



Styczna do okręgu na płaszczyźnie kartezjańskiej

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Styczna do okręgu na płaszczyźnie kartezjańskiej

Źródło: dostępny w internecie: piqsels.com, domena publiczna.

Styczna do okręgu na płaszczyźnie kartezjańskiej, którą omówimy w tym materiale, to prosta mająca z okręgiem tylko jeden punkt wspólny, nazywany punktem styczności.

Własności stycznej są często wykorzystywane w rozwiązywaniu zadań związanych z okręgiem, prostą czy kątami między innymi dzięki temu, że styczne do okręgu są prostopadłe do promienia łączącego środek okręgu z punktem styczności. To może stanowić punkt wyjścia do analizy zadania i planowania strategii jego rozwiązania.

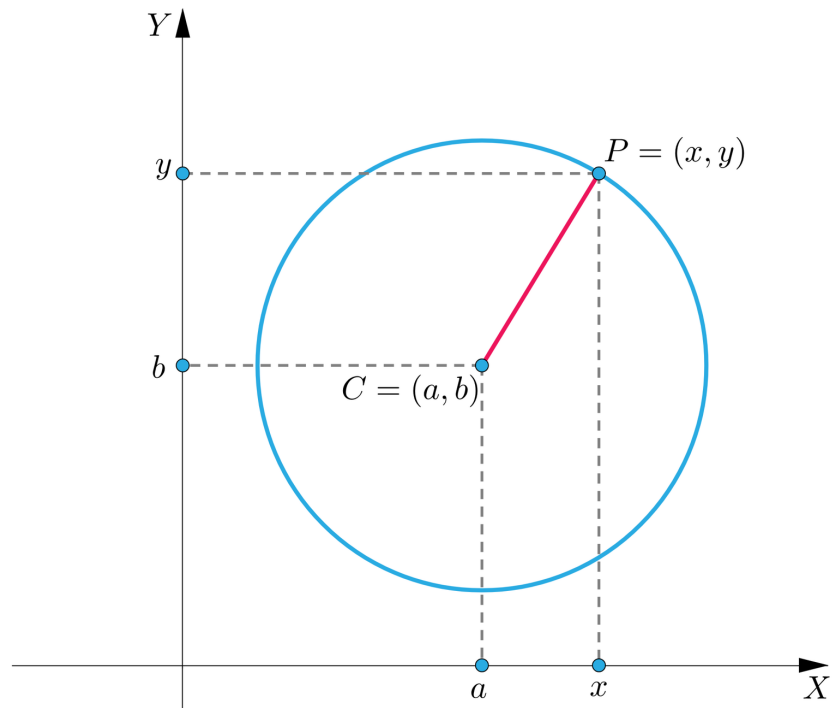
Twoje cele

- Rozpatrzysz przypadki położenia punktu względem okręgu.
- Napiszesz równanie stycznej do okręgu w prostokątnym układzie współrzędnych.
- Zastosujesz poznane metody do rozwiązywania zadań dotyczących geometrii analitycznej.

Przeczytaj

Równanie okręgu

Okrąg jest zbiorem punktów leżących w tej samej odległości od danego punktu, zwanego środkiem okręgu.



Oznaczając współrzędne środka C okręgu przez (a, b) a promień przez r , jego równanie na płaszczyźnie kartezjańskiej możemy zapisać w postaci kanonicznej:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Równanie to możemy zapisać również w innej postaci:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Podstawiając:

$$c = a^2 + b^2 - r^2$$

otrzymujemy równanie w postaci ogólnej:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

Równanie to jest równaniem okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a^2 + b^2 - c \geq 0$$

Współrzędne środka okręgu C i długość promienia r wyznaczamy ze wzorów:

$$C = (a, b), r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$$

Ważne!

Jeśli $a^2 + b^2 - c = 0$, czyli $r = 0$, to okrąg jest okręgiem zdegenerowanym do punktu C .

Przykład 1

Sprawdzimy, czy równanie $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$ jest równaniem okręgu.

Rozwiązanie

Oznaczmy: $a = -1$, $b = 2$, $c = -11$. Ponieważ $a^2 + b^2 - c \geq 0$, stąd:

$$(-1)^2 + 2^2 - (-11) = 1 + 4 + 11 > 0,$$

czyli dane równanie jest równaniem okręgu.

