Kąt nachylenia prostej do osi X

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Aplet
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Kąt nachylenia prostej do osi X

Prosta linia na boisku
Źródło: domena publiczna.

Każdą prostą umieszczoną w prostokątnym układzie współrzędnych, która nie jest równoległa do osi Y, opisuje się tzw. równaniem kierunkowym $y = ax + b$. Jego współczynniki a i b mają ścisły związek z położeniem tej prostej. W tej lekcji dowiesz się, czym jest kąt nachylenia prostej do osi X, jaki jest jego związek ze współczynnikiem kierunkowym a prostej oraz w jaki sposób współczynnik kierunkowy decyduje o kierunku prostej.

Twoje cele

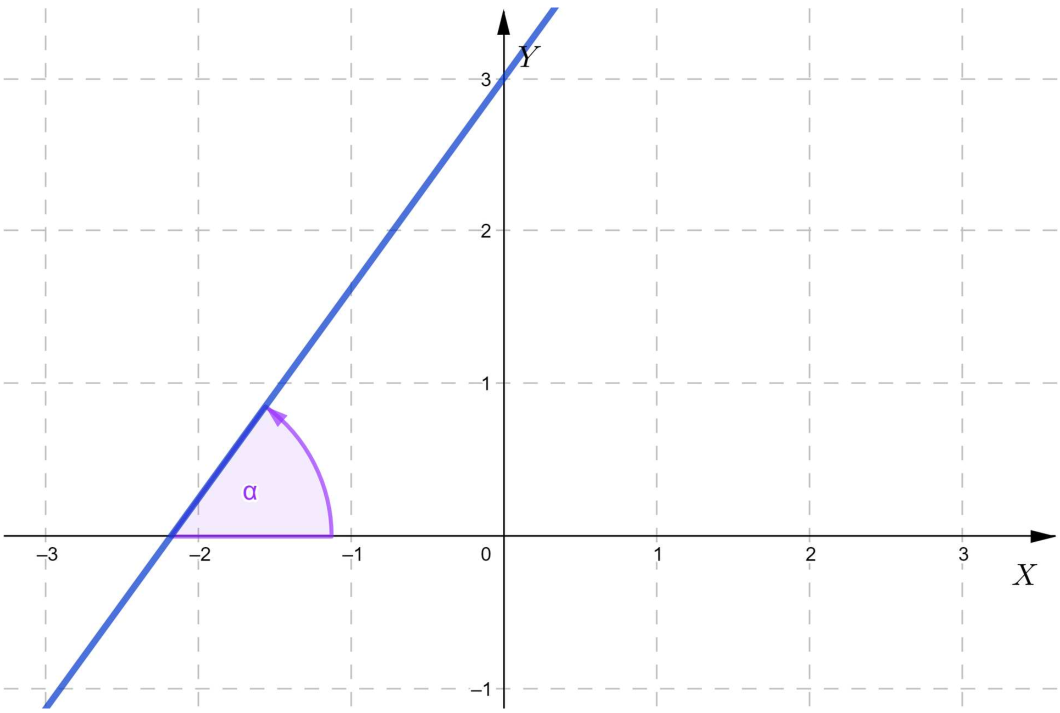
- Obliczysz współczynnik kierunkowy prostej, znając jej kąt nachylenia do osi X.
- Wyznaczysz kąt nachylenia prostej do osi X, znając jej współczynnik kierunkowy.
- Wyznaczysz kąt pomiędzy prostymi, na podstawie ich współczynników kierunkowych.
- Zinterpretujesz graficznie proste o przeciwnych współczynnikach kierunkowych.

