



Granica funkcji w punkcie według Heinego

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Infografika
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Granica funkcji w punkcie według Heinego

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Jednym z podstawowych pojęć związanych z funkcjami jest pojęcie granicy. Istnieją dwie formalne definicje granicy funkcji. W tym temacie zajmiemy się jedną z nich. Jej autorem jest niemiecki matematyk z XIX wieku Heinrich Eduard Heine. Sformułowana przez niego definicja granicy funkcji opiera się na pojęciu granicy ciągu.

Twoje cele

- Poznasz definicję granicy funkcji w punkcie w sensie Heinego.
- Wyznaczysz granicę funkcji w punkcie, korzystając z definicji w sensie Heinego.
- Udowodnisz, korzystając z definicji w sensie Heinego, że funkcja nie posiada granicy.

Przeczytaj

Granica funkcji w punkcie to jedno z podstawowych pojęć w teorii funkcji. Istnieją dwie równoważne definicje granicy funkcji. W tym temacie omówimy definicję, która opiera się na granicy ciągu nieskończonego. Jej autorem jest niemiecki matematyk Heinrich Eduard Heine.

Definicja Heinego granicy funkcji w punkcie

Niech funkcja $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ oznacza funkcję, której dziedziną jest zbiór $D_f \subset \mathbb{R}$.

Definicja: Granica funkcji w punkcie według Heinego

Liczbę $g \in \mathbb{R}$ nazywamy granicą funkcji f w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$, jeżeli dla dowolnego ciągu argumentów (x_n) takiego, że

1. $x_n \neq x_0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$,

ciąg wartości funkcji $(f(x_n))$ jest zbieżny do liczby g . Fakt ten zapisujemy symbolicznie następująco

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g.$$

Definicję Heinego granicy funkcji możemy wykorzystać do obliczania granic pewnych funkcji. Spójrzmy na poniższe przykłady.

Przykład 1

Niech dana będzie funkcja liniowa $f(x) = 3x - 1$. Obliczmy granicę tej funkcji w punkcie $x_0 = 1$. Weźmy dowolny ciąg argumentów (x_n) zbieżny do liczby 1 o wyrazach różnych od 1. Obliczmy granicę ciągu $(f(x_n))$, korzystając z twierdzenia o arytmetyce granic ciągów.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (3x_n - 1) = 3 \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n - 1 = 2.$$

Ponieważ ciąg (x_n) jest dowolnym ciągiem argumentów funkcji f zbieżnym do 1, więc na mocy definicji Heinego granicy funkcji w punkcie

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 1) = 2.$$

Przykład 2

Rozważmy funkcję $f(x) = (x - 1)^2 - (x + 1)^3$. Wykażemy, że posiada ona granicę w punkcie $x_0 = 0$. Weźmy w tym celu dowolny ciąg (x_n) taki, że $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ oraz $x_n \neq 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Stąd oraz z twierdzenia o arytmetyce granic ciągów otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - 1)^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} ((x_n - 1)(x_n - 1)) = (0 - 1) \cdot (0 - 1) = 1,$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n + 1)^3 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} [(x_n + 1)(x_n + 1)(x_n + 1)] = \\ &= (0 + 1) \cdot (0 + 1) \cdot (0 + 1) = 1. \end{aligned}$$

Zatem

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} ((x_n - 1)^2 - (x_n + 1)^3) = 1 - 1 = 0.$$

Powyzsza równość oraz fakt, że zbieżny do zera **ciąg argumentów** (x_n) jest wybrany dowolnie oznaczają, że

$$\lim_{x \rightarrow 0} ((x - 1)^2 - (x + 1)^3) = 0.$$

Zanim przejdziemy do kolejnego przykładu, spójrzmy na poniższą własność dotyczącą funkcji $f(x) = \sqrt{x}$.

Własność: Granica ciągu $\sqrt{x_n}$

Jeżeli ciąg (x_n) jest zbieżny do granicy $g \in \langle 0, +\infty \rangle$ oraz $x_n \geq 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to wówczas ciąg $(\sqrt{x_n})$ jest zbieżny do granicy \sqrt{g} .

Przykład 3

Sprawdźmy, czy funkcja dana wzorem $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ posiada granicę w punkcie $x_0 = 3$.

Na początek wyznaczmy dziedzinę funkcji f . Wiemy, że pierwiastek kwadratowy można obliczyć tylko z liczb nieujemnych oraz, że w mianowniku ułamka nie może być zera.

Stąd $D_f = (1, +\infty)$. Weźmy dowolny ciąg x_n taki, że $x_n \in D_f \setminus \{3\}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 3$. Wówczas $x_n - 1 \geq 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - 1) = 3 - 1 = 2. \text{ Stąd i z powyższej własności wiemy, że } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{x_n - 1} = \sqrt{2}$$

. Ostatnia równość wraz z twierdzeniem o granicy ilorazu dwóch ciągów zbieżnych daje nam

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x_n - 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Z faktu, że **ciąg argumentów** x_n zbieżny do 3 był wybrany dowolnie wynika, że

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A co w sytuacji, gdy funkcja nie posiada granicy?

Definicję granicy funkcji w sensie Heinego możemy też wykorzystać do wykazania, że dana funkcja nie posiada granicy w punkcie x_0 . W tym celu wystarczy wskazać dwa **ciągi argumentów funkcji**, które są zbieżne do x_0 oraz **ciągi wartości** im odpowiadające mają różne granice. Spójrzmy na poniższy przykład.

