



Odkryj, zrozum, zastosuj...

Po co nam delta i parabola? Jak poradzić sobie w banku z procentem składanym? Jak narysować wykres funkcji specjalnej? Zajrzyj do e-podręcznika.

- Geometria analityczna
 - Wprowadzenie do geometrii w prostokątnym układzie współrzędnych
 - Równanie prostej w postaci ogólnej oraz w postaci kierunkowej
 - Proste równoległe, proste prostopadłe
 - Długość odcinka. Środek odcinka
 - Zastosowania równania prostej: wysokości, środkowe, symetralne boków trójkąta
- Funkcja kwadratowa
 - Jednomian kwadratowy i jego własności. Przesunięcie wykresu jednomianu kwadratowego wzdłuż osi układu współrzędnych
 - Wykres funkcji kwadratowej zapisanej wzorem w postaci kanonicznej. Wykres funkcji kwadratowej zapisanej wzorem w postaci ogólnej
 - Współrzędne wierzchołka paraboli
 - Zależności między wartościami współczynników występujących we wzorach funkcji kwadratowej zapisanej w postaci ogólnej i w postaci kanonicznej
 - Współrzędne wierzchołka paraboli
 - Miejsca zerowe funkcji kwadratowej. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej
 - Wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie
 - Równanie kwadratowe
 - Nierówność kwadratowa
 - Wartość najmniejsza oraz wartość największa funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym
 - Zastosowania funkcji kwadratowej
 - Zadania wstępne
 - Zadania tekstowe prowadzące do równań kwadratowych – prędkość, droga, czas
- Wielomiany. Funkcje wymierne
 - Pierwiastki równań
 - Równania stopnia trzeciego w postaci iloczynu

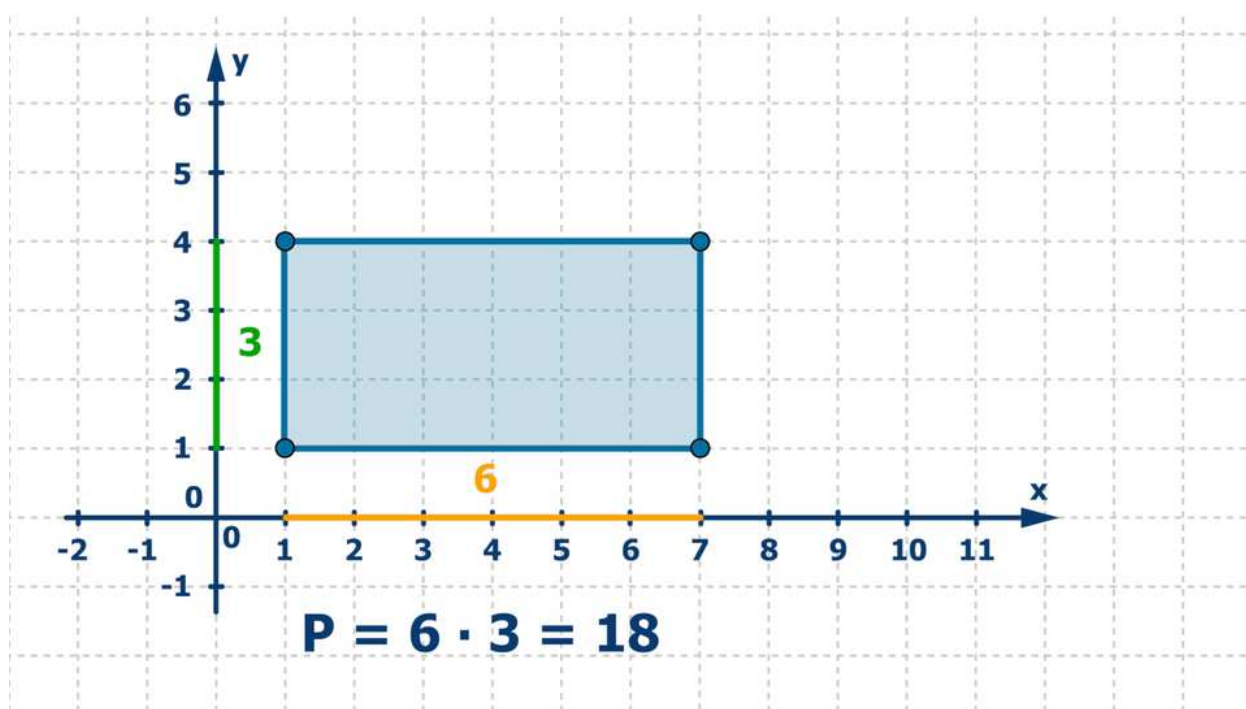
- Wyrażenia wymierne. Równania wymierne
- Zastosowanie równań wymiernych do interpretacji zagadnień praktycznych
- Proporcjonalność odwrotna
 - Proporcjonalność odwrotna
 - Wykres funkcji
 - Przesunięcia wykresu wzdłuż osi układu współrzędnych
- Zastosowania funkcji wymiernych do interpretacji zagadnień praktycznych
- Ciągi
 - Pojęcie ciągu. Ciąg jako funkcja zmiennej naturalnej
 - Ciąg arytmetyczny
 - Ciągi – własności ciągów arytmetycznych
 - Ciągi – suma wyrazów ciągu arytmetycznego
 - Ciąg geometryczny
 - Suma wyrazów ciągu geometrycznego
 - Procent składany
 - Ciąg arytmetyczny i geometryczny zastosowanie
- Funkcja wykładnicza. Logarytmy
 - Funkcja wykładnicza i jej własności. Przekształcanie wykresu funkcji wykładniczej
 - Definicja logarytmu. Własności logarytmu
 - Działania na logarytmach
 - Działania na logarytmach. Przykłady
 - Zadania
 - Zastosowanie funkcji wykładniczej
- Wykresy funkcji specjalnych i ich własności
- Słowniczek

