

Jaki wielokąt jest w podstawie ostrosłupa, jeżeli suma ilości jego wierzchołków, krawędzi i ścian jest równa 118?

Polecenie 3

Rozpatrujemy ostrosłup n -kątny. Tworzymy wielościan niewypukły, wydrążając z danego ostrosłupa ostrosłup do niego podobny w skali 1 : 4. Podstawa mniejszego ostrosłupa jest zawarta w podstawie większego. Sprawdź, czy taka bryła spełnia wzór Eulera. Możesz wykorzystać metodę omówioną w samouczku, dzięki której ilość ścian, krawędzi i wierzchołków ostrosłupa wyrażamy za pomocą jednej zmiennej n określającej ilość krawędzi podstawy ostrosłupa.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Przeciągnij i wstaw odpowiedni wielokąt będący podstawą ostrosłupa, który ma:

- 13 ścian - 
- 80 krawędzi - 
- 21 wierzchołków - 

80-kąt

13-kąt

12-kąt

20-kąt

40-kąt

Ćwiczenie 2



Zaznacz zdania prawdziwe.
Istnieje ostrosłup, który ma:

☐ 96 krawędzi

☐ 996 krawędzi

☐ 9669 krawędzi

☐ 9 krawędzi

Ćwiczenie 3



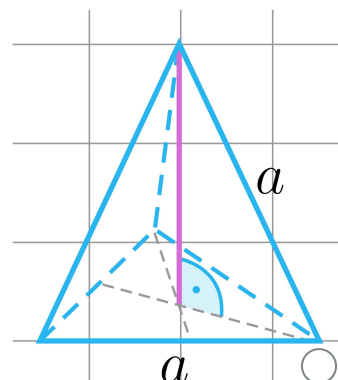
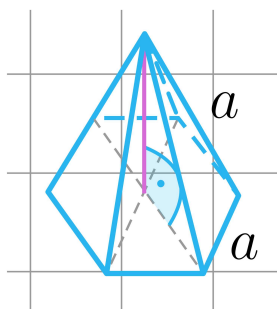
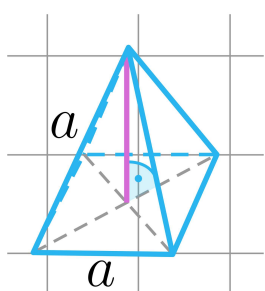
Wskaż zdanie fałszywe:

- ☐ Istnieje ostrosłup, który ma dokładnie 13^{18} wierzchołków
- ☐ Istnieje ostrosłup, który ma dokładnie 13^{18} krawędzi
- ☐ W dowolnym ostrosłupie liczba ścian i liczba wierzchołków jest zawsze taka sama
- ☐ Liczba krawędzi ostrosłupa jest o 2 mniejsza od podwojonej liczby jego ścian

Ćwiczenie 4



Dany jest ostrosłup o nieparzystej liczbie wierzchołków, którego wszystkie krawędzie mają równe długości. Oblicz ile krawędzi ma ten ostrosłup i wybierz przedstawiającą go grafikę.



Ćwiczenie 5



W ostrosłupie liczba krawędzi wynosi 190% liczby wierzchołków. Wyznacz liczbę ścian tego ostrosłupa.

Ćwiczenie 6



Przyjmując, że K oznacza liczbę krawędzi pewnego ostrosłupa a S liczbę jego ścian. Ile wierzchołków ma ten ostrosłup, jeżeli spełniona jest równość $K^2 + 3K = 18S - 2$.

Ćwiczenie 7



W ostrosłupie iloczyn liczby ścian i liczby krawędzi wynosi 84. Jaką figurą jest podstawa tego ostrosłupa?

Ćwiczenie 8



Rozpatrzmy ostrosłup, w którym V oznacza liczbę wierzchołków, E liczbę krawędzi oraz F liczbę ścian. Konstruujemy prostopadłościan o wymiarach równych $V \times E \times F$. Wiemy, że objętość tego prostopadłościanu wynosi 360. Oblicz wymiary prostopadłościanu.

Dla nauczyciela

Autor: Bożena Koprowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Twierdzenie Eulera dla ostrosłupów

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

- 6. oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje wielościany, w szczególności ostrosłupy;
- stosuje zależności między liczbą krawędzi, wierzchołków i ścian ostrosłupów;
- przeprowadza rozumowanie pomagające ustalić strategię rozwiązania zadania.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- formułowanie wniosków w oparciu o modele brył, rysunki brył przedstawione na tablicy interaktywnej;
- dyskusja;

- burza mózgów.

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu,
- projektor multimedialny,
- e-podręcznik,
- arkusze papieru, pisaki

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

Faza wstępna:

- Przed lekcją nauczyciel prosi uczniów o wykonanie w domu modelu ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o zadanych dla całej klasy identycznych wymiarach, takich aby długość krawędzi podstawy ostrosłupa była równa długości wysokości ściany bocznej. Uczniowie mają przynieść na lekcję te bryły i klej.

Faza realizacyjna:

- Nauczyciel rozpoczyna lekcję od animacji 3D. Po zapoznaniu się z materiałem uczniowie formułują twierdzenie Eulera dla ostrosłupów i weryfikują jego prawdziwość dla ostrosłupa czworokątnego (mogą wykorzystać własne modele). Nauczyciel korzystając z części „Przeczytaj” przypomina z uczniami twierdzenie Eulera dla wielościanów i pojęcie bryły wypukłej.
- Uczniowie łączą się w 6-cio osobowe grupy i przygotowują dowód twierdzenia Eulera dla ostrosłupów. Następnie wybrany uczeń prezentuje dowód. W przypadku trudności nauczyciel wykorzystuje materiał z części „Przeczytaj”.
- Uczniowie zapoznają się z rozwiązaniami przykładów 3 oraz 4, a następnie tworzą w wykorzystanych już grupach autorskie analogiczne zadanie wykorzystujące wzór Eulera dla ostrosłupa. Wybrany uczeń prezentuje zadanie grupy wraz z rozwiązaniem.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel w dyskusji z uczniami ustala najważniejsze wnioski z lekcji o zależnościach między liczbą ścian, krawędzi i wierzchołków ostrosłupów. Odsyła zainteresowanych uczniów do dodatkowych źródeł omawiających charakterystykę Eulera brył.

- Nauczyciel prosi uczniów o zanotowanie najważniejszych zależności z lekcji w zeszycie własnymi słowami, z wykorzystaniem rysunków, tabeli lub poznanych symboli.

Praca domowa:

- Nauczyciel poleca uczniom zapoznanie się z multimediami bazowymi z lekcji i wykonanie poleceń umieszczonych w tej części. Dobiera również (w zależności od biegłości algebraicznej uczniów) zadanie otwarte z części „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Ostrosłup – opis bryły](#)

Wskazówki metodyczne:

Aniamcję 3D można też wykorzystać do powtórzenia wiadomości o ostrosłupach.