Przykład 2

Sprawdzimy, czy punkt $C = (-1, 2)$ jest środkiem okręgu o równaniu $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$ oraz czy jego promień r ma długość 4.

Rozwiązanie

Wykorzystując wzory na środek i promień okręgu $C = (a, b)$, $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$, otrzymujemy:

$$C = (a; b), \text{ czyli } C = (-1, 2).$$

Wyznamy teraz długość promienia okręgu:

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 - (-11)} = \sqrt{16} = 4.$$

Zatem $C = (-1; 2)$ jest środkiem okręgu o równaniu:

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0,$$

a jego promień ma długość 4.

Prosta styczna do okręgu

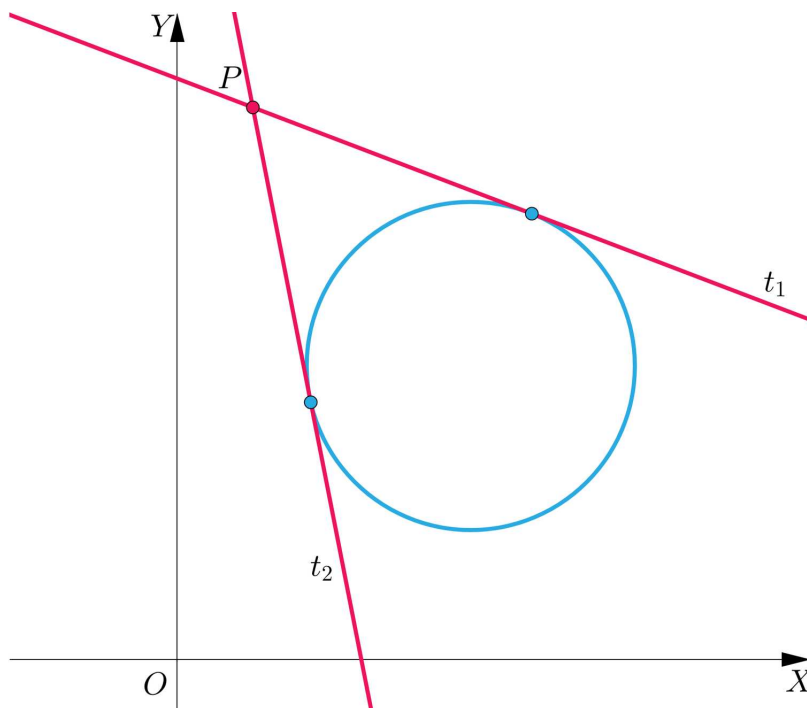
Przypomnijmy, że prostą nazywamy styczną do okręgu, jeśli ma z nim dokładnie 1 punkt wspólny. Punkt wspólny nazywamy punktem styczności.

Dany jest punkt $P = (x_0, y_0)$ oraz okrąg o równaniu:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

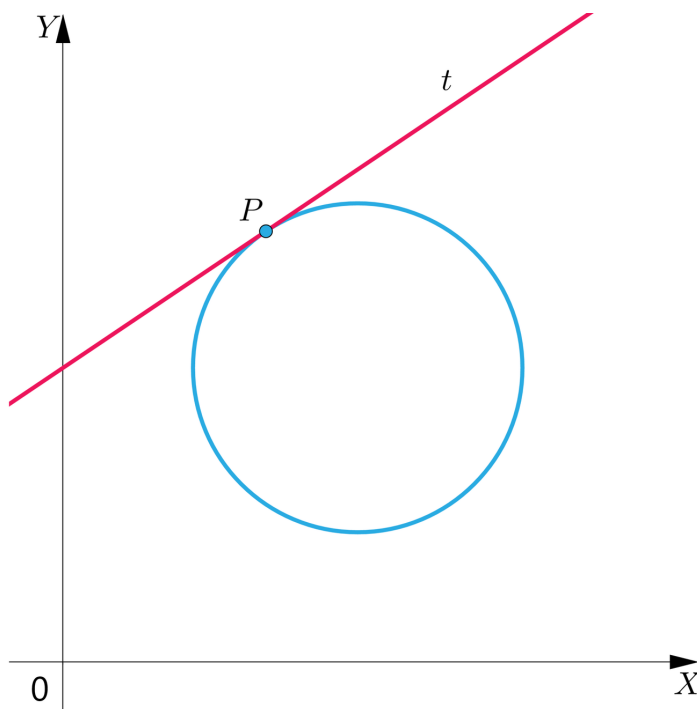
Ilość stycznych do okręgu przechodzących przez punkt P zależy od wzajemnego położenia okręgu i punktu P . Może zachodzić jeden z trzech następujących przypadków:

