



Sieczna okręgu na płaszczyźnie kartezjańskiej

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Sieczna okręgu na płaszczyźnie kartezjańskiej

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

Cięciwa i średnica to polskie odpowiedniki łacińskich terminów matematycznych, które do polszczyzny wprowadził Jan Śniadecki 1756 – 1830 – polski astronom, matematyk i geograf. Jego podręcznik „*Rachunku algebraicznego teoria Przystosowana do linii krzywych*”, wydany w 1783 roku, był jednym z pierwszych podręczników do nauki matematyki w języku polskim. Jan Śniadecki jest twórcą wielu innych polskich terminów matematycznych.

W tym materiale zajmiemy się sieczną okręgu, która nierozzerwalnie łączy się z terminami wspomnianymi powyżej: z cięciwą i średnicą. Znajomość tych terminów z pewnością przyda Ci się w życiu codziennym, np. do określenia średnicy patelni lub... hula hop.

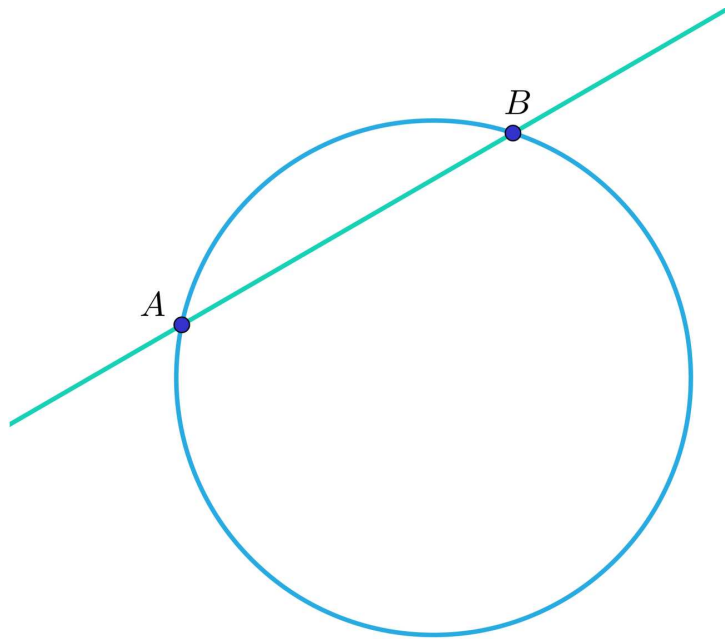
Twoje cele

- Poznasz warunki, jakie musi spełnić prosta, aby była sieczną okręgu.
- Poznasz metody wyznaczania równania siecznej okręgu.
- Obliczysz długość cięciwy, którą okrąg odcina na prostej.

Przeczytaj

Prostą, która ma dwa punkty wspólne z **okręgiem** nazywamy sieczną okręgu.

Odcinek AB siecznej, ograniczony punktami przecięcia z okręgiem, nazywamy **cięciwą** okręgu.



Wzajemne położenie okręgu i prostej na płaszczyźnie można określić badając odległość prostej od środka okręgu.

Jeżeli odległość środka okręgu od prostej jest mniejsza od długości promienia okręgu, to prosta i okrąg mają dwa punkty wspólne. Taką prostą nazywamy wtedy **sieczną okręgu**.

