

Liczby wymierne. Wartość bezwzględna

Materiał zawiera ilustracje (fotografie, obrazy, rysunki), filmy, ćwiczenia interaktywne i otwarte.

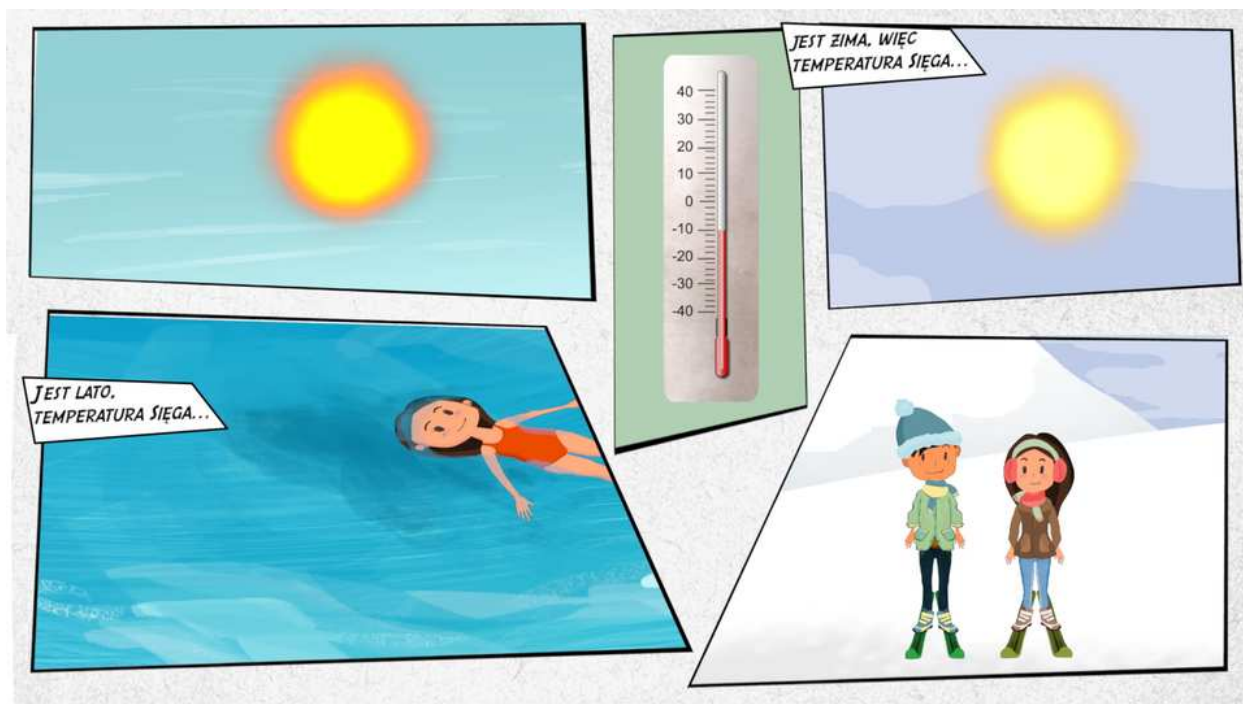
Definicja i własności - liczby wymierne, liczby przeciwne, liczby odwrotne, wartość bezwzględna.

Przykłady - odwrotność liczby, zaznaczanie liczb na osi liczbowej, liczby przeciwne, interpretacja geometryczna wartości bezwzględnej, równanie elementarne z wartością bezwzględną.

Ćwiczenia - rozpoznawanie liczb wymiernych i określanie ich rodzajów, wykorzystanie własności liczb przeciwnych, odwrotnych, zaznaczanie liczb na osi liczbowej, obliczanie wartości bezwzględnej liczb.

Liczby wymierne. Wartość bezwzględna

Zimą możemy zaobserwować, że temperatura powietrza spada poniżej 0°C . Mówimy wówczas, że jest równa na przykład -5°C , -12°C , 5°C , -12°C . Liczby, za pomocą których zapisana jest ta temperatura, nazywamy **ujemnymi**.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/RhJNFKxRAWvov>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia jakich temperatur możemy spodziewać się latem i zimą.

Wysokość bezwzględna to pionowa odległość (wysokość) danego punktu względem przyjętego punktu odniesienia, którym jest średni poziom morza. Wysokość bezwzględna oznaczana jest skrótem n.p.m., czyli nad poziomem morza (Wikipedia).