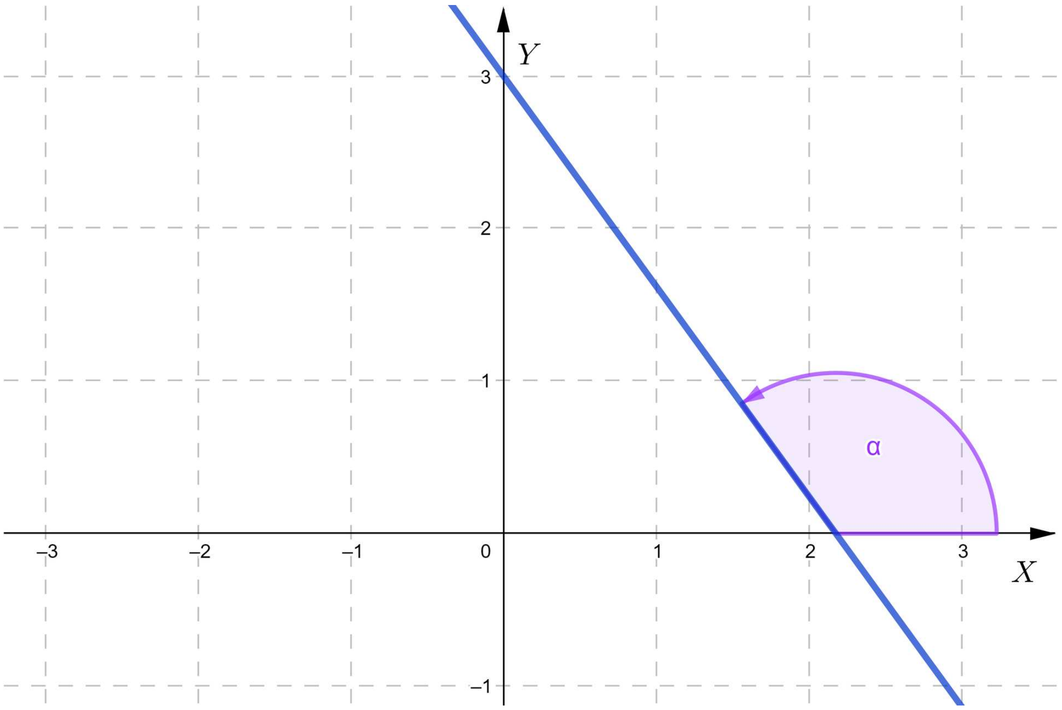
Przeczytaj

Najpierw dowiesz się, czym jest kąt nachylenia prostej do osi X.

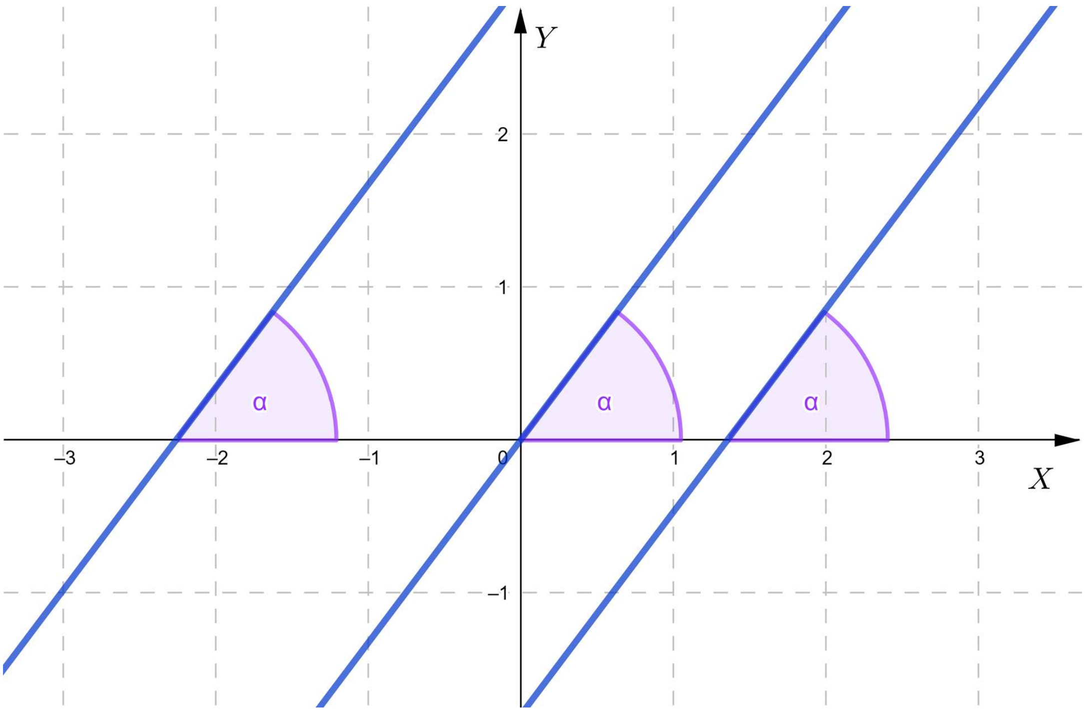
Naszkicujmy prostą o równaniu $y = ax + b$ w prostokątnym układzie współrzędnych. Kątem nachylenia prostej do osi X nazwiemy kąt o wierzchołku w punkcie przecięcia tej prostej z osią X. Jedno z ramion zawiera się w osi X i jest zwrócone w tę stronę, w którą odcięte rosną, zaś drugie ramię zawiera się w tej części prostej, która leży nad osią X.

Dodajmy, że na rysunkach poniżej widzimy tzw. kąty skierowane, których pewna właściwość jest dla nas istotna. Otóż kątem skierowanym nazwiemy kąt wykreślony przez dwie uporządkowane półproste, z których jedna (tu część osi X) jest ramieniem początkowym, a druga ramieniem końcowym (część prostej). Wierzchołkiem tego kąta jest punkt wspólny półprostych, które go tworzą. Kąt taki jest dodatni, jeśli ramię końcowe „przesuwa się” przeciwnie do ruchu wskazówek zegara (jak na rysunku). Kąt skierowany ujemny natomiast jest zakreślony w przeciwną stronę (zgodnie z ruchem wskazówek zegara). Aby określić kąt nachylenia prostej do osi X, będziemy rozpatrywać jedynie kąty skierowane dodatnie.