Odległość punktu $A = (x_0, y_0)$ od prostej $Ax + By + C = 0$ opisuje wzór

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

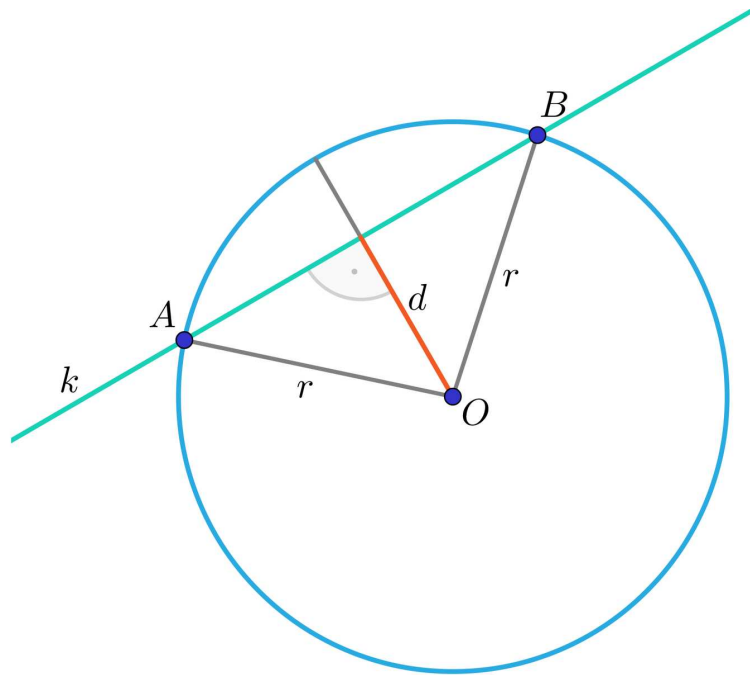
W naszym przypadku, odległość środka okręgu o równaniu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ od prostej $Ax + By + C = 0$ będącej sieczną, jest mniejsza od długości promienia, czyli:

$$d = \frac{|A \cdot a + B \cdot b + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} < r$$

gdzie:

$O = (a, b)$ – środek okręgu,

r – promień okręgu.



Jeżeli odległość środka okręgu od prostej jest równa długości promienia okręgu, to prosta i okrąg mają jeden punkt wspólny. Taką prostą nazywamy wtedy styczną do okręgu. Z kolei jeśli odległość środka okręgu od prostej jest większa od długości promienia okręgu, to okrąg i prosta są rozłączne.

Przykład 1

Określmy wzajemne położenie prostej $3x - y - 1 = 0$ i okręgu $x^2 + y^2 = 9$.

Rozwiązanie:

Równanie $x^2 + y^2 = 9$ przedstawia okrąg o środku $O = (0, 0)$ i promieniu $r = 3$.

Obliczamy odległość d punktu O od prostej o podanym równaniu.

$$A = 3, B = -1, C = -1, x_0 = 0, y_0 = 0, r = 3.$$

Zgodnie ze wzorem $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, mamy zatem

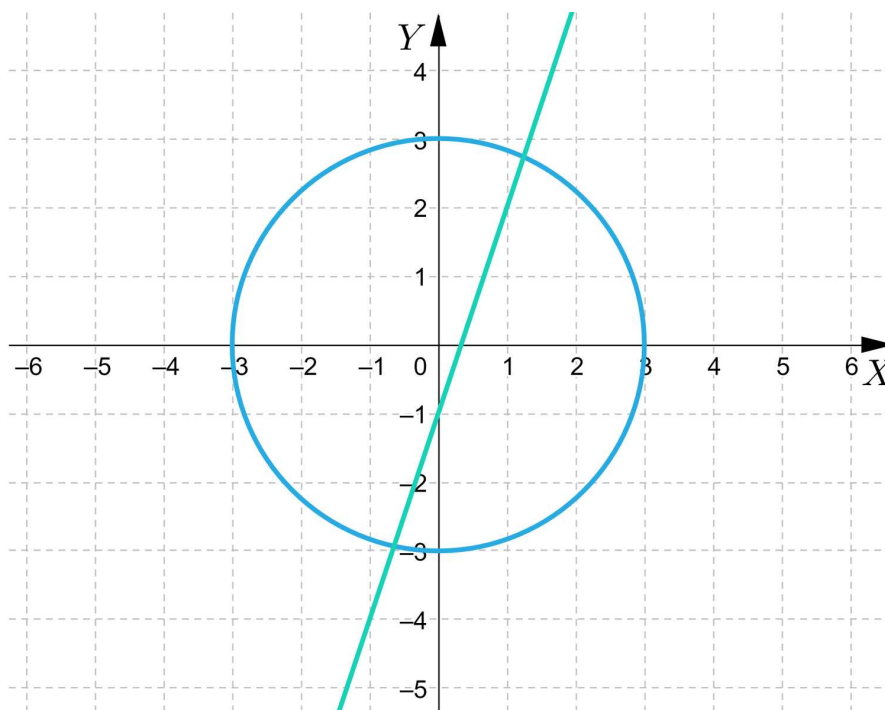
$$d = \frac{|3 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 - 1|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