Wysokość bezwzględną punktów leżących powyżej poziomu morza oznaczamy liczbami dodatnimi, a punktów leżących poniżej poziomu morza, tzw. depresji, liczbami ujemnymi.

- Najniższy obszar na lądzie na kuli ziemskiej stanowi depresja Morza Martwego (396 do 418 m p.p.m., czyli -418 do -396 m n.p.m.)

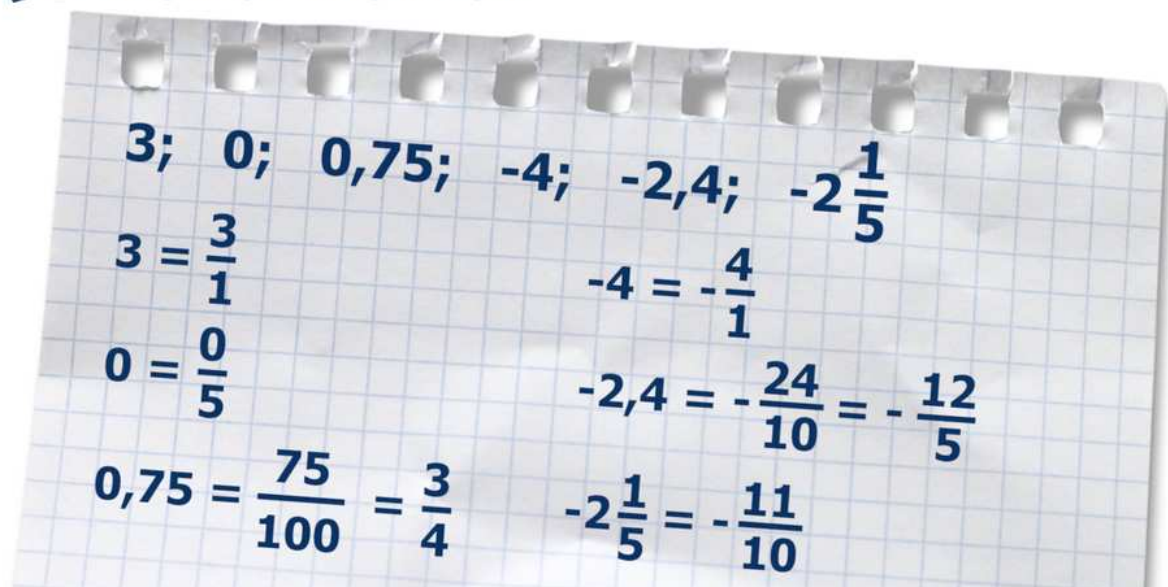
Dotychczas poznaliśmy:

- liczby naturalne : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...
- liczby całkowite: ..., -4 , -3 , -2 , -1 , 0, 1, 2, 3, 4, ...

Przykład 1



Przykłady liczb wymiernych.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/R6VCQh5kPKr7j>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia przykładowe liczby wymierne.