1. punkt P leży na zewnątrz okręgu;



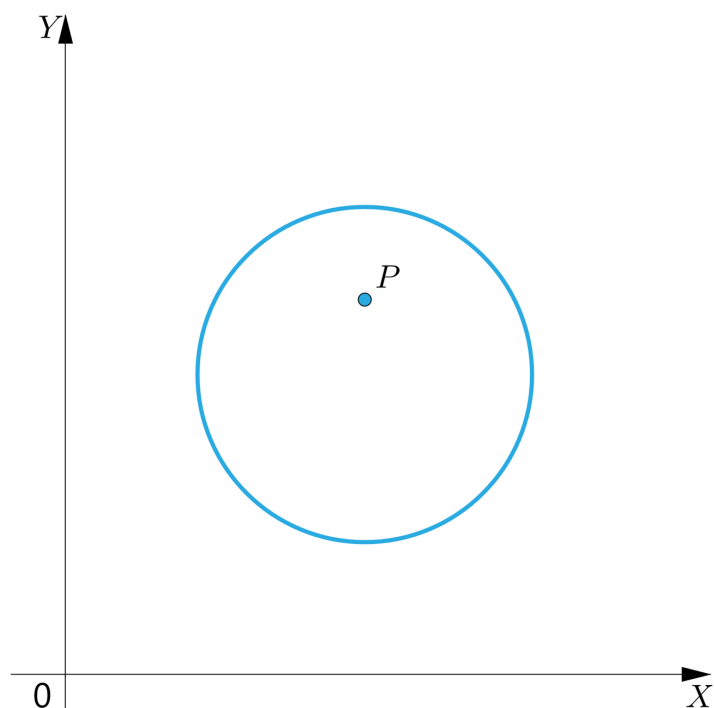
Przez punkt P przechodzą dokładnie 2 proste styczne do tego okręgu.

2. punkt P leży na okręgu;



Przez punkt P przechodzi dokładnie 1 prosta styczna do tego okręgu. Punkt P jest jednocześnie punktem styczności.

3. punkt P leży wewnątrz okręgu;



Przez punkt P nie przechodzi żadna prosta styczna do tego okręgu.

Aby, w przypadkach 1 i 2, wyznaczyć równania stycznych do okręgu, na których leży punkt P , postępujemy zgodnie z poniższym algorytmem:

- Wyznaczamy współrzędne środka C okręgu i długość promienia okręgu.
- Piszemy równanie **pęku prostych** o środku P w postaci ogólnej:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$mx - y + y_0 - mx_0 = 0.$$

- Stosujemy wzór na **odległość punktu $P = (x_0; y_0)$ od prostej danej równaniem ogólnym $Ax + By + C = 0$:**

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

- Obliczoną odległość przyrównujemy do długości promienia.
- Podstawiamy obliczone wartości m do równania pęku prostych.

Przykład 3

Wyznamy równania stycznych do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 2x = 0$ przechodzących przez punkt $P = \left(\frac{9}{4}, 0\right)$.

Rozwiązanie

Wyznaczamy współrzędne środka C okręgu i długość jego promienia:

$$C = (1, 0), r = 1.$$

Piszemy równanie pęku prostych o środku P :

$$y - 0 = m\left(x - \frac{9}{4}\right)$$

$$4mx - 4y - 9m = 0.$$

Obliczamy odległość prostych od punktu C :

$$d = \frac{|4m \cdot 1 - 4 \cdot 0 - 9m|}{\sqrt{16m^2 + 16}} = \frac{|-5m|}{\sqrt{16m^2 + 16}}.$$

