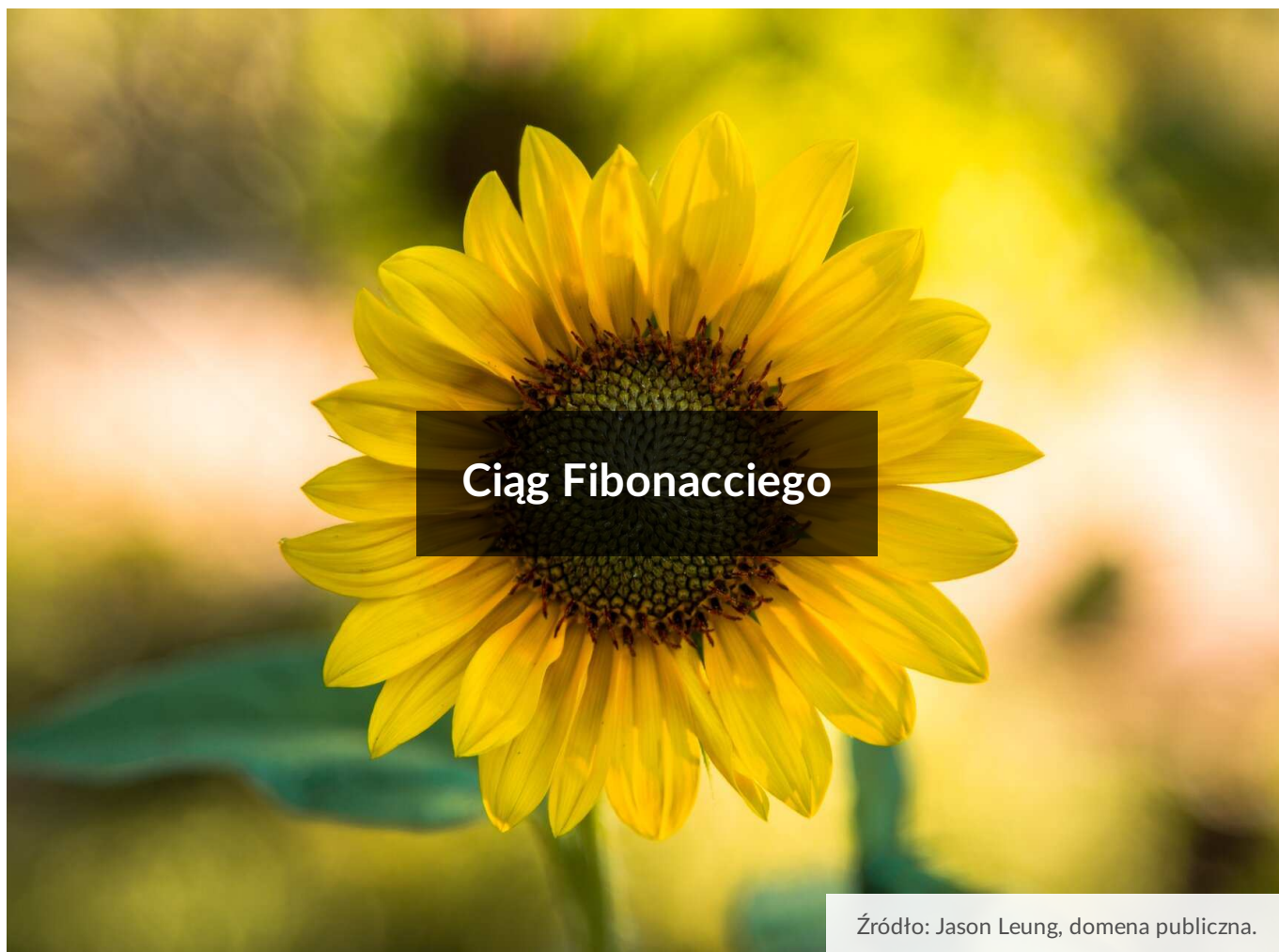




## Ciąg Fibonacciego

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Źródło: Jason Leung, domena publiczna.

Z ciągiem Fibonacciego, przedstawionym na początku XIII w. przez włoskiego matematyka Leonarda z Pizy, możemy spotkać się w wielu dziedzinach życia – nie tylko w informatyce. Podobieństwa i odniesienia do liczb Fibonacciego zaobserwowano m.in. w muzyce, biologii i literaturze.

