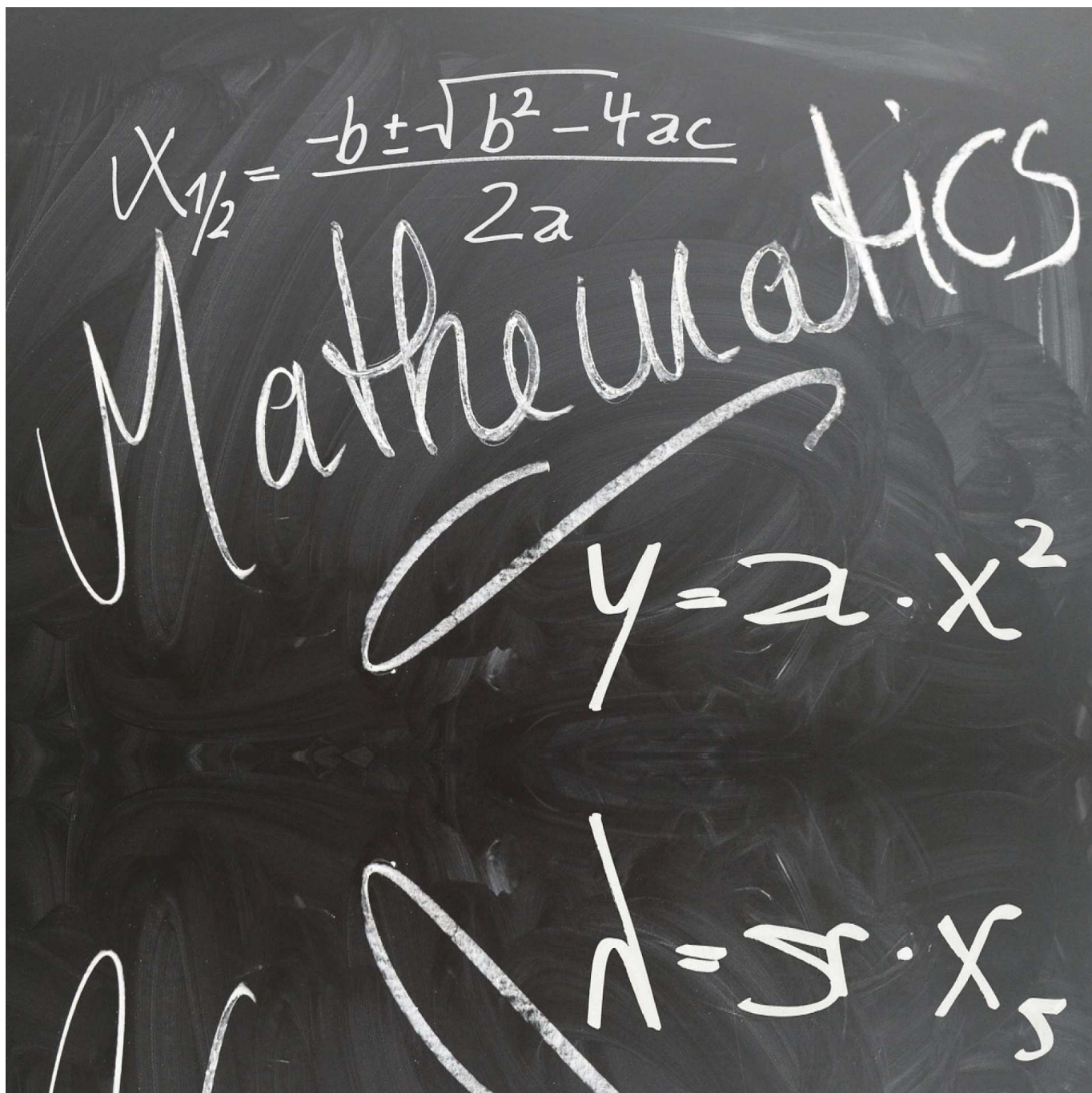