$$\text{Tak więc } d = \frac{\sqrt{10}}{10} < 3 = r.$$

Rozwiązanie możemy również przedstawić graficznie, umieszczając w układzie współrzędnych okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = 9$ i prostą $3x - y - 1 = 0$.

W układzie współrzędnych rysujemy okrąg o środku $O = (0, 0)$ i promieniu $r = 3$ oraz prostą $3x - y - 1 = 0$. Prosta przedstawiona w postaci kierunkowej $y = 3x - 1$

przecina oś X w punkcie $(\frac{1}{3}, 0)$ (wynika to z rozwiązania równania $0 = 3x - 1$), natomiast oś Y w punkcie $(0, -1)$.



Prosta $3x - y - 1 = 0$ jest zatem sieczną okręgu $x^2 + y^2 = 9$.

Wzajemne położenie prostej $y = mx + n$ i okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ możemy określić poprzez analizę liczby rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} y = mx + n \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \end{cases}$$

Po podstawieniu $y = mx + n$ do drugiego równania, otrzymujemy równanie kwadratowe.

Możliwe są trzy przypadki:

1. $\Delta > 0$ – prosta ma z okręgiem dwa (różne) punkty wspólne – jest **sieczną okręgu**,
2. $\Delta < 0$ – prosta nie ma punktu wspólnego z okręgiem,
3. $\Delta = 0$ – prosta ma z okręgiem jeden punkt wspólny (podwójny), czyli jest styczną do okręgu.

Ważne!

Prosta $y = mx + n$ jest sieczną okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, gdy równanie kwadratowe wynikające z układu równań:

$$\begin{cases} y = mx + n \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \end{cases}$$

ma dwa rozwiązania.

Przykład 2

Sprawdzimy w jakich punktach prosta $x - y + 1 = 0$ przecina okrąg o równaniu $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$.

Rozwiązanie:

Prostą o równaniu $x - y + 1 = 0$ zapisujemy w postaci kierunkowej $y = x + 1$.

Aby znaleźć punkty wspólne prostej i okręgu, rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0 \end{cases}$$

Podstawiamy $y = x + 1$ do równania $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ i otrzymujemy

$$x^2 + (x + 1)^2 + 2x - 4 \cdot (x + 1) - 4 = 0,$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 + 2x - 4x - 4 - 4 = 0,$$

$$2x^2 - 7 = 0.$$

Równanie $2x^2 - 7 = 0$ ma dwa rozwiązania: $x_1 = \sqrt{\frac{7}{2}}$ i $x_2 = -\sqrt{\frac{7}{2}}$.

Ponieważ $y = x + 1$, stąd $y_1 = \sqrt{\frac{7}{2}} + 1$ i $y_2 = -\sqrt{\frac{7}{2}} + 1$.