Przykład 4

Rozważmy funkcję

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{dla } x \leq -1 \\ x^2 + 3 & \text{dla } x > -1 \end{cases}$$

Wykażemy, że nie posiada ona granicy w punkcie $x_0 = -1$. W tym celu wybierzemy dwa **ciągi argumentów** zbieżne do granicy -1 oraz takie, że ich **ciągi wartości** posiadają różne granice. Niech najpierw $x_n = -1 - \frac{1}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Jest to oczywiście ciąg zbieżny do -1 . Ponieważ $x_n < -1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ więc $f(x_n) = 2(-1 - \frac{1}{n}) + 3 = 1 - \frac{2}{n}$. Stąd i z twierdzenia o arytmetyce granic

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \frac{2}{n}) = 1 - 0 = 1.$$

Przyjmijmy teraz $x_n = -1 + \frac{1}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ciąg ten jest również zbieżny do -1 . Jednak tym razem $x_n > -1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, zatem $f(x_n) = (-1 + \frac{1}{n})^2 + 3 = 4 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$. Korzystając kolejny raz z twierdzenia o arytmetyce granic ciągów, otrzymamy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (4 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}) = 4 - 0 + 0 = 4.$$

Udało nam się zatem wskazać dwa **ciągi argumentów funkcji** f zbieżne do -1 oraz takie, że **ciągi wartości** im odpowiadające mają różne granice. Oznacza to, że funkcja f nie posiada granicy w punkcie $x_0 = -1$.

Ważne!

Wprost z definicji granicy funkcji w punkcie x_0 według Heinego wynika, że istnienie oraz wartość granicy nie zależą od zachowania się funkcji w samym punkcie x_0 . Wynika to z faktu, że wszystkie wyrazy rozważanych **ciągów argumentów** muszą być różne od x_0 . A zatem istotne jest jedynie jak funkcja zachowuje się w sąsiedztwie punktu x_0 , a nie w nim samym. Jedną z konsekwencji tego spostrzeżenia jest fakt, że funkcja może posiadać granicę w punkcie, który nie należy do jej dziedziny. Przykład takiej funkcji znajduje się w sekcji Infografika.

Słownik

ciąg argumentów funkcji

ciąg (x_n) którego wszystkie wyrazy należą do dziedziny funkcji f , tzn. ciąg spełniający warunek

$$\forall x \in \mathbb{N} \ x_n \in D_f$$

ciąg wartości funkcji

jeżeli ciąg (x_n) jest ciągiem argumentów funkcji $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, to ciąg $(f(x_n))$ nazywamy ciągiem wartości funkcji f

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższą infografiką, na której przedstawiono sposób na sprawdzenie czy funkcja $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ posiada granicę w punkcie $x_0 = 1$. Zwróć uwagę, że punkt ten nie należy do dziedziny funkcji f . Po zapoznaniu się ze sposobem przedstawionym w infografice, wykonaj zawarte pod nią polecenia.

Polecenie 2

Dana jest funkcja

$$f(x) = \frac{2x-4}{x^3-x^2-2x}.$$

Wyznacz dziedzinę funkcji f .

Polecenie 3

Dana jest funkcja

$$f(x) = \frac{2x-4}{x^3-x^2-2x}.$$

Sprawdź, czy funkcja f posiada granicę w punkcie $x_0 = 2$. Jeśli tak, to oblicz wartość tej granicy. Skorzystaj z definicji granicy funkcji w punkcie według Heinego.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Mariusz Doliński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Granica funkcji w punkcie według Heinego

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1. oblicza granice funkcji (w tym jednostronne);

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- definiuje granicę funkcji w sensie Heinego,
- wyznacza granicę funkcji w punkcie, korzystając z definicji w sensie Heinego,
- udowadnia, korzystając z definicji w sensie Heinego, że funkcja nie posiada granicy.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- metoda akwariium;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel określa temat lekcji: „Granica funkcji w punkcie według Heinego” oraz cele, wybrana osoba formułuje kryteria sukcesu.
2. Nauczyciel zadaje uczniom pytanie dotyczące ich aktualnego stanu wiedzy w zakresie poruszanej tematyki. Prosi wybranego ucznia lub uczennicę o zapisywanie propozycji.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel czyta polecenie nr 1 w sekcji „Infografika” - „Zapoznaj się z poniższą infografiką, na której przedstawiono sposób na sprawdzenie czy funkcja $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ posiada granicę w punkcie . Zwróc uwagę, że punkt ten nie należy do dziedziny funkcji . Po zapoznaniu się ze sposobem przedstawionym w infografice, wykonaj zwarte pod nią polecenia.” - prosi uczniów, aby zapoznali się z materiałem. Uczniowie zapisują ewentualne wątpliwości i niezrozumiałe aspekty, które zostały w nim przedstawione - nauczyciel tłumaczy je na forum klasy.
2. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1-2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych ćwiczeń, omawiając je wraz z uczniami.
3. Kolejne ćwiczenia (numer 3, 4 i 5) uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi.
4. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia 6, 7 i 8, ale następnie porównują swoje odpowiedzi z kolegą lub koleżanką.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, które nie zostały dokończone na zajęciach.

Materiały pomocnicze:

- [Przykłady ciągów zbieżnych](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Infografika” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Granica funkcji w punkcie według Heinego”.