Jak można zauważyć z powyższych rysunków, kąt ten ma miarę z przedziału od 0° do 180°.

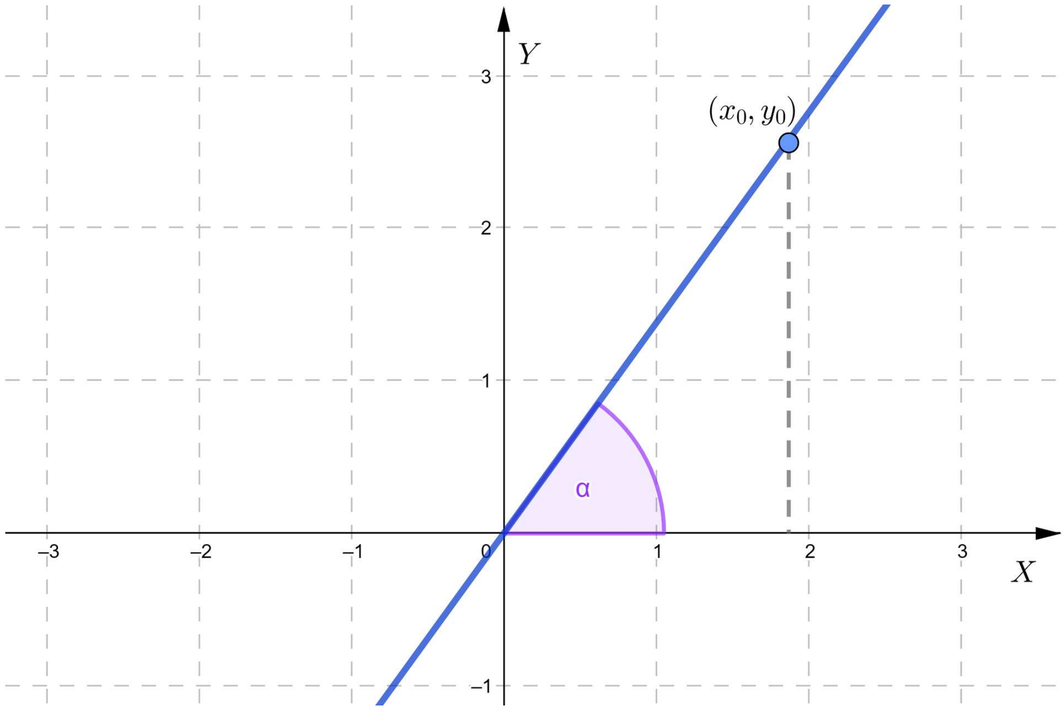


Wszystkie proste nachylone do osi X pod tym samym kątem są równoległe, co możemy zauważyć na powyższym rysunku. Dlatego też w dalszej części rozważymy proste nierównoległe, przechodzące przez początek układu współrzędnych, których wyraz wolny b jest równy zero. To pozwoli nam zauważyć zależność między współczynnikiem kierunkowym prostej a jej nachyleniem do osi X.

Rozważmy prostą o równaniu $y = ax$ i wybierzmy w niej jeden punkt o współrzędnych $(x_0,\ y_0)$ leżący na tej części prostej, która znajduje się ponad osią X. Wówczas punkt ten spełnia równanie prostej, zatem otrzymujemy równość $y_0 = ax_0$, która jest równoważna równości $a = \frac{y_0}{x_0}$. Z lekcji o funkcjach trygonometrycznych kąta dowolnego wiemy, że $\frac{y_0}{x_0}$ to tangens kąta. Stąd możemy wyciągnąć wniosek, że o ile kąt nachylenia prostej do osi X nie jest prosty, to jego tangens jest równy współczynnikowi kierunkowemu tej prostej.

Ważne!