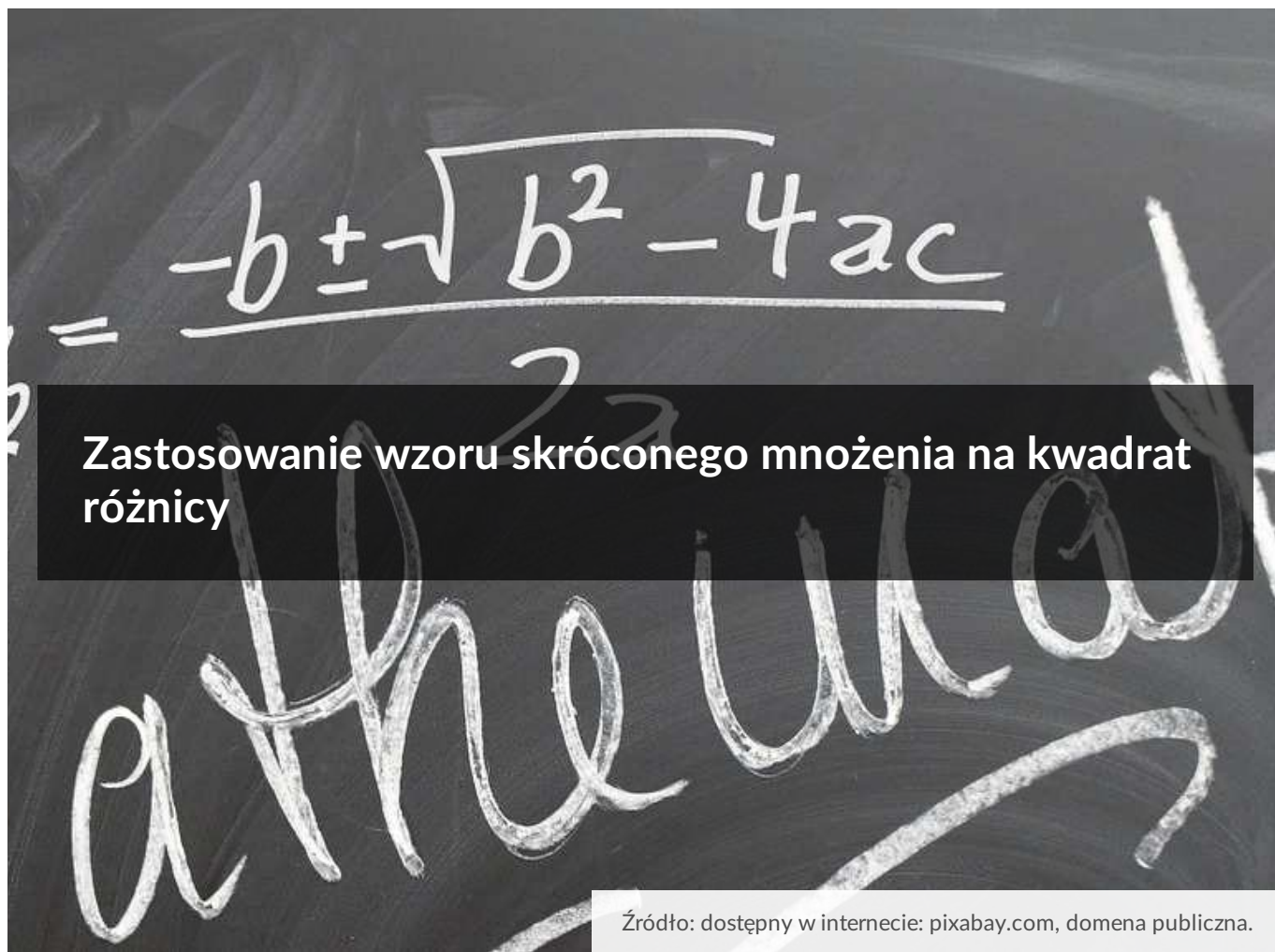