Wprowadzenie do geometrii w prostokątnym układzie współrzędnych

W klasie pierwszej omówiliśmy podstawowe własności figur płaskich. Teraz pokażemy, że umieszczenie takich figur w układzie współrzędnych stwarza możliwość opisanie ich za pomocą równań.

Przykład 1

Oblicz pole prostokąta ABCD.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

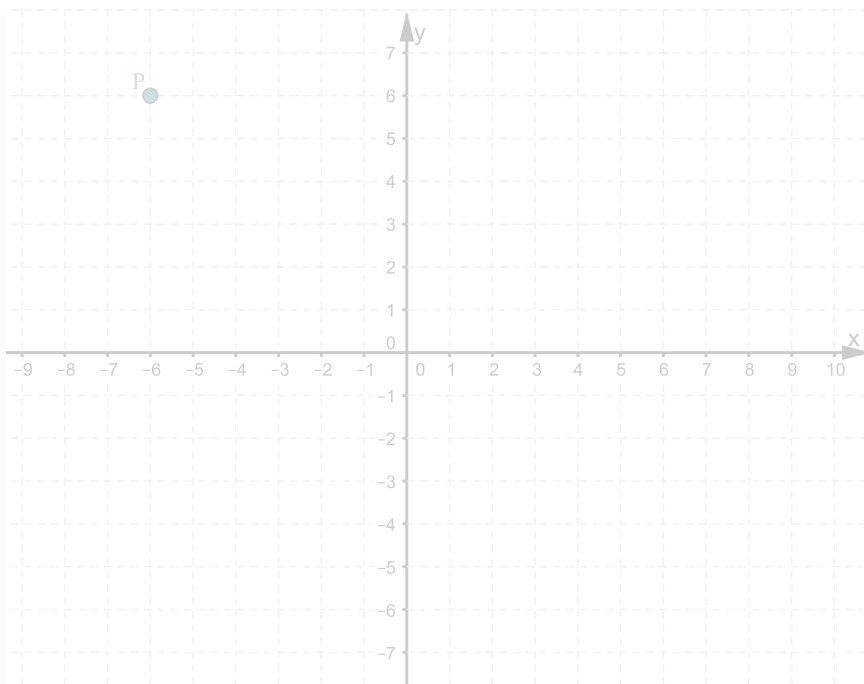
Przykład 2

Zaznacz w układzie współrzędnych punkt o podanych współrzędnych.



Zmień położenie punktu P tak,
aby miał następujące współrzędne:

(6,-4)



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DMJZqerKj>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 3

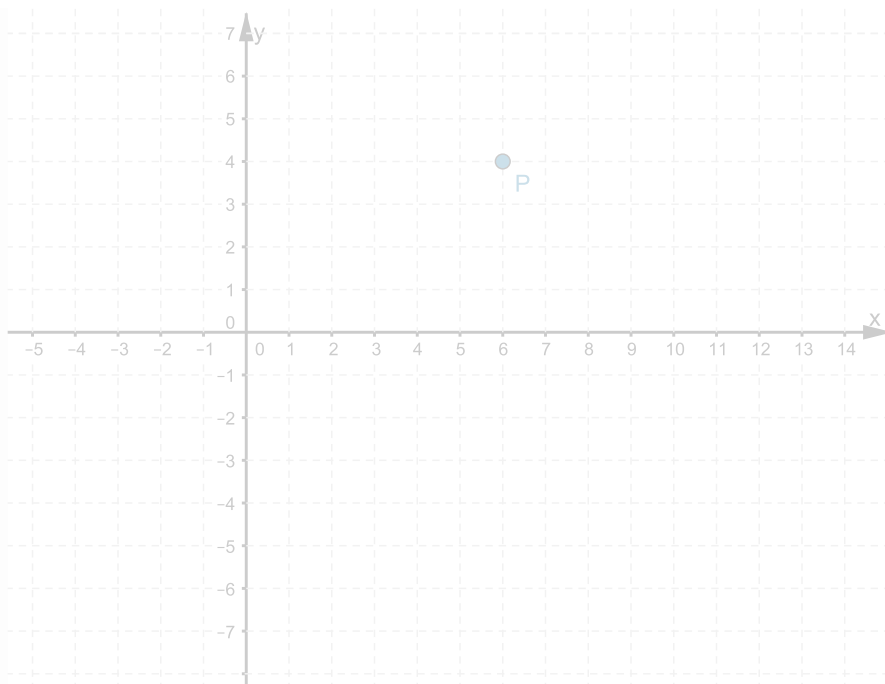
Podaj współrzędne punktu P .