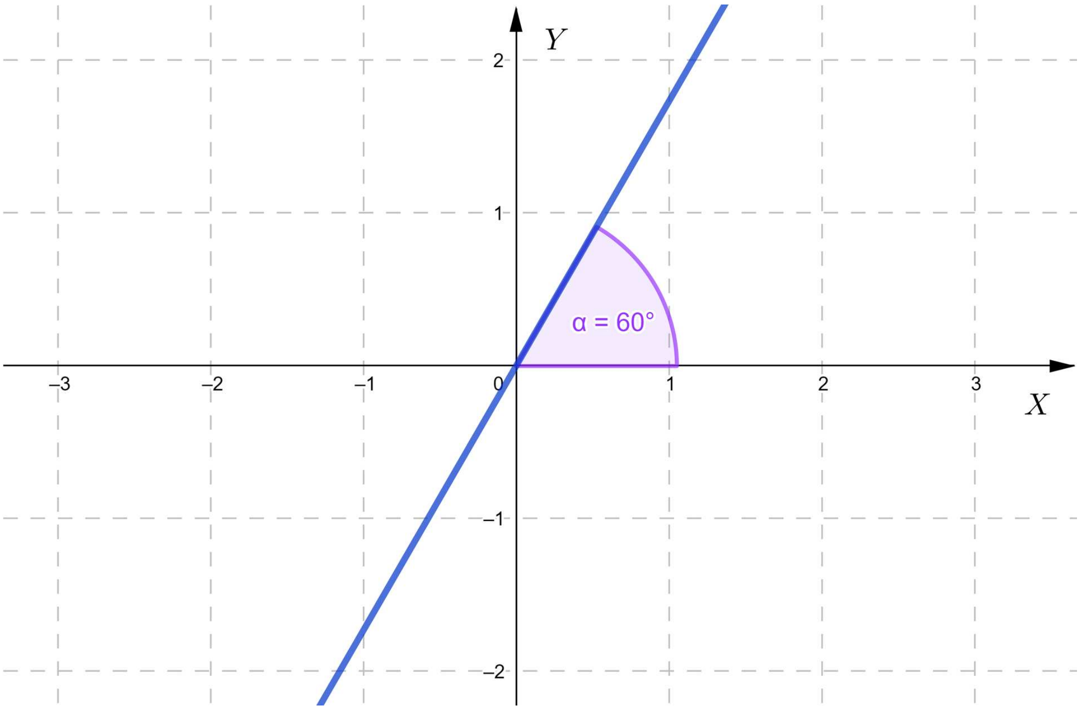
Dla prostej o równaniu $y = ax + b$ i kącie α nachylenia do osi X zachodzi związek:
$a = \text{tg } \alpha$, gdzie $\alpha \in (0^{\circ}, 90^{\circ}) \cup (90^{\circ},\ 180^{\circ})$.



Przykład 1

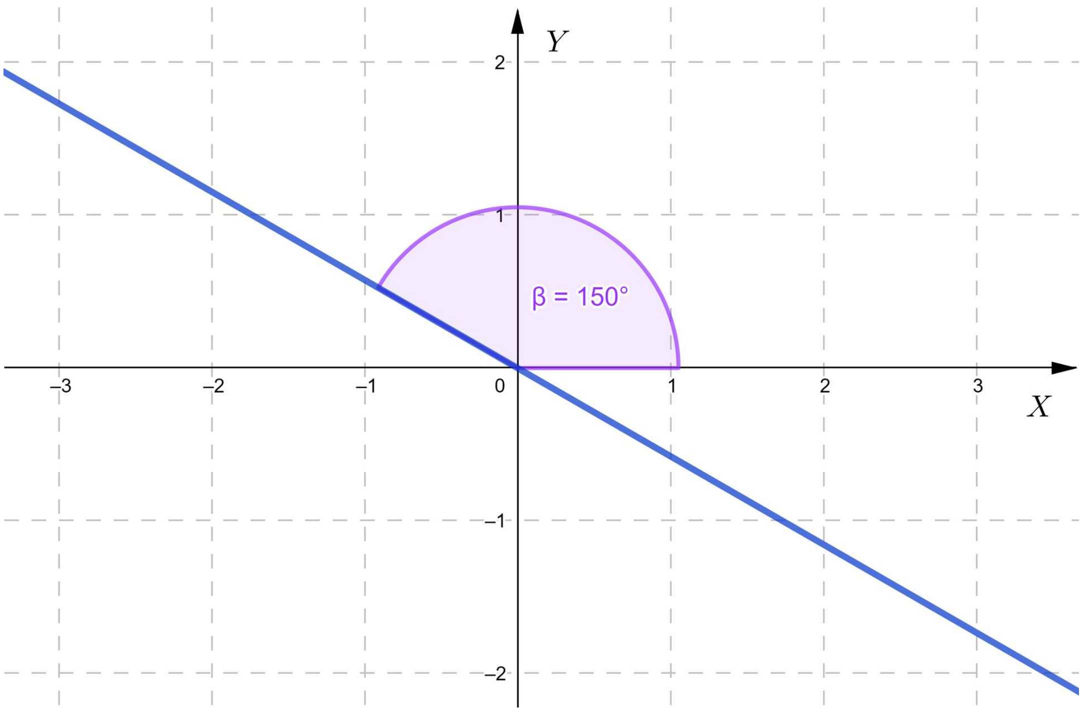
Wyznaczymy równanie prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych nachylonej do osi X pod kątem:

a) $\alpha = 60^{\circ}$



Ponieważ prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych, to ma równanie kierunkowe postaci $y = ax$. Kąt nachylenia tej prostej to 60°, zatem $a = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, czyli prosta ma równanie $y = \sqrt{3}x$.