Zastosowanie wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Gra edukacyjna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Zastosowanie wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

W tym materiale poznamy zastosowania wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy. Pokażemy wykorzystanie wzoru w obliczeniach arytmetycznych, przekształcaniu wyrażeń algebraicznych, dowodzeniu twierdzeń, rozkładzie sum algebraicznych na czynniki.

Umiejętność dostrzegania i wykorzystania wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy ułatwia wykonywanie obliczeń algebraicznych, pozwala na uniknięcie błędów, które mogą powstać w wyniku redukcji wyrazów podobnych, w przypadku mnożenia odpowiednich sum algebraicznych.

Twoje cele

- Zastosujesz wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy w obliczeniach arytmetycznych.
- Zastosujesz wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy w przekształceniach algebraicznych.

Przeczytaj

Znasz już niektóre zastosowania wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń.

Teraz utrwalisz oraz rozwiniesz zdobyte wcześniej umiejętności i poznasz jeszcze inne zastosowania tego wzoru.

Obliczenia arytmetyczne

Wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń można wykorzystać do szybkiego obliczenia kwadratów niektórych liczb.

Przykład 1

Aby obliczyć kwadraty liczb 37, 98, 2992, zapisujemy każdą z nich w postaci różnicy pełnych dziesiątek, setek lub tysięcy oraz liczby jednocyfrowej i korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia.

$$37^2 = (40 - 3)^2 = 40^2 - 240 + 9 = 1609 - 240 = 1369$$

$$98^2 = (100 - 2)^2 = 100^2 - 400 + 4 = 10004 - 400 = 9604$$

$$\begin{aligned} 2992^2 &= (3000 - 8)^2 = 3000^2 - 16 \cdot 3000 + 8^2 = \\ &= 9000000 - 48000 + 64 = 8952064 \end{aligned}$$

Przykład 2

W podobny sposób jak w powyższym przykładzie, obliczymy kwadraty liczb mieszanych $4\frac{7}{8}$, $5\frac{1}{4}$.

$$\left(4\frac{7}{8}\right)^2 = \left(5 - \frac{1}{8}\right)^2 = 5^2 - \frac{10}{8} + \left(\frac{1}{8}\right)^2 = 25 - 1\frac{1}{4} + \frac{1}{64} = 23\frac{49}{64}$$

$$\left(5\frac{1}{4}\right)^2 = \left(6 - \frac{3}{4}\right)^2 = 6^2 - 9 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 36 - 9 + \frac{9}{16} = 27\frac{9}{16}$$

Przykład 3

Wykażemy, że liczba $K = \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} - \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}$ jest liczbą całkowitą.

Przedstawiamy liczby $11 - 6\sqrt{2}$ i $6 - 4\sqrt{2}$ jako kwadraty liczb rzeczywistych i korzystamy z równości $\sqrt{x^2} = |x|$.

$$11 - 6\sqrt{2} = 9 - 6\sqrt{2} + 2 = (3 - \sqrt{2})^2$$

$$6 - 4\sqrt{2} = 4 - 4\sqrt{2} + 2 = (2 - \sqrt{2})^2$$

Stąd:

$$\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = \sqrt{(3 - \sqrt{2})^2} = |3 - \sqrt{2}|$$

$$\sqrt{6 - 4\sqrt{2}} = \sqrt{(2 - \sqrt{2})^2} = |2 - \sqrt{2}|$$

Zapisujemy wyrażenie określające liczbę K w prostszej postaci.

$$K = \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} - \sqrt{6 - 4\sqrt{2}} = 3 - \sqrt{2} - 2 + \sqrt{2} = 1$$

Liczba 1 jest liczbą całkowitą, zatem liczba K jest liczbą całkowitą, co należało wykazać.

Przekształcenia algebraiczne

Wzór $(a - b)^2$ zastosujemy teraz do rozkładu na czynniki sumy algebraicznej w równaniu. Ułatwi to znacznie rozwiązanie równania.

Przykład 4

Rozwiążemy równanie $x^2 - 10x + 25 = 0$.

Lewą stronę równania zapisujemy w postaci kwadratu dwumianu.

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

$$(x - 5)^2 = 0$$

Stąd:

$$x - 5 = 0$$

$$x = 5$$

Rozwiązaniem równania jest liczba 5.

Przykład 5

Rozwiążemy równanie.

$$4x^2 - 4x + 5 = 0$$

Przekształcamy lewą stronę równania i korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia.

$$4x^2 - 4x + 1 + 4 = 0$$

$$(2x - 1)^2 = -4$$

Lewa strona równania jest nieujemna (jako kwadrat wyrażenia), a prawa ujemna – otrzymujemy sprzeczność. Równanie nie ma rozwiązania.

Wzór $(a - b)^2$ jest często przydatny w skracaniu wyrażeń wymiernych.

Przykład 6

Zapiszemy w najprostszej postaci wyrażenie $K = \frac{18x^2+8y^2-24xy}{6y-9x}$, gdy $2y \neq 3x$.

Wyłączyliśmy wspólny czynnik w liczniku i mianowniku wyrażenia.

$$K = \frac{18x^2+8y^2-24xy}{6y-9x} = \frac{2(9x^2+4y^2-12xy)}{3(2y-3x)}$$

W liczniku sumę algebraiczną zapisujemy w postaci kwadratu dwumianu.

$$K = \frac{2(3x-2y)^2}{3(3x-2y)}$$

Skracamy.

$$K = \frac{2(3x-2y)}{3}$$

Dowodzenie twierdzeń

Aby wykorzystać [wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy](#) w dowodzeniu twierdzeń, trzeba najpierw dokładnie przeanalizować założenie oraz tezę twierdzenia. O zastosowaniu wzoru najczęściej wnioskujemy na podstawie zapisanych w treści twierdzenia wyrażeń algebraicznych.