O tym, jak zagadnienie rekurencji wyjaśnia matematyka, przeczytasz w e-materiałach:

- Ciąg określony rekurencyjnie,
- Ciąg geometryczny określony rekurencyjnie,
- Wzór ogólny ciągu określonego rekurencyjnie,
- Ciąg arytmetyczny określony wzorem rekurencyjnym.

Implementację algorytmów wykorzystujących ciąg Fibonacciego w wybranych językach programowania znajdziesz w e-materiałach:

- Ciąg Fibonacciego w języku C++,
- Ciąg Fibonacciego w języku Java,
- Ciąg Fibonacciego w języku Python.

Więcej zadań? Przejdź do e-materiału [Ciąg Fibonacciego – zadania maturalne](#).

**Twoje cele**

- Wyjaśnisz, jak się definiuje ciąg Fibonacciego i jakie ma on właściwości.
- Przeanalizujesz zapisany za pomocą pseudokodu algorytm wyznaczania elementu ciągu Fibonacciego.
- Wskażesz ciągi Fibonacciego w otaczającym nas świecie.

# Przeczytaj

---

## Przypomnienie wiadomości

Nim dowiemy się, jak zdefiniować ciąg Fibonacciego, przypomnijmy sobie, na czym polega rekurencja. Mamy z nią do czynienia, gdy funkcja wywołuje samą siebie w celu rozwiązania konkretnego problemu.

Ciąg Fibonacciego jest ciągiem liczb naturalnych. Jego pierwszy wyraz ma wartość 0, drugi 1, a każdy kolejny jest sumą dwóch poprzednich wyrazów ciągu.

Definicja ciągu Fibonacciego ma następującą postać:

$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 0 \\ 1 & \text{dla } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{dla } n > 1 \end{cases}$$

### Przykład 1

Obliczmy wyraz ciągu Fibonacciego o indeksie 5.

$$F_5 = F_4 + F_3$$

$$F_4 = F_3 + F_2$$

$$F_3 = F_2 + F_1$$

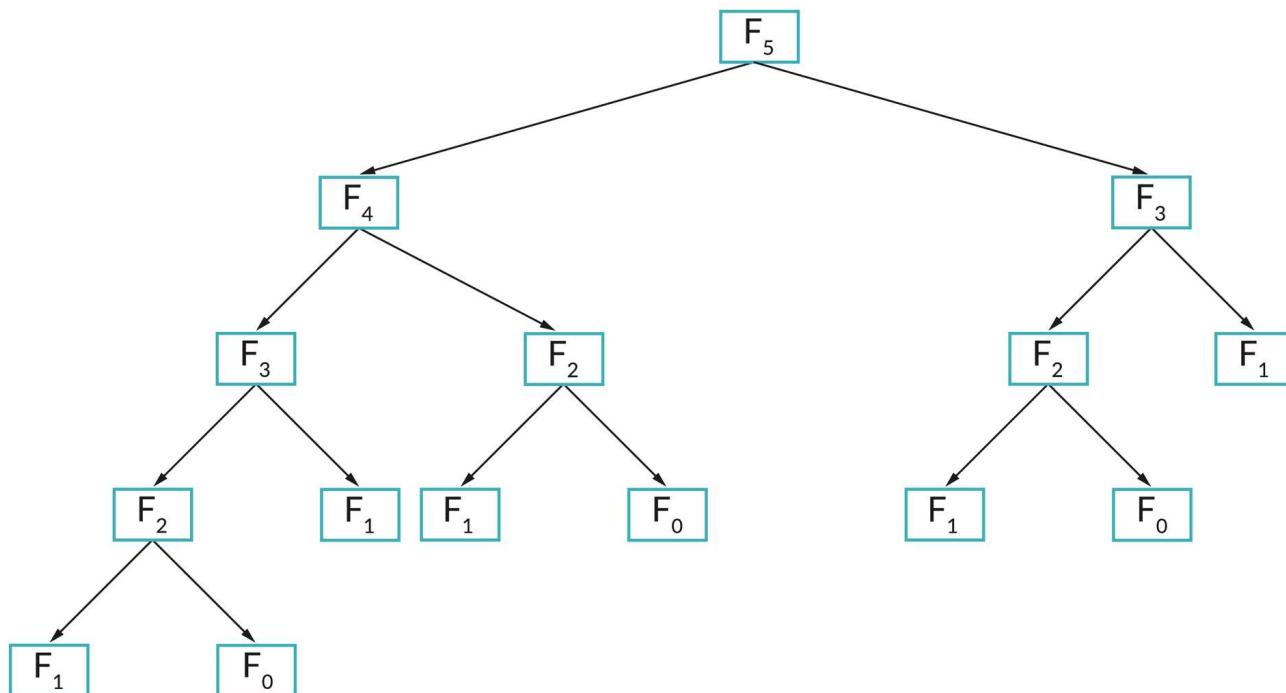
$$F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$$