Przyrównujemy tak obliczoną odległość do długości promienia:

$$\frac{|-5m|}{\sqrt{16m^2 + 16}} = 1$$

$$|-5m| = \sqrt{16m^2 + 16}.$$

Podnosimy obie strony do kwadratu:

$$25m^2 - 16m^2 = 16$$

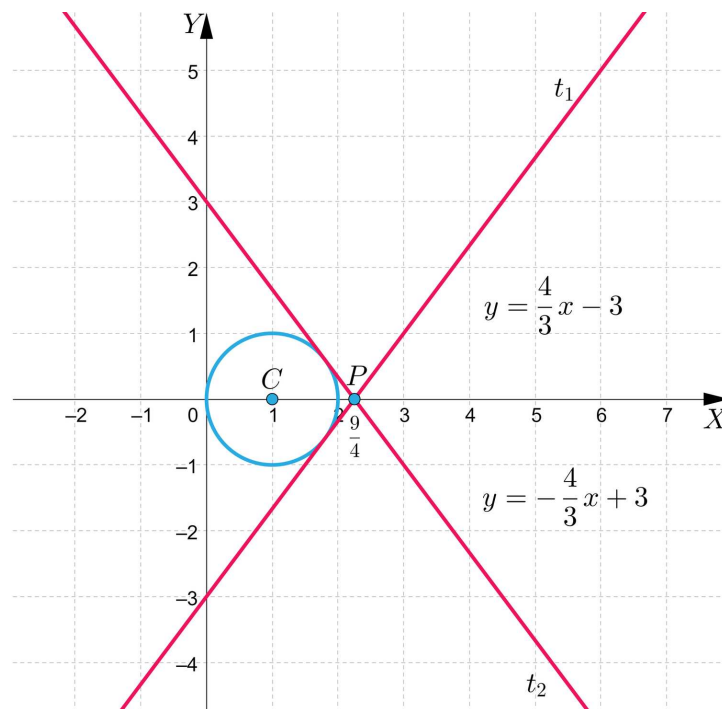
$$9m^2 = 16$$

$$m^2 = \frac{16}{9}, \text{ zatem: } m = -\frac{4}{3} \text{ lub } m = \frac{4}{3}.$$

Podstawiamy obliczone wartości m do równania pęku i otrzymujemy równania stycznych:

$$t_1 : y = \frac{4}{3}x - 3,$$

$$t_2 : y = -\frac{4}{3}x + 3.$$



Jeśli punkt P jest punktem okręgu, to poza metodami zaprezentowanymi wyżej, możemy zastosować również inną metodę.

- Wyznaczamy współrzędne środka C okręgu.
- Wyznaczamy współczynnik kierunkowy m prostej l przechodzącej przez punkty P i C .
- Jeśli $m \neq 0$, to wyznaczamy współczynnik $m' = -\frac{1}{m}$ prostej prostopadłej do prostej l .
- Piszemy równanie stycznej:

$$y - y_0 = m'(x - x_0).$$

Ważne!

1. Jeśli prosta przechodząca przez punkty P i C jest równoległa do osi X , to równanie stycznej do okręgu ma postać: $x = x_0$, gdzie x_0 - odcięta punktu P .
2. Jeśli prosta przechodząca przez punkty P i C jest równoległa do osi Y , to równanie stycznej do okręgu ma postać: $y = y_0$, gdzie y_0 - rzędna punktu P .

Przykład 4

Wyznamy równanie stycznej do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 10 = 0$ w punkcie $P = (5, 5)$

Rozwiązanie

Zauważmy, że punkt $P = (5, 5)$ należy do tego okręgu.

Środkiem okręgu jest punkt $C = (1, 3)$. Wyznamy teraz **współczynnik kierunkowy** m prostej CP oraz współczynnik $m_{\perp}$ prostej prostopadłej do prostej CP :

$$m = \frac{y_P - y_C}{x_P - x_C} = \frac{5-3}{5-1} = \frac{1}{2},$$

$$m_{\perp} = -\frac{1}{m} = -2.$$

Teraz możemy już napisać równanie stycznej:

$$y - 5 = -2 \cdot (x - 5)$$

$$y = -2x + 15.$$

Przykład 5

Wyznamy równania wspólnych stycznych do okręgów o równaniach $x^2 + y^2 - 6x = 0$ i $x^2 + y^2 + 2x = 0$.

Rozwiązanie

Dane okręgi mają środki w punktach $C_1 = (3, 0)$ i $C_2 = (-1, 0)$ oraz promienie o długościach odpowiednio $r_1 = 3$ i $r_2 = 1$.

Jeśli prosta o równaniu $ax + by + c = 0$ jest wspólną styczną do tych okręgów, to jej odległość od środka pierwszego okręgu wynosi 3, zaś od drugiego wynosi 1.