b) $\beta = 150^\circ$



Ponieważ prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych, to ma równanie kierunkowe postaci $y = ax$. Kąt nachylenia tej prostej to 150°, zatem $a = \operatorname{tg} 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, czyli prosta ma równanie $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

Przykład 2

Wyznaczymy kąty nachylenia do osi X prostych o podanych równaniach.

a) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2$

Ponieważ współczynnik kierunkowy prostej jest dodatni i równy $\frac{\sqrt{3}}{3}$ oraz jej kąt nachylenia do osi X jest między 0° a 180°, więc szukany kąt jest ostry. Kąt ostry, którego tangens jest równy $\frac{\sqrt{3}}{3}$, ma miarę 30°.

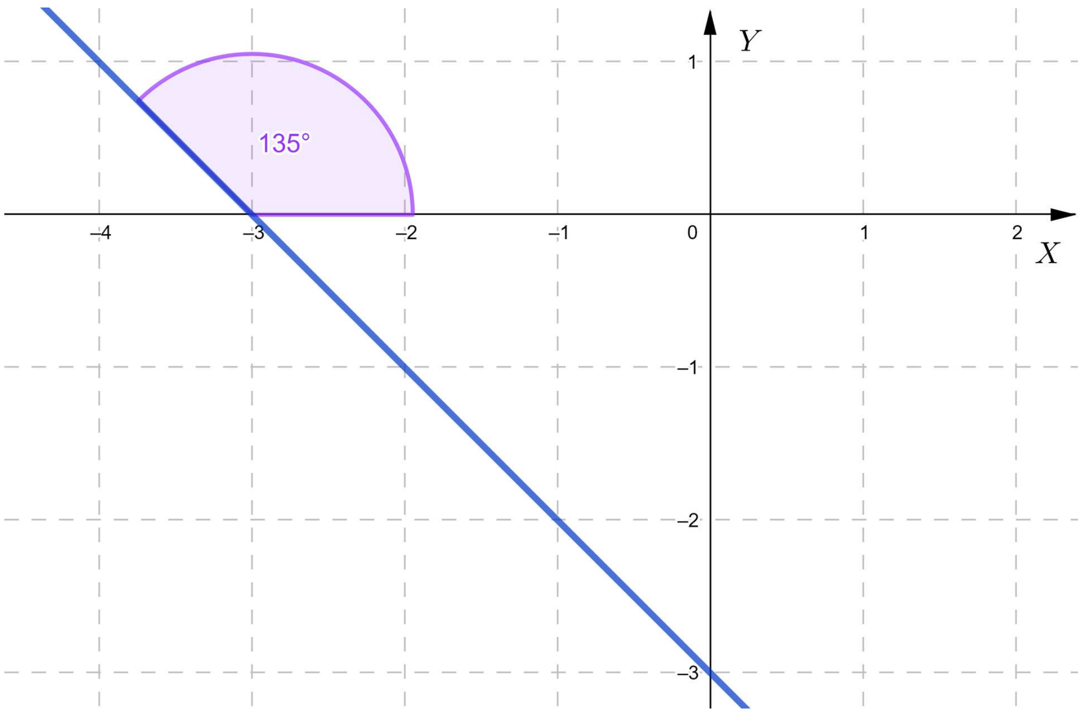
b) $y=-\sqrt{3}x-3$

Ponieważ współczynnik kierunkowy prostej jest ujemny i równy $-\sqrt{3}$ oraz jej kąt nachylenia do osi X jest między <math”> a 180°, więc szukany kąt jest rozwarty. Kąt rozwarty, którego tangens jest równy $-\sqrt{3}$, ma miarę 120°.

Rzeczywiście $\operatorname{tg}120^\circ=\operatorname{tg}(90^\circ+30^\circ)=-\operatorname{ctg}30^\circ=-\sqrt{3}$.

Przykład 3

Wyznaczymy równanie prostej nachylonej do osi X pod kątem 135°, która przecina oś Y w punkcie o rzędnej -3.