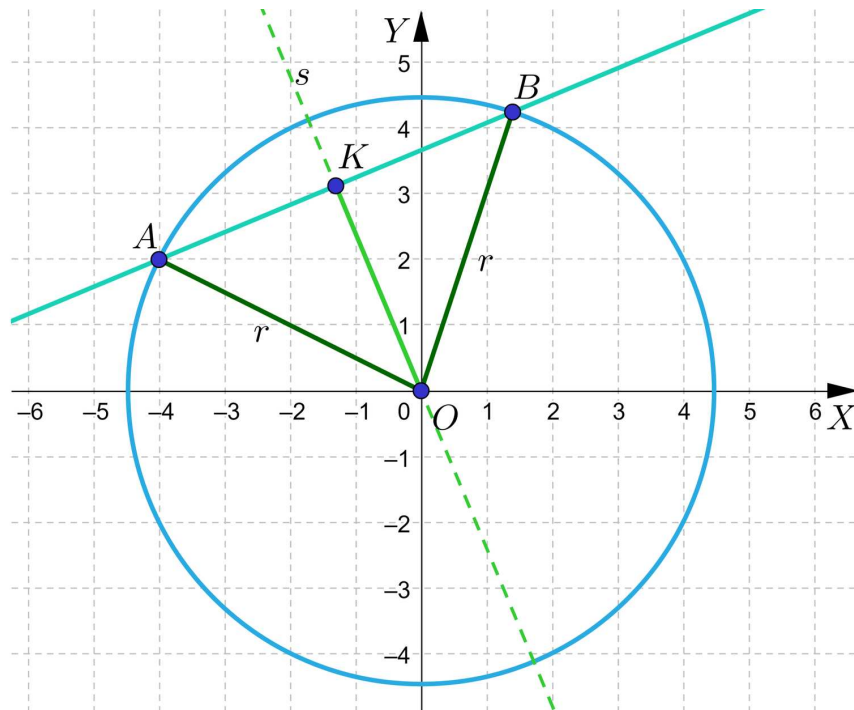
Punkty $\left(\sqrt{\frac{7}{2}}, \sqrt{\frac{7}{2}} + 1\right)$ i $\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}, -\sqrt{\frac{7}{2}} + 1\right)$ są punktami przecięcia siecznej $x - y + 1 = 0$ z okręgiem $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$.

Przykład 3

Obliczymy długość cięciwy, którą okrąg $x^2 + y^2 = 20$ odcina na prostej $5x - 12y + 44 = 0$.

Rozwiązanie:

Sporządźmy poglądowy rysunek.



Prosta $5x - 12y + 44 = 0$ przecina okrąg w punktach A i B . Długość odcinka AB jest długością cięciwy.

Symetralna s cięciwy AB jest do niej prostopadła, przechodzi przez punkt O i dzieli cięciwę na dwie części o równej długości. Utworzony trójkąt OKB jest prostokątny.

Obliczając odległość prostej $5x - 12y + 44 = 0$ od środka okręgu $x^2 + y^2 = 20$, wyznaczmy długość odcinka KO .

Równanie $x^2 + y^2 = 20$ przedstawia okrąg o środku $O = (0, 0)$ i promieniu $r = \sqrt{20}$.

Obliczamy odległość d punktu O od prostej o równaniu $5x - 12y + 44 = 0$.

$A = 5, B = -12, C = 44, x_0 = 0, y_0 = 0$.

Ze wzoru $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, mamy zatem $d = \frac{|5 \cdot 0 + (-12) \cdot 0 + 44|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} = \frac{|44|}{\sqrt{169}} = \frac{44}{13}$.

Punkt K jest środkiem odcinka AB , oznaczmy $|AK| = |KB| = x$.

Ponieważ $|OB| = r, |KO| = d, |KB| = x$, to z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego OKB możemy zapisać: $d^2 + x^2 = r^2$.

Po podstawieniu $r = \sqrt{20}, d = \frac{44}{13}$, otrzymujemy równanie $\left(\frac{44}{13}\right)^2 + x^2 = (\sqrt{20})^2$, z którego wyznaczymy x .

$x^2 = 20 - \frac{1936}{169} = \frac{3380 - 1936}{169} = \frac{1444}{169}$, stąd $x = \frac{38}{13}$.

Ponieważ $|AK| = |KB| = x$ i K jest środkiem odcinka AB , więc
 $|AB| = 2x = 2 \cdot \frac{38}{13} = \frac{76}{13}$.

Długość cięciwy, którą okrąg $x^2 + y^2 = 20$ odcina na prostej $5x - 12y + 44 = 0$, wynosi $\frac{76}{13}$.