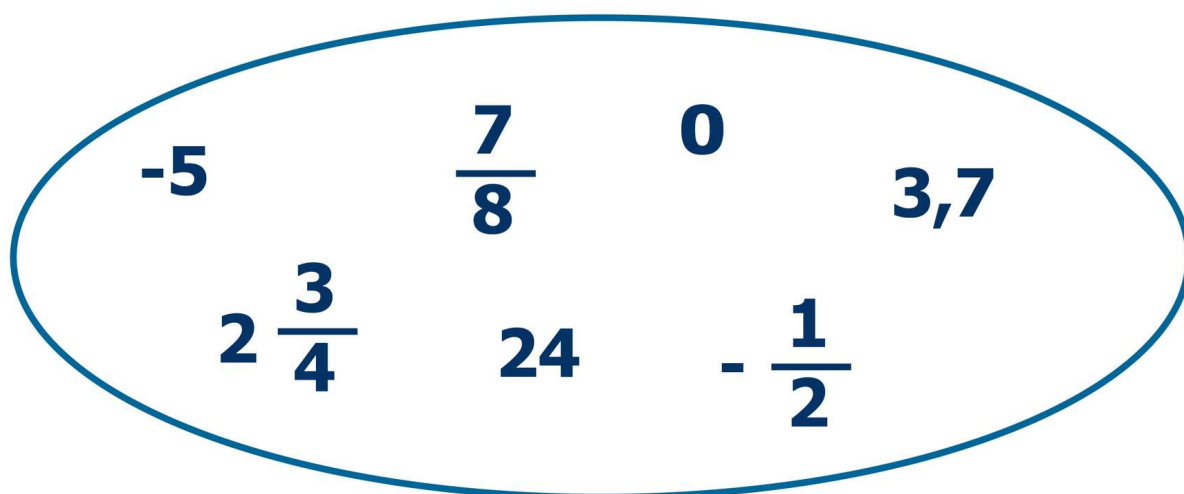
Definicja: Liczba wymierna

Liczba wymierna to liczba, którą można przedstawić w postaci ułamka $\frac{a}{b}$, gdzie a i b są liczbami całkowitymi i $b \neq 0$.

Własność: Liczby wymierne

Liczbami wymiernymi są liczby naturalne, całkowite i ułamki.

liczby wymierne



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 2

Odwrotnością liczby $\frac{2}{7}$ jest liczba $3\frac{1}{2}$, ponieważ zamieniając liczbę $3\frac{1}{2}$ na ułamek niewłaściwy, otrzymamy ułamek $\frac{7}{2}$. Analogicznie parami liczb wzajemnie odwrotnych są

1. $\frac{1}{3}$ i 3
2. 8 i 0,125
3. 4,6 i $\frac{5}{23}$

Definicja: Odwrotność liczby

Liczba odwrotna do danej liczby a , to taka liczba b , że

$$a \cdot b = 1.$$

Odwrotnością liczby a , gdzie $a \neq 0$ jest liczba $\frac{1}{a}$.

Zapamiętaj!

Iloczyn liczb wzajemnie odwrotnych jest równy 1.

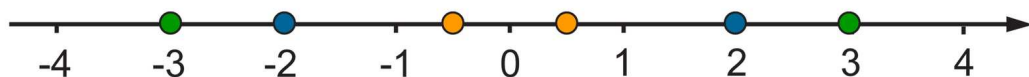
Przykład:

Liczba odwrotna do liczby $\frac{3}{4}$ to $\frac{4}{3}$ bo $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1$.

Przykład 3

Zaznaczmy na osi liczbowej pary liczb.

1. 2 i -2
2. 3 i -3
3. 0,5 i $-0,5$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Co możemy powiedzieć o odległościach liczb 2 i -2 od zera? Zauważmy, że te odległości są równe 2. Podobnie odległość każdej z liczb 3 i -3 od zera wynosi 3 a liczb 0,5 i $-0,5$ wynosi 0,5. Liczby 2 i -2 , 3 i -3 oraz 0,5 i $-0,5$ to pary liczb przeciwnych.