Mamy zatem układ:

$$\begin{cases} \frac{|3a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 3 \\ \frac{|-a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 1 \end{cases}$$

stąd:

$$\begin{cases} |3a + c| = 3\sqrt{a^2 + b^2} \\ |-a + c| = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}.$$

Mnożąc obie strony drugiego równania przez 3 i odejmując równanie drugie od równania pierwszego, otrzymujemy:

$$|3a + c| - 3|-a + c| = 0$$

co daje:

$$|3a + c| = 3|-a + c|,$$

czyli

$$3a + c = 3 \cdot (c - a) \text{ lub } 3a + c = -3 \cdot (c - a).$$

Stąd $c = 3a$ lub $c = 0$.

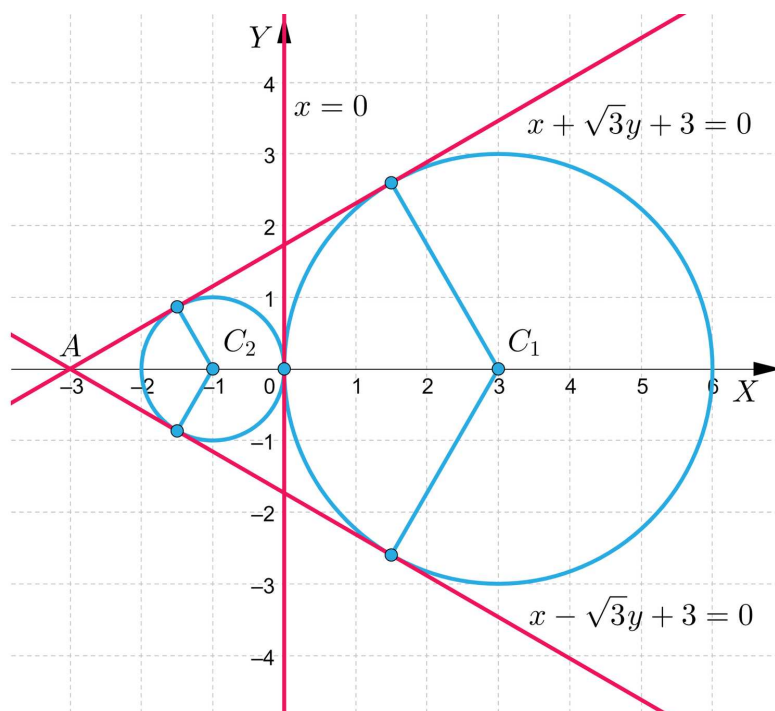
Jeśli $c = 0$, to każde z równań układu redukuje się do równania $|a| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Oznacza to, że $b = 0$, czyli prosta styczna ma równanie $x = 0$.

Jeśli $c = 3a$, to każde z równań układu redukuje się do postaci $|2a| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Oznacza to, że $b = \sqrt{3}a$ lub $b = -\sqrt{3}a$.

Wówczas dla dowolnego $a \neq 0$ otrzymujemy równania dwóch wspólnych stycznych:

$$x + \sqrt{3}y + 3 = 0 \text{ i } x - \sqrt{3}y + 3 = 0,$$

które przecinają się w punkcie $A = (-3, 0)$.



Słownik

odległość punktu od prostej

długość najkrótszego spośród odcinków łączących punkt A z punktami prostej m ;
odcinek ten jest prostopadły do danej prostej

współczynnik kierunkowy prostej

w równaniu kierunkowym prostej $y = ax + b$ współczynnikiem kierunkowym prostej nazywamy liczbę $a \in \mathbb{R}$; wartość tej liczby możemy wyznaczyć z zależności $a = \tan \alpha$ gdzie α jest kątem nachylenia prostej y do osi X

pęk prostych

zbiór wszystkich prostych przechodzących przez ustalony punkt, który nazywamy środkiem pęku

Aplet

Polecenie 1

Otwórz poniższy aplet. Zmieniając odległość środka okręgu od prostej oraz długość promienia okręgu, obserwuj wzajemne położenie prostej i okręgu.

Polecenie 2

Wyznacz wartości parametru k , dla których prosta o równaniu $2x + y + k = 0$ jest styczna do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Uzasadnij, że prosta o równaniu: $y = -x + 5$ nie jest styczna do okręgu o równaniu: $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$.