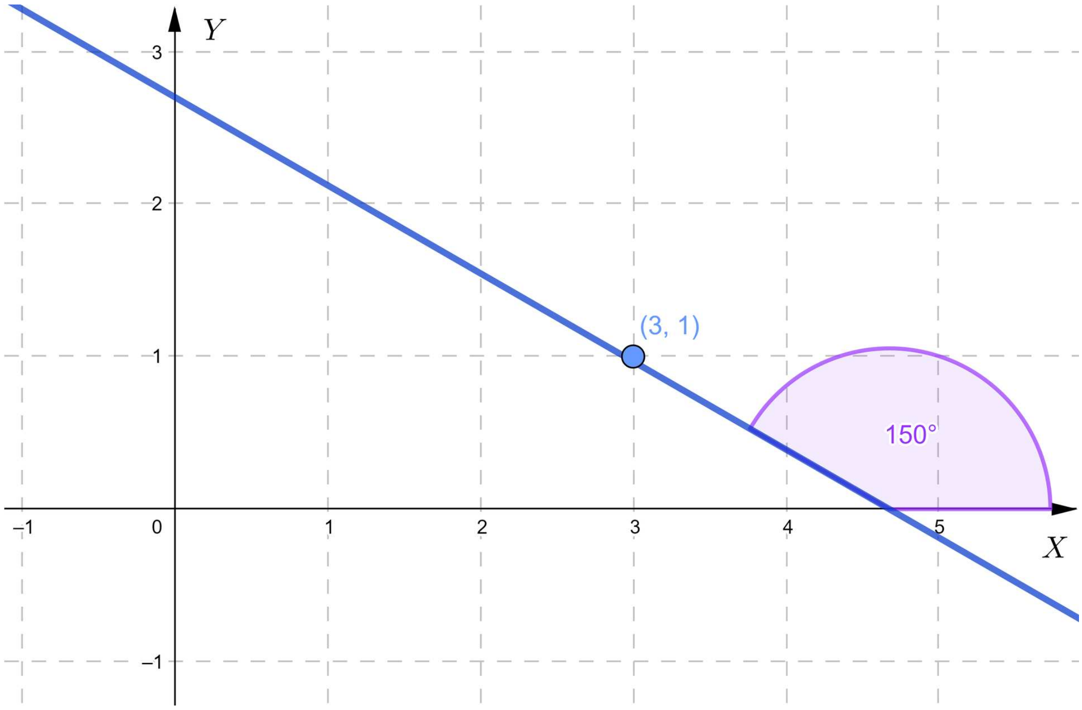


Ponieważ prosta nie jest równoległa do osi Y, wystarczy rozważyć równanie kierunkowe $y=ax+b$ tej prostej. Skorzystamy z interpretacji współczynnika kierunkowego jako tangensa kąta nachylenia. Wynika z niej, że:
$a=\operatorname{tg}135^\circ=\operatorname{tg}(90^\circ+45^\circ)=-\operatorname{ctg}45^\circ=-1$. Zatem prosta ma równanie postaci

$y = -x + b$. Wyraz wolny b możemy wyznaczyć, korzystając z faktu, że prosta przecina oś Y w punkcie o współrzędnych $(0, -3)$. Z interpretacji graficznej współczynnika b możemy wywnioskować, że $b = -3$. Zatem szukane równanie prostej to $y = -x - 3$.

Przykład 4

Wyznaczymy równanie prostej nachylonej do osi X pod kątem 150°, która przechodzi przez punkt o współrzędnych $(3, 1)$.



Ponieważ prosta nie jest pionowa, wystarczy rozważyć równanie kierunkowe $y = ax + b$ tej prostej. Skorzystamy z interpretacji współczynnika kierunkowego jako tangensa kąta nachylenia.

Wynika z niego, że: $a = \operatorname{tg} 150^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ + 60^\circ) = -\operatorname{ctg} 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Zatem prosta ma równanie postaci $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b$. Wyraz wolny b możemy wyznaczyć, korzystając z faktu, że prosta przechodzi przez punkt o współrzędnych $(3,\ 1)$. Możemy do równania $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b$ podstawić $x = 3$ oraz $y = 1$:

$1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 3 + b$

$1 = -\sqrt{3} + b$

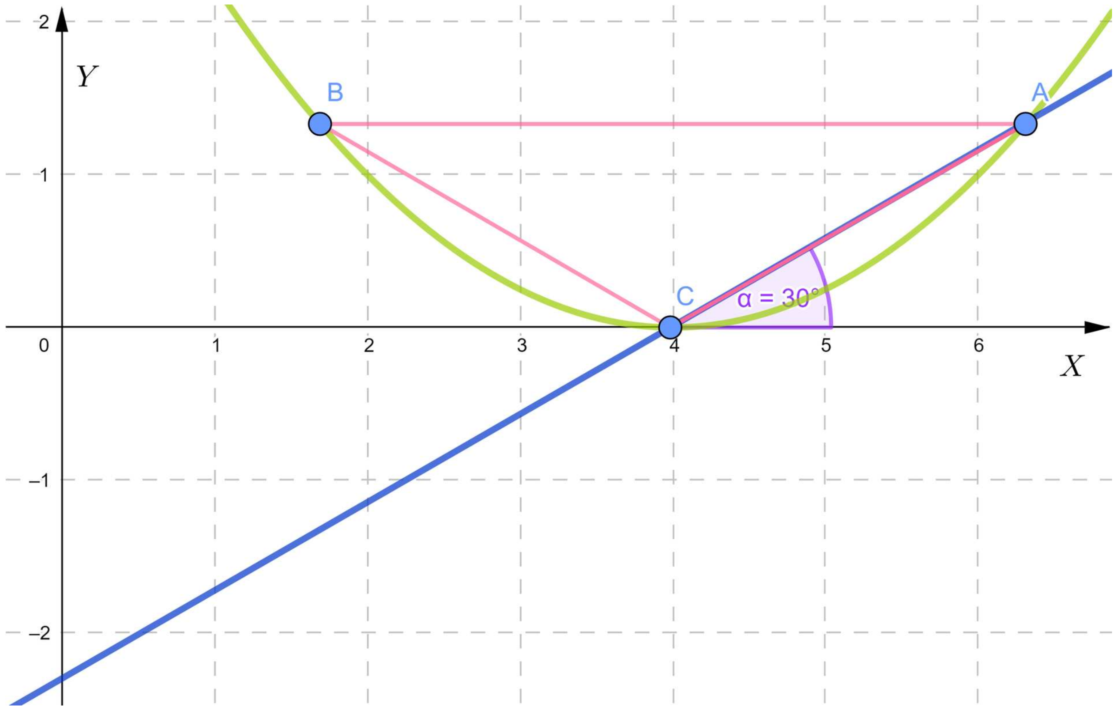
$\sqrt{3} + 1 = b$.

