Granica funkcji w punkcie według Heinego

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Infografika
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Jednym z podstawowych pojęć związanych z funkcjami jest pojęcie granicy. Istnieją dwie formalne definicje granicy funkcji. W tym temacie zajmiemy się jedną z nich. Jej autorem jest niemiecki matematyk z XIX wieku Heinrich Eduard Heine. Sformułowana przez niego definicja granicy funkcji opiera się na pojęciu granicy ciągu.

Twoje cele

- Poznasz definicję granicy funkcji w punkcie w sensie Heinego.
- Wyznaczysz granicę funkcji w punkcie, korzystając z definicji w sensie Heinego.
- Udowodnisz, korzystając z definicji w sensie Heinego, że funkcja nie posiada granicy.

Przeczytaj

Granica funkcji w punkcie to jedno z podstawowych pojęć w teorii funkcji. Istnieją dwie równoważne definicje granicy funkcji. W tym temacie omówimy definicję, która opiera się na granicy ciągu nieskończonego. Jej autorem jest niemiecki matematyk Heinrich Eduard Heine.

Definicja Heinego granicy funkcji w punkcie

Niech funkcja $f : D_f \to \mathbb{R}$ oznacza funkcję, której dziedziną jest zbiór $D_f \subset \mathbb{R}$.

Definicja: Granica funkcji w punkcie według Heinego

Liczbę $g \in \mathbb{R}$ nazywamy granicą funkcji f w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$, jeżeli dla dowolnego ciągu argumentów (x_n) takiego, że

1. $x_n \neq x_0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0$,

ciąg wartości funkcji $(f(x_n))$ jest zbieżny do liczby g. Fakt ten zapisujemy symbolicznie następująco

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g.$$

Definicję Heinego granicy funkcji możemy wykorzystać do obliczania granic pewnych funkcji. Spójrzmy na poniższe przykłady.

Przykład 1

Niech dana będzie funkcja liniowa $f(x) = 3x - 1$. Obliczymy granicę tej funkcji w punkcie $x_0 = 1$. Weźmy dowolny ciąg argumentów (x_n) zbieżny do liczby 1 o wyrazach różnych od 1. Obliczymy granicę ciągu $(f(x_n))$, korzystając z twierdzenia o arytmetyce granic ciągów.

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} (3x_n - 1) = 3 \lim_{n \to +\infty} x_n \ - \ 1 = 2.$$

Ponieważ ciąg (x_n) jest dowolnym ciągiem argumentów funkcji f zbieżnym do 1, więc na mocy definicji Heinego granicy funkcji w punkcie

$$\lim_{x \to 1} (3x - 1) = 2.$$

Przykład 2

Rozważmy funkcję $f(x) = (x-1)^2 - (x+1)^3$. Wykażemy, że posiada ona granicę w punkcie $x_0 = 0$. Weźmy w tym celu dowolny ciąg (x_n) taki, że $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ oraz $x_n \neq 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Stąd oraz z twierdzenia o arytmetyce granic ciągów otrzymujemy

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n-1)^2 = \lim_{n\to+\infty}((x_n-1)(x_n-1)) = (0-1)\cdot(0-1) = 1,$$

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n+1)^3 = \lim_{n\to+\infty}[(x_n+1)(x_n+1)(x_n+1)] =$$

$$= (0+1)\cdot(0+1)\cdot(0+1) = 1.$$

Zatem

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty}\left((x_n-1)^2 - (x_n+1)^3\right) = 1 - 1 = 0.$$

Powyższa równość oraz fakt, że zbieżny do zera ciąg argumentów (x_n) jest wybrany dowolnie oznaczają, że

$$\lim_{x\to 0}\left((x-1)^2 - (x+1)^3\right) = 0.$$

Zanim przejdziemy do kolejnego przykładu, spójrzmy na poniższą własność dotyczącą funkcji $f(x) = \sqrt{x}$.

Własność: Granica ciągu $\sqrt{x_n}$

Jeżeli ciąg (x_n) jest zbieżny do granicy $g \in \langle 0, +\infty)$ oraz $x_n \geq 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to wówczas ciąg $(\sqrt{x_n})$ jest zbieżny do granicy $\sqrt{g}$.

Przykład 3

Sprawdzimy, czy funkcja dana wzorem $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ posiada granicę w punkcie $x_0 = 3$. Na początek wyznaczmy dziedzinę funkcji f. Wiemy, że pierwiastek kwadratowy można obliczyć tylko z liczb nieujemnych oraz, że w mianowniku ułamka nie może być zera. Stąd $D_f = (1, +\infty)$. Weźmy dowolny ciąg x_n taki, że $x_n \in D_f \setminus \{3\}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 3$. Wówczas $x_n - 1 \geq 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - 1) = 3 - 1 = 2$. Stąd i z powyższej własności wiemy, że $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{x_n - 1} = \sqrt{2}$. Ostatnia równość wraz z twierdzeniem o granicy ilorazu dwóch ciągów zbieżnych daje nam

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x_n-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Z faktu, że ciąg argumentów x_n zbieżny do 3 był wybrany dowolnie wynika, że

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A co w sytuacji, gdy funkcja nie posiada granicy?