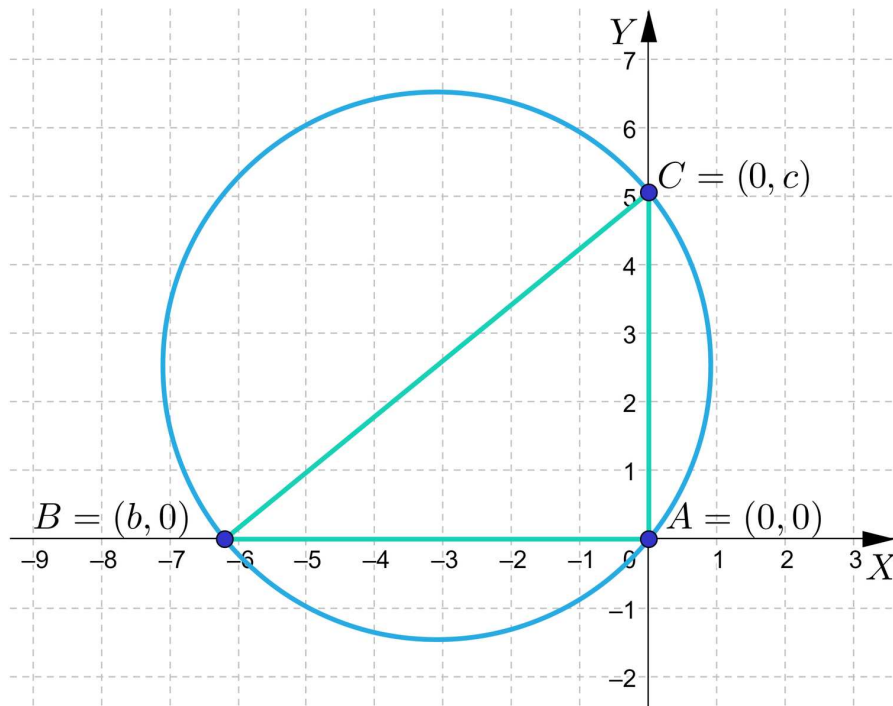
Przykład 4

Z punktu A okręgu poprowadzono dwie prostopadłe cięciwy: AB i AC . Udowodnij, że BC jest średnicą tego okręgu.

Rozwiązanie:

Umieszczamy punkt A w początku układu współrzędnych. Ponieważ cięciwy AB i AC są do siebie prostopadłe, to jeśli punkt B umieścimy na osi X , punkt C znajdzie się na osi Y .

$A = (0, 0)$, $B = (b, 0)$, $C = (0, c)$.



Niech K będzie środkiem odcinka BC , wtedy $K = (\frac{b}{2}, \frac{c}{2})$. Obliczamy długości odcinków KB , KC i KA :

$$|KB|^2 = (b - \frac{b}{2})^2 + (0 - \frac{c}{2})^2 = (\frac{b}{2})^2 + (\frac{-c}{2})^2 = (\frac{b}{2})^2 + (\frac{c}{2})^2,$$

$$|KC|^2 = (0 - \frac{b}{2})^2 + (c - \frac{c}{2})^2 = (\frac{-b}{2})^2 + (\frac{c}{2})^2 = (\frac{b}{2})^2 + (\frac{c}{2})^2,$$

$$|KA|^2 = (0 - \frac{b}{2})^2 + (0 - \frac{c}{2})^2 = (\frac{-b}{2})^2 + (\frac{-c}{2})^2 = (\frac{b}{2})^2 + (\frac{c}{2})^2.$$

Zatem $|KB| = |KC| = |KA|$, czyli punkty A, B, C są tak samo odległe od punktu K .
W związku z tym, K jest środkiem okręgu przechodzącego przez punkty A, B, C .
W związku z powyższym, BC jest średnicą danego okręgu.

Zauważmy, że mogliśmy również skorzystać z faktu, że kąt BAC jest kątem prostym oraz że kąt środkowy jest dwa razy większy od kąta wpisanego opartego na tym samym łuku.