$$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$$

$$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$$

$$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$$

Przedstawione wywołania funkcji rekurencyjnej można zobrazować przy użyciu drzewa wywołań rekurencyjnych:



Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Jakie są wartości kilkunastu początkowych wyrazów ciągu Fibonacciego? Są nimi liczby: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233...

## Postać rekurencyjna

Zapisany niżej algorytm opiera się na przedstawionej wcześniej definicji wyrazów ciągu Fibonacciego. Odpowiedni pseudokod wygląda następująco:

```

1 funkcja fibonacci(n)
2   jeżeli n == 0 wykonaj:
3     zwróć 0
4   w przeciwnym razie jeżeli n == 1 wykonaj:
5     zwróć 1
6   w przeciwnym razie wykonaj:
7     zwróć fibonacci(n - 1) + fibonacci(n - 2)
  
```

Rekurencyjny algorytm przedstawiony powyżej jest prosty. Niestety, program napisany z jego wykorzystaniem okazuje się mało wydajny: działa bardzo wolno i nadaje się jedynie do obliczania kilku pierwszych wyrazów ciągu. Wynika to z faktu, że w celu wyznaczenia wybranego elementu ciągu wielokrotnie są obliczane te same, poprzedzające go wartości. W rezultacie złożoność czasowa algorytmu jest wykładnicza. Tym samym czas działania programu będzie znacznie dłuższy dla coraz dalszych wyrazów. Istnieje ponadto ryzyko wystąpienia błędu [przepełnienia pamięci](#) z powodu zbyt dużej liczby wywołań funkcji rekurencyjnej. W związku z tym należy stosować wersję iteracyjną algorytmu,

pozwalającego wyliczyć kolejne wyrazy ciągu Fibonacciego. Przedstawimy go w kolejnej sekcji materiału.

## Co to jest złota liczba?

Elementy ciągu Fibonacciego mają ciekawą cechę. Ilorazy dwóch kolejnych wyrazów są w przybliżeniu równe 1,618. Jest to tym bardziej widoczne, im większe liczby dzielimy przez siebie: wraz ze zbliżaniem się do nieskończoności uzyskujemy lepsze przybliżenie wartości 1,618. Liczbę tę nazywamy „złotą proporcją” lub „złotą liczbą”.

## Liczby Fibonacciego wokół nas

Liczba płatków kwiatu jest przeważnie liczbą Fibonacciego. Podobnie jest z ulistnieniem i właśnie dlatego tak trudno jest znaleźć czterolistną koniczynę. W normalnych warunkach, gdy nie zachodzi żadna hodowla, kwiaty mają: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, a niektóre gatunki nawet po 34 płatki lub więcej, np. stokrotka.

Liczby Fibonacciego odnajdziemy także, przyglądając się niektórym proporcjom ludzkiego ciała. W proporcjach ciała harmonijnie rozwiniętego człowieka znajdziemy złotą proporcję. Co prawda, nie zawsze są one idealnie i dokładnie zachowane, ale są na pewno bardzo zbliżone.

Złotą liczbę otrzymasz m.in. z następujących stosunków:

- odległość od pępka do czubka głowy do odległości od ramion do czubka głowy;
- odległość od ramion do czubka głowy do odległości od brody do czubka głowy;
- wysokość twarzy do jej szerokości;
- odległość od kolana do pępka do odległości od kolana do stopy;
- odległość od koniuszków palców do łokcia do odległości od nadgarstka do łokcia;
- dzieląc wzrost człowieka przez odległość od stóp do pępka.

Ciąg Fibonacciego można również odnaleźć w muzyce. Wiele utworów, zarówno współczesnych, jak i tych starszych, jest opartych na kanonie Pachelbela. Nuty tego utworu są zapisane na podstawie ciągu Fibonacciego.