Definicja: Liczba przeciwna

Liczba przeciwna do danej liczby a to taka liczba $-a$, że zachodzi równość

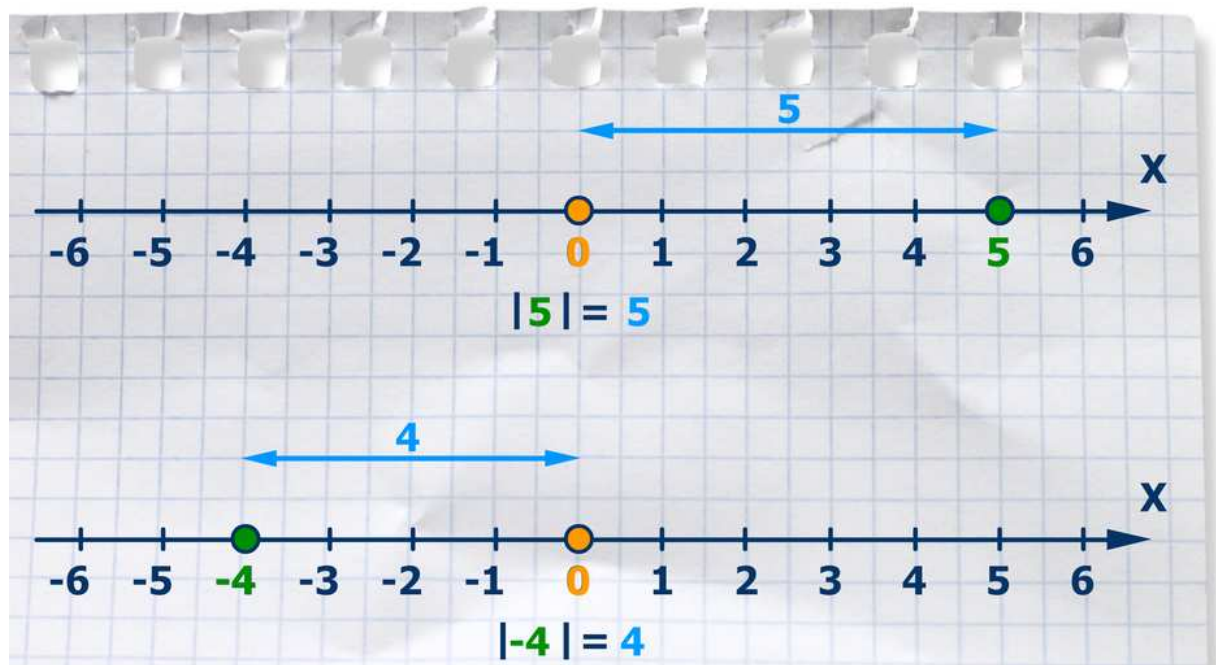
$$a + (-a) = 0.$$

Ważne!

Liczby przeciwne to takie liczby, które znajdują się po przeciwnych stronach 0 na osi liczbowej i których odległość od 0 jest taka sama.

Definicja: Wartość bezwzględna

Wartość bezwzględna liczby a jest to odległość liczby a od zera na osi liczbowej.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/R1M96C3A8XwgH>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia jak interpretujemy graficznie wartość bezwzględną.

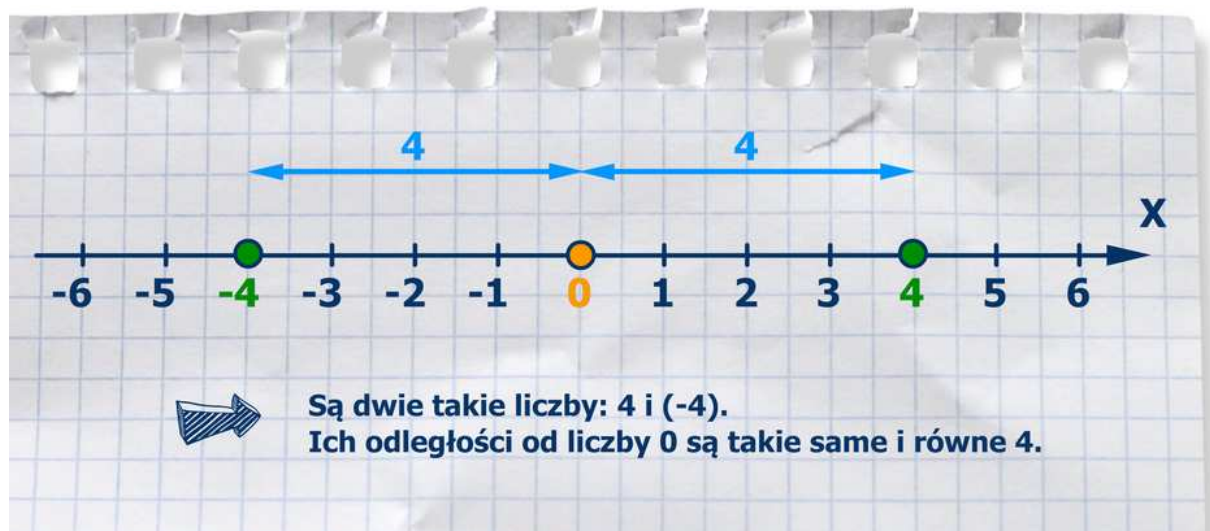
Własności wartości bezwzględnej

- Jeżeli liczba a jest nieujemna ($a \geq 0$), to jej wartością bezwzględną jest ta sama liczba a .
- Jeżeli liczba a jest ujemna ($a < 0$), to jej wartością bezwzględną jest liczba przeciwna do a , czyli $-a$.
- Wartość bezwzględną liczby a oznaczamy $|a|$.
- Liczby przeciwne mają taką samą wartość bezwzględną.