Definicję granicy funkcji w sensie Heinego możemy też wykorzystać do wykazania, że dana funkcja nie posiada granicy w punkcie x_0. W tym celu wystarczy wskazać dwa ciągi argumentów funkcji, które są zbieżne do x_0 oraz ciągi wartości im odpowiadające mają różne granice. Spójrzmy na poniższy przykład.

Przykład 4

Rozważmy funkcję

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{dla } x \leq -1 \\ x^2+3 & \text{dla } x > -1 \end{cases}.$$

Wykażemy, że nie posiada ona granicy w punkcie $x_0 = -1$. W tym celu wybierzemy dwa ciągi argumentów zbieżne do granicy -1 oraz takie, że ich ciągi wartości posiadają różne granice. Niech najpierw $x_n = -1 - \frac{1}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Jest to oczywiście ciąg zbieżny do -1. Ponieważ $x_n < -1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ więc $f(x_n) = 2\left(-1 - \frac{1}{n}\right) + 3 = 1 - \frac{2}{n}$. Stąd i z twierdzenia o arytmetyce granic

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right) = 1 - 0 = 1.$$

Przyjmijmy teraz $x_n = -1 + \frac{1}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ciąg ten jest również zbieżny do -1. Jednak tym razem $x_n > -1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, zatem $f(x_n) = \left(-1 + \frac{1}{n}\right)^2 + 3 = 4 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$. Korzystając kolejny raz z twierdzenia o arytmetyce granic ciągów, otrzymamy

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(4 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 4 - 0 + 0 = 4.$$

Udało nam się zatem wskazać dwa ciągi argumentów funkcji f zbieżne do -1 oraz takie, że ciągi wartości im odpowiadające mają różne granice. Oznacza to, że funkcja f nie posiada granicy w punkcie $x_0 = -1$.

Ważne!

Wprost z definicji granicy funkcji w punkcie x_0 według Heinego wynika, że istnienie oraz wartość granicy nie zależą od zachowania się funkcji w samym punkcie x_0. Wynika to z faktu, że wszystkie wyrazy rozważanych ciągów argumentów muszą być różne od x_0. A zatem istotne jest jedynie jak funkcja zachowuje się w sąsiedztwie punktu x_0, a nie w nim samym. Jedną z konsekwencji tego spostrzeżenia jest fakt, że funkcja może posiadać granicę w punkcie, który nie należy do jej dziedziny. Przykład takiej funkcji znajduje się w sekcji Infografika.

Słownik

ciąg argumentów funkcji

ciąg (x_n) którego wszystkie wyrazy należą do dziedziny funkcji f, tzn. ciąg spełniający warunek

$$\forall_{x \in \mathbb{N}} \; x_n \in D_f$$

ciąg wartości funkcji

jeżeli ciąg (x_n) jest ciągiem argumentów funkcji $f : D_f \to \mathbb{R}$, to ciąg $\big(f(x_n)\big)$ nazywamy ciągiem wartości funkcji f

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższą infografiką, na której przedstawiono sposób na sprawdzenie czy funkcja $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ posiada granicę w punkcie $x_0 = 1$. Zwróc uwagę, że punkt ten nie należy do dziedziny funkcji f. Po zapoznaniu się ze sposobem przedstawionym w infografice, wykonaj zawarte pod nią polecenia.

Polecenie 2

Dana jest funkcja

$$f(x) = \frac{2x-4}{x^3-x^2-2x}.$$

Wyznacz dziedzinę funkcji f.

Polecenie 3

Dana jest funkcja

$$f(x) = \frac{2x-4}{x^3-x^2-2x}.$$

Sprawdź, czy funkcja f posiada granicę w punkcie $x_0 = 2$. Jeśli tak, to oblicz wartość tej granicy. Skorzystaj z definicji granicy funkcji w punkcie według Heinego.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Korzystając z definicji Heinego funkcji w punkcie, sprawdź, czy funkcja określona wzorem $f(x) = x^2 - x + 1$ posiada granicę w punkcie $x_0 = 0$.

- Nie posiada granicy.
- Posiada granicę.

Ćwiczenie 2

Korzystając z definicji Heinego funkcji w punkcie, sprawdź, czy funkcja określona wzorem $f(x) = 4x + 1$ posiada granicę w punkcie $x_0 = -1$.

- Posiada granicę i jest ona równa 3.
- Posiada granicę i jest ona równa 1.
- Posiada granicę i jest ona równa -3.
- Nie posiada granicy.

Ćwiczenie 3

Dana jest funkcja $f(x) = x(x+2)$. Przeciągnij w puste miejsca odpowiednie wyrażenia.

Funkcja f _____ w punkcie $x_0 = 1$, gdyż dla dowolnego ciągu argumentów x_n zbieżnego do _____ ciąg wartości $f(x_n)$ jest zbieżny do _____.