Zatem szukane równanie prostej to $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3} + 1$.

Zastosujemy teraz interpretację współczynnika kierunkowego prostej do rozwiązania problemu z geometrii analitycznej.

Przykład 5

Wierzchołki A i B trójkąta równoramiennego ABC znajdują się na paraboli o równaniu $y = \frac{1}{4}(x-4)^2$ oraz na prostej równoległej do osi X. Punkt C jest jednocześnie wierzchołkiem paraboli. Wyznacz współrzędne punktów A, B, C jeśli wiadomo, że kąt rozwarty tego trójkąta ma miarę 120°.



Po pierwsze obliczymy współrzędne punktów szczególnych paraboli: punktów jej przecięcia z osią X oraz wierzchołka:

- Z podanego równania możemy odczytać, że jedynym punktem wspólnym paraboli z osią X jest punkt o współrzędnych $(4, 0)$. Są to jednocześnie współrzędne wierzchołka paraboli oraz punktu C, który jest wierzchołkiem kąta o mierze 120°.

Po drugie wyznaczymy równanie prostej AC:

- Zauważmy, że prosta AC jest nachylona do osi X pod kątem 30°, zatem jej współczynnik kierunkowy jest równy $a = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Zatem równanie prostej ma postać $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b$.
- Wyraz wolny b prostej AC możemy wyznaczyć podstawiając do równania $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b$ współrzędne punktu $C = (4, 0)$: $0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 4 + b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$. Równanie prostej AC to $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Po trzecie wyznaczymy współrzędne punktu A:

- Ponieważ punkt A leży i na prostej AC, i na paraboli, więc jego współrzędne możemy wyznaczyć, rozwiązując układ równań $\begin{cases} y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{4\sqrt{3}}{3} \\ y=\frac{1}{4}(x-4)^2 \end{cases}$.
- Z układu równań wynika równanie: $\frac{1}{4}(x-4)^2=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{4\sqrt{3}}{3}$, które jest równoważne z równaniem: $3x^2+\left(-24-4\sqrt{3}\right)x+48+16\sqrt{3}=0$.
- Obliczymy pierwiastki tego równania:
  $\Delta=\left(-24-4\sqrt{3}\right)^2-4\cdot 3\cdot\left(48+16\sqrt{3}\right)=48=\left(4\sqrt{3}\right)^2$. Pierwiastkami powyższego równania kwadratowego są liczby $x_1=\frac{\left(24+4\sqrt{3}-4\sqrt{3}\right)}{6}=4$ i $x_2=\frac{\left(24+4\sqrt{3}+4\sqrt{3}\right)}{6}=4+\frac{4\sqrt{3}}{3}$.
- Drugą współrzędną punktu A obliczymy podstawiając $x=4+\frac{4\sqrt{3}}{3}$ do równania paraboli: $y=\frac{1}{4}\left(4+\frac{4\sqrt{3}}{3}-4\right)^2=\frac{4}{3}$.
- Zatem współrzędne punktów przecięcia prostej AC i paraboli to $C=(4,\ 0)$ i $A=\left(4+\frac{4\sqrt{3}}{3}\ ,\ \frac{4}{3}\right)$.
- Ponieważ punkty A i B są położone symetrycznie względem prostej o równaniu $x=4$, więc punkt B ma współrzędne $\left(4-\frac{4\sqrt{3}}{3},\ \frac{4}{3}\right)$.

Słownik

kąt nachylenia prostej

kąt jaki tworzy prosta z dodatnią półosią X.