Przedstawiliśmy tylko kilka spośród wielu przypadków, w których da się zauważyć liczby Fibonacciego w otaczającym nas świecie. Napotkamy je też w literaturze, sztuce, ekonomii, architekturze czy religii.

## Słownik

przepiętnie pamięci

błąd polegający na przekroczeniu rozmiaru miejsca zarezerwowanego dla programu w pamięci komputera

**rekurencja**

technika programowania, w której funkcja wywołuje samą siebie, aż do napotkania przypadku podstawowego

**złożoność czasowa**

miara czasu działania algorytmu, wyrażona jako funkcja ilości danych

**złożoność pamięciowa**

miara zajętości pamięci wykorzystywanej przez algorytm, wyrażona jako funkcja ilości danych

# Animacja

---

## Problem 1

Napisz za pomocą pseudokodu algorytm wyznaczający metodą iteracyjną wyraz ciągu Fibonacciego o indeksie równym  $n$ .

### Specyfikacja problemu:

*Dane:*

- $n$  – liczba naturalna

*Wynik:*

Program oblicza wyraz ciągu Fibonacciego o indeksie równym  $n$ .

## Polecenie 1

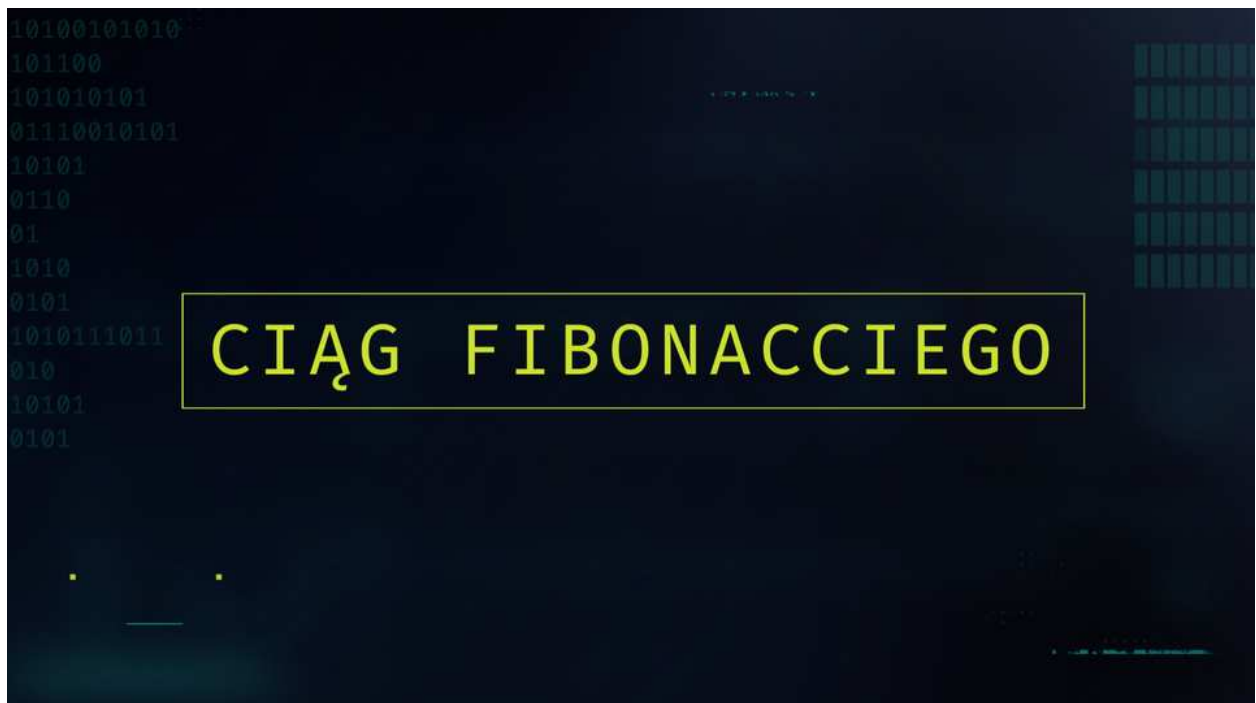
Porównaj swoje rozwiązanie z prezentacją.

Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

## Polecenie 2

Zapoznaj się z animacją. Poszukaj informacji na temat tego, gdzie jeszcze w przyrodzie i sztuce można odnaleźć ciąg Fibonacciego.