Przykład 7

Uzasadnimy, że jeśli x, y są liczbami dodatnimi takimi, że $x > y$, $x - y = 4$ i $x^2 + y^2 = 26$ to $x \cdot y = 5$. Wartość iloczynu $x \cdot y$ znajdziemy, przekształcając odpowiednio [wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy](#) liczb x i y .

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Do wzoru podstawiamy: za $x - y$ liczbę 4, za $x^2 + y^2$ liczbę 26.

$$4^2 = -2xy + 26$$

Stąd:

$$2xy = 10$$

$$xy = 5$$

Zatem $xy = 5$, co należało udowodnić.

Przykład 8

Wykażemy, że jeśli a jest liczbą naturalną dodatnią, to liczba $M = \frac{a^4}{4} - \frac{a^3}{2} + \frac{a^2}{4}$ jest kwadratem pewnej liczby rzeczywistej.

Sprowadzamy ułamki występujące w wyrażeniu do wspólnego mianownika i zapisujemy na wspólnej kresce ułamkowej.

$$M = \frac{a^4}{4} - \frac{a^3}{2} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^4 - 2a^3 + a^2}{4}$$

W liczniku otrzymanego ułamka wyłączamy wspólny czynnik przed nawias i zapisujemy sumę w postaci iloczynu, wykorzystując odpowiedni wzór skróconego mnożenia.

$$M = \frac{a^4 - 2a^3 + a^2}{4} = \frac{a^2}{4} (a^2 - 2a + 1) = \frac{a^2}{4} (a - 1)^2$$

Otrzymane wyrażenie zapisujemy w postaci kwadratu pewnej liczby.

$$M = \left[\frac{a(a-1)}{2} \right]^2$$

Wykazaliśmy, że liczba M jest kwadratem liczby $\frac{a(a-1)}{2}$.

Słownik

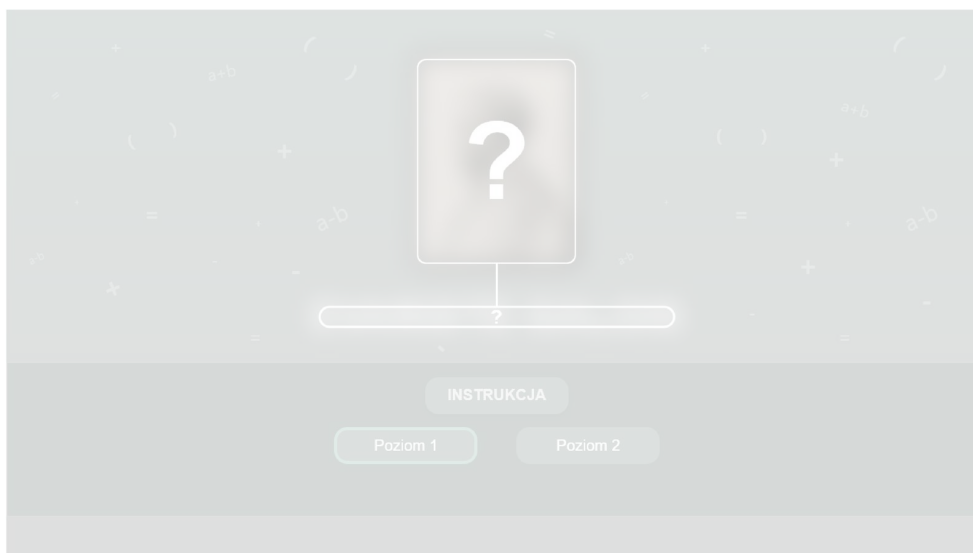
wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy

kwadrat różnicy dwóch wyrażeń jest równy sumie kwadratów tych wyrażeń minus podwojony iloczyn pierwszego wyrażenia przez drugie

Gra edukacyjna

Polecenie 1

Rozwiąż zadania. Odczytaj hasło – imię i nazwisko szesnastowiecznego włoskiego matematyka, który stosował algebrę do rozwiązywania problemów z różnych dziedzin wiedzy.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DN1PPnjRL>

Polecenie 2

Zapisz w prostszej postaci wyrażenie $\sqrt{x^2 + 9} - 6x + \sqrt{16 + x^2} - 8x + 2x$ dla $x \in (-\infty, -1)$.

Polecenie 3

Oblicz, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy $99^2 - 98^2$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dana jest liczba $A = \frac{\sqrt{86-18\sqrt{5}}}{2} + 0,5\sqrt{5}$. Zaznacz Prawda jeśli zdanie jest prawdziwe lub Fałsz jeśli zdanie jest fałszywe.

