

Mnożenie wyrażeń algebraicznych

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Gra edukacyjna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Mnożenie wyrażeń algebraicznych

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

W tym materiale będziemy mnożyć i przekształcać wyrażenia algebraiczne.

Czy wiesz, że działania na wyrażeniach algebraicznych można wykonywać też pisemnie? Na przykład mnożenie sumy algebraicznej przez liczbę wykonujemy analogicznie jak mnożenie liczby przez liczbę. W wyniku otrzymując oczywiście wyrażenie algebraiczne.

$$\begin{array}{r} 2x + 3y - xy + 6 \\ \cdot 4 \\ \hline 8x + 12y - 4xy + 24 \end{array}$$

Twoje cele

- Rozwiniesz i utrwalisz umiejętności związane z mnożeniem wyrażeń algebraicznych.
- Sprowadzisz do najprostszej postaci wyrażenia algebraiczne zawierające iloczyny i sumy algebraiczne.

Przeczytaj

Mnożenie jednomianów przez sumy algebraiczne

Przykład 1

Aby pomnożyć w pamięci liczbę jednocyfrową przez dwucyfrową, można skorzystać z prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania.

Na przykład:

$$6 \cdot 37 = 6 \cdot (30 + 7) = 6 \cdot 30 + 6 \cdot 7 = 180 + 42 = 222$$

Pomnożyliśmy każdy składnik sumy $30 + 7$ przez 6, a następnie dodaliśmy otrzymane iloczyny.

Analogicznie postępujemy, mnożąc **sumę algebraiczną** przez liczbę, bądź ogólnie – przez dowolny jednomian.

Przykład 2

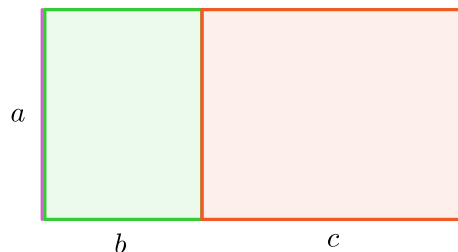
Wykonamy mnożenie.

$$3(a + b + 1) = 3a + 3b + 3$$

$$-5 \cdot (6abc - 2a + 4c) = -30abc + 10a - 20c$$

$$k(2x - 3xy + 6) = 2kx - 3kxy + 6k$$

$$x^2y(4x^3y + 2x^2 - y^4) = 4x^5y^2 + 2x^4y - x^2y^5$$



$$a(b + c) = ab + ac$$

$$\triangle (\square + \circ) = \triangle \square + \triangle \circ$$

Ważne!

Aby pomnożyć jednomian przez sumę algebraiczną, mnożymy każdy wyraz tej sumy przez ten jednomian i otrzymane iloczyny dodajemy.

Mnożenie sum algebraicznych

Przykład 3

Aby pomnożyć w pamięci dwie liczby co najmniej dwucyfrowe, można zapisać każdą z nich w postaci sumy lub różnicy, której jednym ze składników będzie pełna dziesiątka i dopiero wykonać mnożenie.

Na przykład:

$$\begin{aligned}43 \cdot 12 &= (40 + 3)(10 + 2) = 40 \cdot 10 + 40 \cdot 2 + 3 \cdot 10 + 3 \cdot 2 = \\ &= 400 + 80 + 30 + 6 = 516,\end{aligned}$$

$$199 \cdot 14 = (200 - 1)(10 + 4) = 200 \cdot 10 + 200 \cdot 4 - 1 \cdot 10 - 1 \cdot 4 = 2786.$$

Mnożyliśmy każdy wyraz pierwszej sumy przez każdy wyraz drugiej sumy i otrzymane iloczyny dodawaliśmy.

Podobnie postępujemy, mnożąc sumy algebraiczne.