Ćwiczenie 2



Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi. Która z prostych jest styczna do okręgu o równaniu $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$:

☐ $-x + y - 1 = 0$

☐ $-x - y = 0$

☐ $x - y - 1 = 0$

☐ $x + y - 5 = 0$

Ćwiczenie 3



Zaznacz poprawną odpowiedź. Równanie stycznej do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ i przechodzącej przez punkt $P = (-1, 3)$ ma postać:

☐ $y = -\frac{5}{12}x + \frac{31}{12}$

☐ $y = \frac{5}{12}x + \frac{31}{12}$

☐ $y = \frac{5}{12}x + \frac{31}{12}$

☐ $y = \frac{5}{12}x - \frac{31}{12}$

Ćwiczenie 4



Zaznacz poprawną odpowiedź.

Prosta o równaniu $y = -2x + a$ ma 1 punkt wspólny z okręgiem o równaniu $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$. Wynika stąd, że:

☐ $a \in \{-4, 5\}$

☐ $a \in \{5\}$

☐ $a \in \{4, 5\}$

☐ $a \in \{-5, 5\}$

Ćwiczenie 5



Napisz równanie okręgu o promieniu 3 w postaci $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$, leżącego w czwartej ćwiartce układu współrzędnych, stycznego do osi układu.

Przeciągnij w odpowiednie miejsce poprawne wyrażenie lub liczbę.

$$\boxed{} + \boxed{} - \boxed{} + \boxed{} + \boxed{} =$$

$3x$ x^2 $6y$ $9x$ y^2 6 $9y$ 9 $6x$ 0 $3y$ 3

Ćwiczenie 6



Napisz równanie okręgu w postaci: $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$, stycznego do osi układu współrzędnych, którego środkiem jest punkt $(-5, -5)$.

Przeciągnij w odpowiednie miejsce poprawne wyrażenie, liczbę lub znak.

$$\boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} =$$

10 $+$ x^2 $10x$ $+$ $-$ $5y$ $-$ $+$ $5x$ y^2 25 $10y$ $+$ 5
 0 $-$

Ćwiczenie 7



Które z poniższych prostych są równaniami stycznych do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$ przechodzących przez punkt $P = (2, 3)$.

☐ $y = 2x$

☐ $3y - 4x + 1 = 0$

☐ $3y - 4x - 1 = 0$

☐ $3y + 4x - 1 = 0$

☐ $x = 2$

☐ $y = 3$

Ćwiczenie 8



Zaznacz poprawną odpowiedź. Równanie stycznej do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$, na której leży początek układu współrzędnych, to:

☐ $y = 2x$

☐ $y = \frac{2}{3}x$

☐ $y = \frac{1}{3}x$

☐ $y = -x$

Dla nauczyciela

Autor: Janusz Karkut

Przedmiot: Matematyka

Temat: Styczna do okręgu na płaszczyźnie kartezjańskiej

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Zakres podstawowy. Uczeń:

4) posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) stosuje równanie okręgu w postaci ogólnej.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpatruje przypadki położenia punktu względem okręgu;
- pisze równanie stycznej do okręgu w prostokątnym układzie współrzędnych;
- stosuje poznane metody do rozwiązywania zadań dotyczących geometrii analitycznej.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- metoda tekstu przewodniego;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca całego zespołu.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu;
- projektor multimedialny;
- e-podręcznik;
- arkusze papieru, pisaki.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat lekcji i wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie, metodą burzy mózgów, przypominają sobie równanie okręgu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w parach analizują przykłady 1 i 2 metodą tekstu przewodniego.
2. Uczniowie podczas dyskusji ustalają możliwe położenia punktu względem okręgu.
3. Uczniowie analizują przykłady 3 i 4 metodą tekstu przewodniego.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują wskazane przez nauczyciela ćwiczenia interaktywne z działu „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel omawia ewentualne problemy z rozwiązaniem ćwiczeń interaktywnych.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: „Na dzisiejszych zajęciach nauczyłam/łem się...”.

Praca domowa:

Uczniowie analizują aplet i wykonują polecenie z nim związane.

Materiały pomocnicze:

- [Wzajemne położenie prostej i okręgu](#)
- [Styczna do okręgu](#)

Wskazówki metodyczne:

Aplet może pomóc uczniom w powtórzeniu materiału przed sprawdzianem.