	Prawda	Fałsz
Liczba A jest niewymierna	☐	☐
Liczba A jest całkowita dodatnia	☐	☐
Liczba A jest całkowita ujemna	☐	☐
Liczba A jest ułamkiem właściwym	☐	☐
Liczba A jest naturalna	☐	☐

Ćwiczenie 2



Uzupełnij obliczenia, przeciągając odpowiednie liczby.

$$29^2 = (\boxed{} - 1)^2 = 30^2 - \boxed{} + 1 = 900 - \boxed{} = \boxed{}$$

841

59

30

60

Ćwiczenie 3



Wyrażenie $(x - 1)(x - 1)(x - 1)$ po uproszczeniu ma postać:

☐ $x^3 - 3x^2 + x - 1$

☐ $x^3 + 3x^2 - x + 1$

☐ $x^3 + 3x^2 - 3x - 1$

☐ $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

Ćwiczenie 4



Wskaż liczby, które nie są rozwiązaniem równania $12x^2 - 12x + 3 = 0$.

☐ $-\sqrt{3}$

☐ 1

☐ -2

☐ 0,5

Ćwiczenie 5



Pole kwadratu o boku długości $3\sqrt{5} - 5$ jest równe:

☐ $25 - 9\sqrt{5}$

☐ $10(-3\sqrt{5} + 7)$

☐ $2(25 - 3\sqrt{5})$

☐ 20

Ćwiczenie 6



Po uproszczeniu wyrażenie $\frac{4x^2 - 20xy + 25y^2}{(2x - 5y)(x - 2)} \cdot (5x^2 + 20 - 20x)$ ma postać:

☐ $5x - 10$

☐ $x - 2$

☐ $(x - 2)(2x - 5y)$

☐ $(5x - 10)(2x - 5y)$

Ćwiczenie 7



Wykaż, że wyrażenie $2x^2 - 28x + 100$ dla każdej liczby rzeczywistej x przyjmuje wartość dodatnią.

Ćwiczenie 8



Wiadomo, że $x \cdot y = 10$ i $x^2 + y^2 = 29$. Wyznacz $x - y$.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zastosowanie wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne.

Uczeń:

1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$, $(a + b)^3$, $(a - b)^3$, $a^3 - b^3$, $a^n - b^n$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy w obliczeniach arytmetycznych
- stosuje wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy w przekształceniach algebraicznych
- analizuje problemy algebraiczne i dobiera dogodną dla siebie strategię ich rozwiązania

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów
- stoliki zadaniowe

- gra dydaktyczna

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda grupa miała do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi, aby uczniowie przed lekcją przypomnieli sobie poznane wzory skróconego mnożenia.
2. Uczniowie mają też za zadanie zastanowienie się nad możliwościami wykorzystania wzoru na kwadrat różnicy w dowodzeniu twierdzeń.

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają najważniejsze wiadomości dotyczące wyrażeń algebraicznych, a w szczególności wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy.
2. Następnie rozwiązują wspólnie kilka przykładów, podanych przez nauczyciela, zamiany kwadratu dwumianu na sumę algebraiczną.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą stolików zadaniowych. Na stolikach znajdują się przykłady rozwiązanych zadań pokazujących zastosowanie wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy.

Na pierwszym stoliku zastosowanie wzoru w obliczeniach arytmetycznych, na drugim do przekształcania wzorów, na trzecim do dowodzenia twierdzeń (materiał taki, jak w sekcji „Przeczytaj”).

Każda grupa próbuje najpierw samodzielnie wykonać zadanie, a następnie porównuje z przedstawionym rozwiązaniem.

2. Uczniowie w grupach rozwiązują zaproponowane ćwiczenia interaktywne i problemy z gry edukacyjnej.

Faza podsumowująca:

1. Liderzy omawiają pracę swoich grup, zwracają uwagę na zadania, które sprawiały problem. Nauczyciel wyjaśnia wątpliwości, dzieli się swoimi obserwacjami.
2. Grupy oceniają swoją pracę, wskazując swoje mocne i słabe strony.

Praca domowa:

Uczniowie w domu mają za zadanie poszukania jeszcze innych przykładów zastosowania wzoru na kwadrat różnicy.

Materiały pomocnicze:

- [Działania na wyrażeniach algebraicznych - przykłady](#)
- [Działania na wyrażeniach algebraicznych - zadania](#)

Wskazówki metodyczne:

Uczniowie mogą w parach lub indywidualnie rozwiązywać problemy z gry edukacyjnej.