Przykład 4

Wykonamy mnożenie.

$$(a + b)(3 + c) = 3a + ac + 3b + bc$$

$$(a - b)(a + 2c) = a^2 + 2ac - ab - 2bc$$

$$(-a - c)(a - b) = -a^2 + ab - ac + bc$$

$$(4a + 7ab)(2a - 3b^2) = 8a^2 - 12ab^2 + 14a^2b - 21ab^3$$

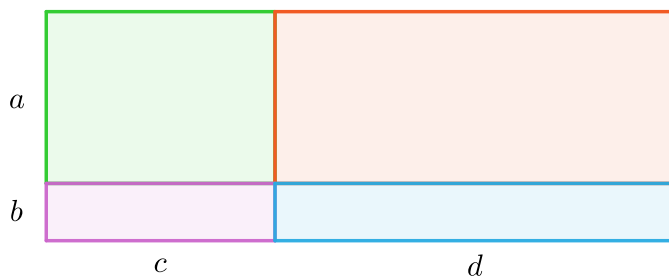
Przykład 5

Wykonamy mnożenie.

$$\begin{aligned}(a - b - 1)(a + b + 1) &= a^2 + ab + a - ab - b^2 - b - a - b - 1 = \\ &= a^2 - b^2 - 2b - 1\end{aligned}$$

$$2(a - b)(a + b) = 2(a^2 + ab - ab - b^2) = 2(a^2 - b^2) = 2a^2 - 2b^2$$

Zauważ, że w obu przypadkach, po wykonaniu mnożenia, aby zapisać wyrażenie w prostszej postaci, redukowaliśmy wyrazy podobne.



$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(\square + \circ)(\triangle + \diamond) = \square\triangle + \square\diamond + \circ\triangle + \circ\diamond$$

Ważne!

Aby pomnożyć dwie sumy algebraiczne, mnożymy każdy wyraz pierwszej sumy przez każdy wyraz drugiej sumy i otrzymane iloczyny dodajemy. Następnie, jeśli jest to możliwe, redukujemy wyrazy podobne.

Przykład 6

Jak zmieni się pole koła, gdy jego promień zwiększymy o 2?

Oznaczmy:

r – promień koła

Wtedy:

$r + 2$ – promień koła zwiększony o 2

$P = \pi r^2$ – początkowe pole koła

$P_1 = \pi(r + 2)^2$ – pole koła o zwiększonym promieniu

$$P_1 - P = \pi(r + 2)^2 - \pi r^2 = \pi(r + 2)(r + 2) - \pi r^2$$

$$P_1 - P = \pi(r^2 + 2r + 2r + 4) - \pi r^2 = \pi r^2 + 4\pi r + 4\pi - \pi r^2$$

$$P_1 - P = 4\pi r + 4\pi$$

Odpowiedź:

Pole koła zwiększy się o $4\pi r + 4\pi$.

Słownik

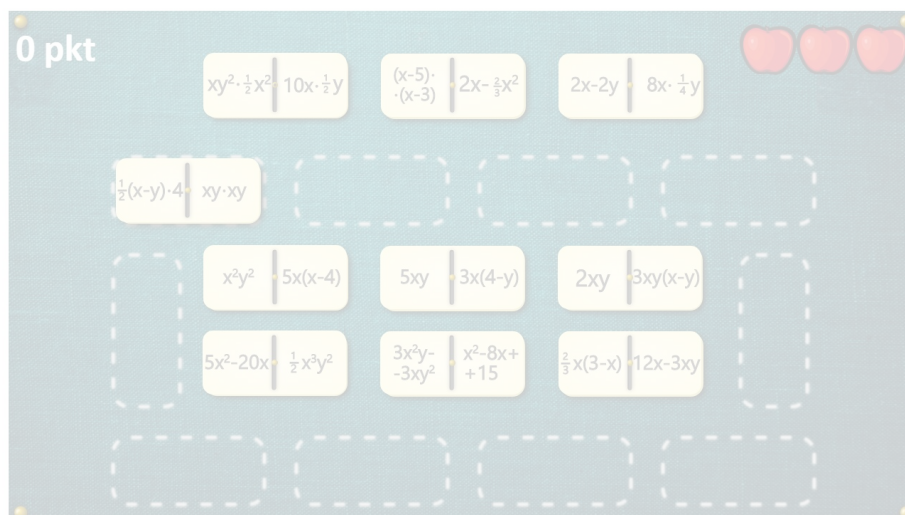
suma algebraiczna (wielomian)

wyrażenie algebraiczne, w którym występuje dodawanie jednomianów

Gra edukacyjna

Polecenie 1

Ułóż domino matematyczne. Staraj się większość obliczeń wykonywać w pamięci.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1CoMk0YO>

Polecenie 2

Przeanalizuj ułożone przez siebie domino i zastanów się – jakie wyrażenie otrzymujemy w wyniku mnożenia jednomianów, jakie w przypadku mnożenia sumy przez liczbę (lub jednomian), a jakie w przypadku mnożenia sum algebraicznych.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Wykaż, że iloczyn dwóch liczb nieparzystych jest liczbą nieparzystą.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat zajęć: Mnożenie wyrażeń algebraicznych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres podstawowy.