Przykład 4



Zaznacz na osi liczbowej liczby oddalone od liczby 0 o 4.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/RFZ0rWXP7c2pl>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

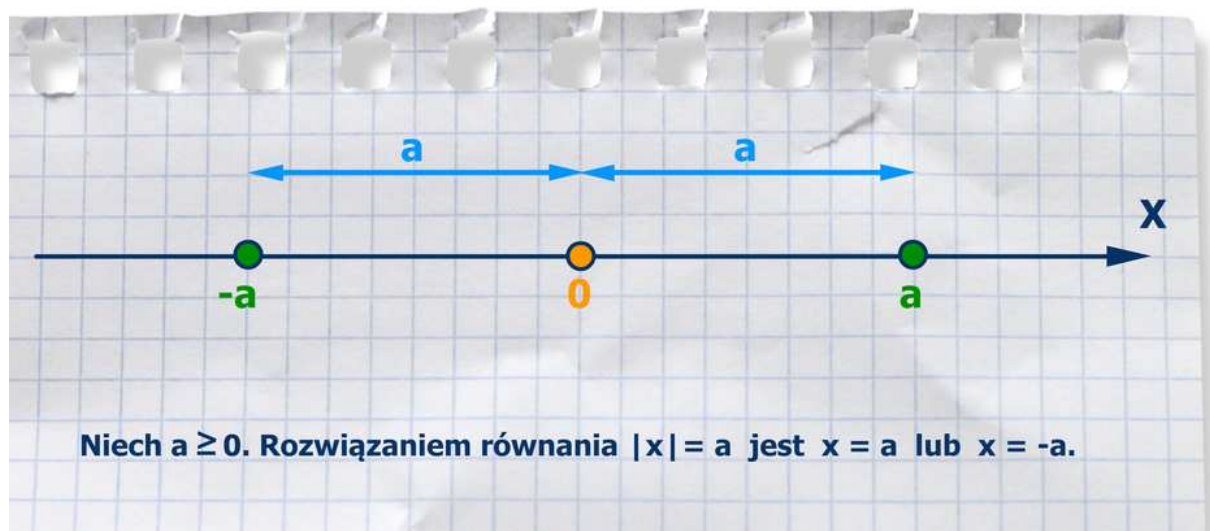
Animacja przedstawia w jaki sposób wyznaczyć liczby na osi liczbowej, które są jednakowo odległe od pewnego punktu.

Przykład 5

Rozwiążemy równanie $|x| = a$, gdzie $a \geq 0$.

Rozwiążemy równanie $|x| = a$, gdzie $a \geq 0$.

Szukamy takich liczb, których odległość od liczby 0 jest równa a



Film dostępny pod adresem </preview/resource/R1Z2op0UxulX5>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 1



Uzasadnij, że podana liczba jest wymierna.

1. -3

2. $0,4$

3. $2\frac{3}{5}$

4. $-3,2$

5. $0,(6)$

6. $-1,(9)$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2



Rozstrzygnij, które zdanie jest prawdziwe, a które fałszywe. Zaznacz prawda lub fałsz.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Liczbą odwrotną do $2,5$ jest liczba $\frac{2}{5}$.	☐	☐
Odwrotność liczby naturalnej nie jest liczbą wymierną.	☐	☐
Iloczyn liczby i liczby do niej przeciwnej wynosi 0 .	☐	☐
Suma liczby i liczby do niej przeciwnej wynosi 0 .	☐	☐

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3



Zaznacz daną liczbę na osi liczbowej. Pamiętaj o doborze odpowiedniej podziałki.

1. $\frac{1}{5}$

2. $-2,3$

3. $-\frac{3}{7}$

4. $\frac{5}{3}$

5. $-3,75$

6. $-\frac{8}{7}$

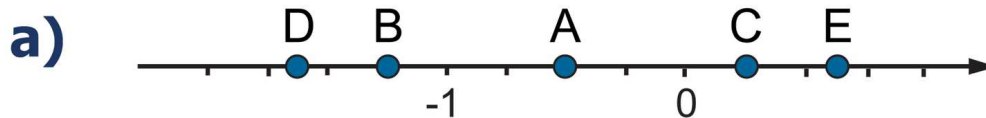


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4



Odczytaj liczby, które odpowiadają punktom na osi liczbowej.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5



Poniżej przedstawione są pewne liczby. Określ, czy podane liczby są naturalne, całkowite, wymierne, ujemne, czy mniejsze od -3 . Przeciągnij każdy element do odpowiedniej grupy lub wybierz prawidłowe odpowiedzi z listy rozwijalnej. W żadnym polu nie można wstawić dwóch takich samych liczb.