Aplet

Polecenie 1

Zapoznaj się z apletem. Zmieniaj suwakiem kąt nachylenia prostej do dodatniej półosi X . Obserwuj zależność między współczynnikiem kierunkowym prostej a tangensem tego kąta. Pamiętaj, że wartości pokazywane przez aplet nie są dokładne (tangens dla większości kątów o miarach wyrażających się liczbą całkowitą jest liczbą niewymierną).

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DUC3EYdSH

Polecenie 2

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

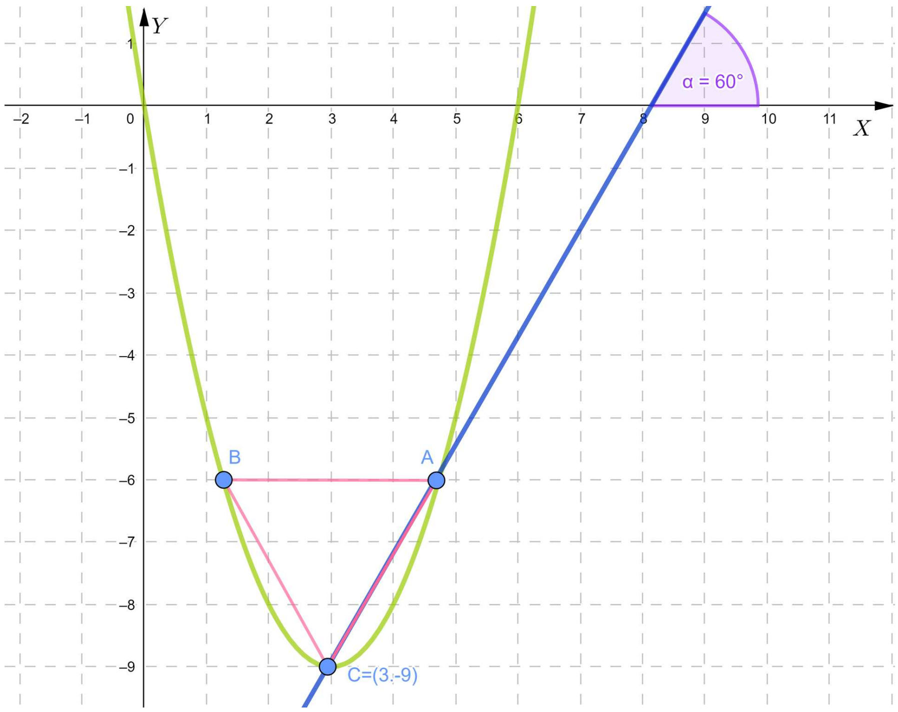
Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dana jest parabola p o równaniu $y = x(x-6)$. Wpisano w nią trójkąt równoboczny ABC w taki sposób, że punkt C znajduje się w wierzchołku paraboli, zaś punkty B i A leżą na prostej równoległej do osi X oraz na paraboli p. Wyznacz współrzędne punktów B i A.



Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Kąt nachylenia prostej do osi X

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres podstawowy i rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zakres podstawowy. Uczeń:
2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej i ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostopadłość do innej prostej, styczność do okręgu);

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza współczynnik kierunkowy prostej, znając jej kąt nachylenia do osi X,
- wyznacza kąt nachylenia prostej do osi X, znając jej współczynnik kierunkowy,
- wyznaczakąt pomiędzy prostymi, na podstawie ich współczynników kierunkowych,
- interpretuje graficznie proste o przeciwnych współczynnikach kierunkowych,
- analizuje zależności pomiędzy kątem nachylenia prostej do osi X a współczynnikiem kierunkowym.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- metoda sytuacyjna;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z zagadnieniami, które będą poruszane podczas lekcji. Uczniowie mogą skorzystać z informacji zawartych w sekcji „Przeczytaj".

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prezentuje temat lekcji: „Kąt nachylenia prostej do osi X" oraz cele, wybrana osoba formułuje kryteria sukcesu.
2. Prowadzący prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie zapoznają się z Apletem i rozwiązują zadanie umieszczone poniżej. Nauczyciel tłumaczy je na forum klasy.
2. Nauczyciel przechodzi do sekcji „Sprawdź się". Zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenie numer 1 i 2, i będą to robić wspólnie. Wybrana osoba czyta po kolei polecenia. Po każdym przeczytanym poleceniu ochotnik udziela odpowiedzi. Reszta uczniów ustosunkowuje się do niej, proponując swoje pomysły. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. W następnym kroku uczniowie wykonują w grupach zadania numer 4 i 5. Następnie wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby uzupełnia

informacje.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy komentowane są przez nauczyciela po ich zakończeniu.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje lekcję.

Praca domowa:

- Uczniowie wykonują ćwiczenie interaktywne nr 3.

Materiały pomocnicze:

- Współczynnik kierunkowy funkcji liniowej

Wskazówki metodyczne:

- Aplet można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie lekcji: „Kąt nachylenia prostej do osi X”.