1 | nie posiada granicy | 2 | -1 | posiada granicę | 3

Ćwiczenie 4

Dana jest funkcja $f(x) = x - 4$. Przeciągnij w puste miejsca odpowiednie wyrażenia.

Funkcja f _____ w punkcie _____, gdyż biorąc dowolny _____ x_n zbieżny do 1, _____ $f(x_n)$ jest zbieżny do _____.

nie posiada granicy | ciąg argumentów | -3 | posiada granicę | ciąg wartości | -1 | $x_0 = 1$ | $x_0 = 3$

Ćwiczenie 5

Korzystając z definicji Heinego, sprawdź, czy podane funkcje posiadają granicę w punkcie $x_0 = 2$. Zaznacz te, których granica w tym punkcie jest równa 1.

- [ ] $f(x) = 2x - 1$
- [ ] $f(x) = x^2 - x - 1$
- [ ] $f(x) = (x-1)(3-x)$
- [ ] $f(x) = 3x - 5$

Ćwiczenie 6

Korzystając z definicji granicy w sensie Heinego, wyznacz granicę funkcji z lewej kolumny w punkcie $x_0 = 1$ i połącz je w pary z poprawnymi odpowiedziami z prawej kolumny.

$f(x) = 2x^2 - x + 3$	$\lim_{x\to 1} f(x) = 0$
$f(x) = (x-1)(x+2)$	$\lim_{x\to 1} f(x) = 1$
$f(x) = x + 2$	$\lim_{x\to 1} f(x) = 3$
$f(x) = \frac{2}{x^2+1}$	$\lim_{x\to 1} f(x) = 4$

Ćwiczenie 7

Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{dla } x \leq 2 \\ 1 - x & \text{dla } x > 2 \end{cases}$.
Przeciągnij w puste pola odpowiednie wyrażenia.

Sprawdzimy, czy funkcja f posiada granicę w punkcie $x_0 = 2$. Niech $x_n = 2 - \frac{1}{n}$ oraz $t_n = 2 + \frac{1}{n}$. Oba ciągi są zbieżne do _____ oraz $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) =$ _____, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(t_n) =$ _____. Ponieważ granice ciągów wartości $f(x_n)$ oraz $f(t_n)$ są _____, więc funkcja f _____ w punkcie $x_0 = 2$.

-2 | posiada granicę | 1 | 3 | takie same | -1 | różne | 2 | nie posiada granicy

Ćwiczenie 8

Przenieś do wyznaczonych obszarów odpowiednie wyrażenia. Skorzystaj z definicji granicy funkcji w sensie Heinego.

$x_0 = 0$

$x_0 = 1$

$x_0 = -1$

$\lim\limits_{x \to x_0} (x + 2) = 1$

$\lim\limits_{x \to x_0} (2x + 1) = 1$

$\lim\limits_{x \to x_0} (x - 2)(x - 3) = 6$

$\lim\limits_{x \to x_0} \left(3x^2 + x - 2\right) = 0$

$\lim\limits_{x \to x_0} (2x + 1) = 3$

$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{3}{2x^2+1} = 3$

Dla nauczyciela

Autor: Mariusz Doliński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Granica funkcji w punkcie według Heinego

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1. oblicza granice funkcji (w tym jednostronne);

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- definiuje granicę funkcji w sensie Heinego,
- wyznacza granicę funkcji w punkcie, korzystając z definicji w sensie Heinego,
- udowadnia, korzystając z definicji w sensie Heinego, że funkcja nie posiada granicy.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- metoda akwarium;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj".

Faza wstępna:

1. Nauczyciel określa temat lekcji: „Granica funkcji w punkcie według Heinego" oraz cele, wybrana osoba formułuje kryteria sukcesu.
2. Nauczyciel zadaje uczniom pytanie dotyczące ich aktualnego stanu wiedzy w zakresie poruszanej tematyki. Prosi wybranego ucznia lub uczennicę o zapisywanie propozycji.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel czyta polecenie nr 1 w sekcji „Infografika" - „Zapoznaj się z poniższą infografiką, na której przedstawiono sposób na sprawdzenie czy funkcja $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ posiada granicę w punkcie . Zwróc uwagę, że punkt ten nie należy do dziedziny funkcji . Po zapoznaniu się ze sposobem przedstawionym w infografice, wykonaj zwarte pod nią polecenia." - prosi uczniów, aby zapoznali się z materiałem. Uczniowie zapisują ewentualne wątpliwości i niezrozumiałe aspekty, które zostały w nim przedstawione - nauczyciel tłumaczy je na forum klasy.
2. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1-2 z sekcji „Sprawdź się". Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych ćwiczeń, omawiając je wraz z uczniami.
3. Kolejne ćwiczenia (numer 3, 4 i 5) uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi.
4. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia 6, 7 i 8, ale następnie porównują swoje odpowiedzi z kolegą lub koleżanką.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się".

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, które nie zostały dokończone na zajęciach.

Materiały pomocnicze:

- Przykłady ciągów zbieżnych

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Infografika” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Granica funkcji w punkcie według Heinego”.