Naturalne

Całkowite

Wymierne

Ujemne

Mniejsze od -3

1, 1

$-\frac{6}{2}$

$-\frac{12}{3}$

$-0, (2)$

$\frac{8}{2}$

1

1

$-\frac{12}{3}$

12

-5

$\frac{21}{7}$

$-\frac{6}{2}$

-5

$\frac{0}{3}$

-10

$-\frac{5}{2}$

$-\frac{5}{2}$

-10

$\frac{8}{2}$

1

5

$\frac{0}{3}$

12

5

-10

$-\frac{12}{3}$

$-\frac{12}{3}$

$-\frac{6}{2}$

$-0, (2)$

$\frac{8}{2}$

-5

12

-10

$\frac{0}{3}$

$\frac{21}{7}$

-5

$\frac{21}{7}$

5

Ćwiczenie 6



Jakie liczby całkowite znajdują się w zbiorze liczb $-26, -5, -\frac{4}{2}, -1, -0, 5, 0, \frac{10}{5}, 3, \frac{9}{4}, 12$?
Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $0, \frac{10}{5}, 3, 12$

☐ $-26, -5, -\frac{4}{2}, -1, 0, \frac{10}{5}, 3, 12$

☐ $-26, -5, -1, 0, 3, 12$

☐ $0, 3, 12$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7



Które z poniższych zdań są prawdziwe? Zaznacz wszystkie prawidłowe odpowiedzi.

☐ W zbiorze liczb całkowitych nie ma najmniejszej liczby.

☐ Każda liczba naturalna jest liczbą wymierną.

☐ $1, (4)$ nie jest liczbą wymierną.

☐ Każda liczba wymierna jest liczbą całkowitą.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8



Połącz w pary wyrażenie z wartością bezwzględną z jego wartością.

$ \frac{3}{5} $	$\frac{3}{5}$
$ -3 $	4
$ -0,66 $	3
$ -2\frac{1}{3} $	0,66
$ 4 $	1, (2)
$ -1, (2) $	$2\frac{1}{3}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9



Poniżej przedstawiono pewne pary liczb. Określ, czy są to liczby przeciwne, czy odwrotne. Przeciągnij każdy element do odpowiedniej grupy lub wybierz prawidłowe odpowiedzi z listy rozwijalnej..

Liczby przeciwne

- $\frac{1}{4}$ i 4
- $2,2$ i $\frac{5}{11}$
- $-3,5$ i $\frac{7}{2}$
- $-2,4$ i $\frac{12}{5}$
- $0,375$ i $\frac{8}{3}$

Liczby odwrotne

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10



Która z poniższych liczb jest odwrotnością liczby $-2,4$? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $-\frac{5}{12}$

☐ $\frac{5}{12}$

☐ $2,4$

☐ $-\frac{24}{10}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11



Która z poniższych liczb jest przeciwną do liczby $\frac{3}{8}$? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $2\frac{2}{3}$

☐ $-\frac{8}{3}$

☐ $-\frac{3}{8}$

☐ $\frac{8}{3}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12



Oblicz wartość wyrażenia $2\frac{1}{4} + 3 \cdot (\frac{1}{3} + \frac{1}{2})$. Która z poniższych liczb jest liczbą odwrotną do otrzymanego wyniku? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $-\frac{19}{4}$

☐ $\frac{19}{4}$

☐ $\frac{4}{19}$

☐ $-\frac{4}{19}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13



Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz zdania prawdziwe.

☐ Odwrotność liczby naturalnej różnej od zera nie jest liczbą wymierną☐ Suma liczby i liczby do niej przeciwnej wynosi 0☐ Liczbą przeciwną do odwrotności liczby 2, 5 jest liczba $-\frac{2}{5}$ ☐ Iloczyn liczby i liczby do niej przeciwnej wynosi 0

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 14



Uzupełnij poniższy tekst. Kliknij w lukę, aby wyświetlić listę i wybierz odpowiednie słowo.

Każda liczba jest liczbą całkowitą. Liczba przeciwna do liczby całkowitej jest liczbą naturalną. Odwrotność liczby naturalnej różnej od zera jest liczbą . Liczba, która ma rozwinięcie dziesiętne nie jest liczbą wymierną.

nieskończone nieokresowe

dodatnią

naturalną

skończone

ujemnej

wymierna

naturalna

dodatniej

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.