# Trwa wczytywanie danych..



Film dostępny pod adresem </preview/resource/Ryr2gfNsgk3F5>

Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Film nawiązujący do treści materiału: Ciąg Fibonacciego.

---

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



## Ćwiczenie 8



Napisz iteracyjną wersję algorytmu uzupełniającego tablicę

FIB = [0..n] dla  $n \geq 0$  kolejnymi wyrazami ciągu Fibonacciego w postaci pseudokodu. Zwróć uzupełnioną tablicę.

### Specyfikacja problemu:

*Dane:*

- FIB – tablica wypełniona kolejnymi wyrazami ciągu Fibonacciego
- n – liczba naturalna;  $n \geq 0$

*Wynik:*

Program wypisuje uzupełnioną tablicę.

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Maurycy Gast

**Przedmiot:** Informatyka

**Temat:** Ciąg Fibonacciego

**Grupa docelowa:**

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres podstawowy

**Podstawa programowa:**

Cele kształcenia – wymagania ogólne

I. Rozumienie, analizowanie i rozwiązywanie problemów na bazie logicznego i abstrakcyjnego myślenia, myślenia algorytmicznego i sposobów reprezentowania informacji.

II. Programowanie i rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem komputera oraz innych urządzeń cyfrowych: układanie i programowanie algorytmów, organizowanie, wyszukiwanie i udostępnianie informacji, posługiwanie się aplikacjami komputerowymi.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

I. Rozumienie, analizowanie i rozwiązywanie problemów.

Zakres podstawowy. Uczeń:

2) stosuje przy rozwiązywaniu problemów z różnych dziedzin algorytmy poznane w szkole podstawowej oraz algorytmy:

e) obliczania wartości elementów ciągu metodą iteracyjną i rekurencyjną, w tym wartości elementów ciągu Fibonacciego.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

**Cele operacyjne (językiem ucznia):**

- Wyjaśnisz, jak się definiuje ciąg Fibonacciego i jakie ma on właściwości.

- Przeanalizujesz zapisany za pomocą pseudokodu algorytm wyznaczania elementu ciągu Fibonacciego.
- Wskażesz ciąg Fibonacciego w otaczającym nas świecie.

### **Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

### **Metody i techniki nauczania:**

- dyskusja;
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem multimediu i ćwiczeń interaktywnych;
- ćwiczenia praktyczne.

### **Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

### **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

### **Przebieg lekcji**

#### **Przed lekcją:**

1. **Przygotowanie do zajęć.** Nauczyciel loguje się na platformie i udostępnia e-materiał: „Ciąg Fibonacciego”. Uczniowie mają zapoznać się z treściami w sekcji „Przeczytaj”.

#### **Faza wstępna:**

1. Nauczyciel wprowadza uczniów szczegółowo w temat lekcji i jej cele. Może posłużyć się wyświetloną na tablicy zawartością sekcji „Wprowadzenie”.

#### **Faza realizacyjna:**

1. **Praca z tekstem.** Nauczyciel ocenia, na podstawie informacji na platformie, stan przygotowania uczniów do zajęć. Jeżeli jest ono niewystarczające prosi o ciche zapoznanie się z treścią w sekcji „Przeczytaj”.
2. **Praca z multimediu.** Uczniowie zapoznają się z treścią problemu 1 w sekcji „Animacja”. W parach opracowują rozwiązanie, następnie porównują je

z przedstawionym w prezentacji.

3. **Ćwiczenie umiejętności.** Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1-8 z sekcji „Sprawdź się”.  
Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.

#### **Faza podsumowująca:**

1. Nauczyciel zadaje pytania podsumowujące, np.
  - co to jest ciąg Fibonacciego?
  - na czym polega rekurencja?
  - co to jest złota liczba?
  - co oznacza pojęcie przepelnienie pamięci?
2. Nauczyciel prosi uczniów o podsumowanie zgromadzonej wiedzy.

#### **Praca domowa:**

1. Uczniowie wykonują polecenie 2 z sekcji „Animacja”.
2. Uczniowie przygotowują krótkie notatki na temat wybranych przykładów ze świata sztuki, przyrody lub innych dziedzin, w których można odnaleźć ciąg Fibonacciego.

#### **Wskazówki metodyczne:**

- Uczniowie mogą wykorzystać treści w sekcjach: „Przeczytaj”, „Animacja”, „Sprawdź się” jako materiał do lekcji powtórkowej.