Słownik

okrąg o środku O i promieniu r

zbiór wszystkich punktów P płaszczyzny, których odległość od punktu O jest równa r

sieczna okręgu

prosta, która ma dokładnie dwa punkty wspólne z okręgiem

cięciwa okręgu

odcinek siecznej ograniczony jej punktami przecięcia z okręgiem

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją prezentującą równania siecznych okręgu, a następnie rozwiąż zadania i porównaj z odpowiedziami.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DdkqSMHGH>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego siecznej okręgu na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Polecenie 2

Podaj punkty przecięcia prostej o równaniu $y = -2x + 2$ z okręgiem $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 12 = 0$.

Polecenie 3

Podaj równanie okręgu o środku w punkcie $O = (1, 1)$, który odcina na prostej $3x - 4y - 29 = 0$ cięciwę o długości równej 16.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Katarzyna Podfigurna

Przedmiot: Matematyka

Temat: Sieczna okręgu na płaszczyźnie kartezjańskiej

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa.

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje;

2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej i ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostopadłość do innej prostej, styczność do okręgu);

3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych;

4) posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$;

5) oblicza odległość punktu od prostej;

6) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu oraz prostej i paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji

- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- znajduje punkty wspólne prostej i okręgu
- wyznacza równanie siecznej okręgu spełniającej dane warunki
- oblicza długość cięciwy
- planuje czynności mające doprowadzić do wyznaczenia siecznej okręgu
- kształci umiejętność stosowania metod geometrii analitycznej
- z zaangażowaniem rozwiązuje zadania posługując się poznanymi twierdzeniami i definicjami
- analizuje zadania oraz dokonuje wyboru najefektywniejszej metody prowadzącej do ich rozwiązania

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem animacji i ćwiczeń interaktywnych
- pokaz multimedialny
- grupy zadaniowe
- rozwiązywanie zadań pod kontrolą nauczyciela

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu
- tablica interaktywna/rzutnik multimedialny
- e-podręcznik

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie przypominają równanie okręgu.
2. Uczniowie określają ile punktów wspólnych może mieć prosta z okręgiem – wykonują odpowiednie rysunki na tablicy.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na grupy 4-osobowe.
2. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z wybranymi przez nauczyciela przykładami z sekcji „Przeczytaj”.
3. Uczniowie w grupach analizują przykłady.
4. Nauczyciel prezentuje animację.
5. Na podstawie animacji i przykładów z sekcji „Przeczytaj” uczniowie w grupach rozwiązują zadania przygotowane przez nauczyciela.
6. Przed rozpoczęciem pracy w grupach, uczniowie odpowiadają na pytania: „Jak można sprawdzić wzajemne położenie prostej i okręgu mając dane równania prostej i okręgu”, „Jak wyznaczyć punkty wspólne prostej i okręgu”.
7. Uczniowie w grupach rozwiązują zadania przydzielone przez nauczyciela.
8. Nauczyciel kontroluje pracę uczniów, udziela im wskazówek, wyjaśnia wątpliwości.
9. Reprezentanci poszczególnych grup podają rozwiązania przydzielonych przez nauczyciela zadań.
10. Na forum całej klasy, uczniowie przedyskutowują rozwiązania, dzielą się wątpliwościami a nauczyciel udziela wyjaśnień.
11. Nauczyciel prosi uczniów o rozwiązanie wskazanych ćwiczeń interaktywnych.
12. Uczniowie indywidualnie rozwiązują wskazane przez nauczyciela ćwiczenia interaktywne.

Faza podsumowująca:

1. Chętni uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych.
2. Uczniowie formułują wnioski do zapamiętania.
3. Uczniowie określają co było dla nich trudne lub niezrozumiałe a nauczyciel udziela wyjaśnień.
4. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia aktywność uczniów.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych, które nie zostały rozwiązane na lekcji.

Materiały pomocnicze:

- [Wzajemne położenie prostej i okręgu](#)

- Wzajemne położenie prostej i okręgu

Wskazówki metodyczne:

Animacja może być inspiracją do przygotowania wypowiedzi na temat wykorzystania wzoru na odległość punktu od prostej.