Uczeń:

2) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- mnoży jednomian przez sumę algebraiczną
- mnoży sumy algebraiczne
- wykorzystuje mnożenie wyrażeń algebraicznych w dowodzeniu twierdzeń

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- JIGSAW
- okienko informacyjne

Formy zajęć:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda grupa uczniów miała do dyspozycji komputer
- kartony, mazaki

Przebieg lekcji

Faza wprowadzająca:

1. Uczniowie przypominają prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania i przytaczają przykłady jego wykorzystania (w szczególności do pamięciowego mnożenia liczb).

Przypominają też pojęcia związane z wyrażeniami algebraicznymi i sposób dodawania/odejmowania wyrażeń algebraicznych.

2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w 3 grupach metodą JIGSAW.

Krok 1

Każda grupa rozpracowuje inny aspekt zagadnienia związanego z mnożeniem sum algebraicznych. Przy czym każda osoba w grupie musi na tyle dobrze zrozumieć zagadnienie, aby móc wytłumaczyć je innej grupie.

Grupa 1

Zadaniem tej grupy jest wypracowanie metody mnożenia sumy algebraicznej przez liczbę.

Mnożenie liczb naturalnych to skrócony zapis dodawania jednakowych składników. Czy w podobny sposób można określić mnożenie sumy algebraicznej przez liczbę naturalną? A przez liczbę całkowitą ujemną? Uczniowie powinni podać przykłady odpowiednich działań i wyciągnąć wnioski.

Grupa 2

Zadaniem tej grupy jest ustalenie metody mnożenia sumy algebraicznej przez jednomian. Mogą skorzystać z Przykładu 1 i Przykładu 2.

Grupa 3

Zadaniem tej grupy jest ustalenie metody mnożenia sum algebraicznych. Mogą skorzystać z Przykładu 3, Przykładu 4 i Przykładu 5.

Krok 2

Teraz uczniowie tworzą grupy 3- osobowe – w skład każdej grupy wchodzi jeden z przedstawicieli każdej z poprzednich grup. Przedstawiciele grup kolejno prezentują zdobytą wiedzę i pokazują sposoby jej wykorzystania.

Krok 3

Uczniowie łączą się ponownie w 3 grupy (o składzie takim, jak na początku), konfrontują uzyskane umiejętności, wspólnie rozwiązują interaktywne ćwiczenia sprawdzające oraz układają interaktywne domino matematyczne.

Faza podsumowująca:

1. Uczniowie wspólnie podsumowują zajęcia metodą okienka informacyjnego.
2. Uczniowie dzielą duży karton na 4 części. W pierwszym okienku zapisują główny problem, którym zajmowali się w czasie zajęć (mnożenie wyrażeń algebraicznych).

W drugim okienku zapisują sposób mnożenia sum algebraicznych, w trzecim podają odpowiednie przykłady, w czwarte wpisują pytania, wątpliwości do wyjaśnienia na następnych lekcjach.

3. Nauczyciel prosi wybranych uczniów o dokonanie samooceny, wskazania problemów, które sprawiały szczególny kłopot. A następnie dzieli się z uczniami własnymi spostrzeżeniami - wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest ustalenie sposobu dzielenia sum algebraicznych przez liczby i podanie odpowiednich przykładów.

Materiały pomocnicze:

[Mnożenie sum algebraicznych](#)

Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania danego multimedium

Uczniowie mogą rozpocząć układanie domina począwszy od wskazanego kamienia albo układać domino na czas. Warto poprosić uczniów, aby „dopisali” jeszcze kilka kamieni domina. Domino może być wykorzystane w czasie zajęć poświęconych przekształcaniu wyrażeń algebraicznych.