Współrzędne punktu



Podaj współrzędne punktu P.

P = (,)



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DMJZqerKj>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 4

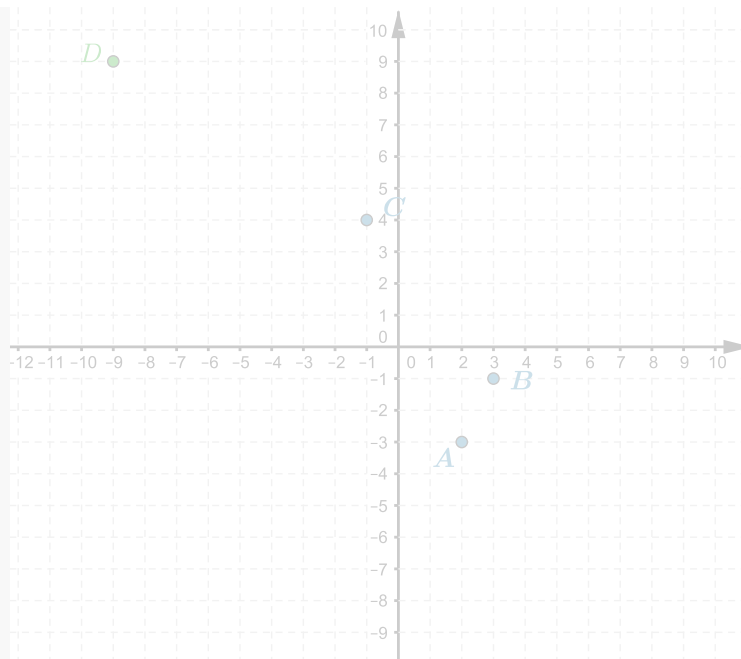
Punkty A , B i C są trzema wierzchołkami równoległoboku. Umieść punkt D tak, aby zbudować równoległobok $ABCD$.

Równoległobok w układzie współrzędnych

Dane są punkty A , B i C .

Przesuń punkt D tak,

aby był wierzchołkiem równoległoboku $ABCD$.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DMJZqerKj>

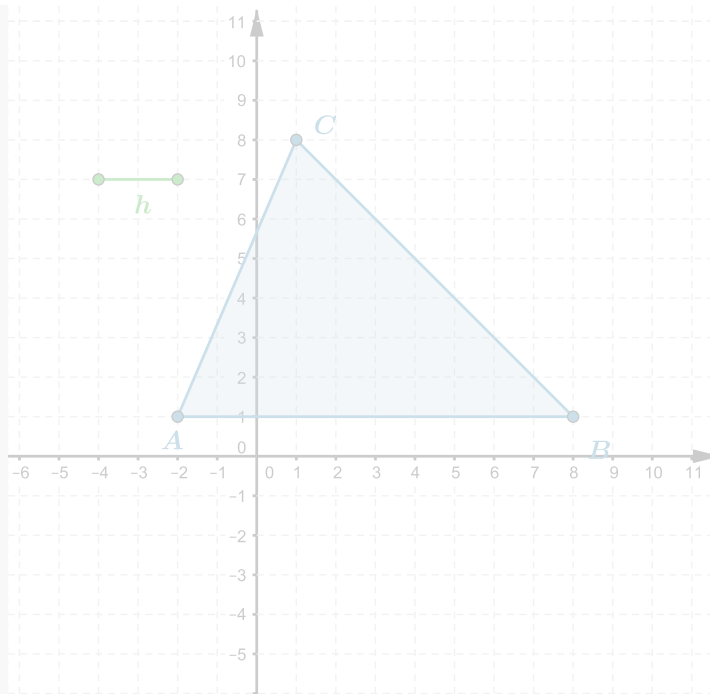
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 5

Dany jest trójkąt ABC . Umieść odcinek h tak, aby był wysokością tego trójkąta poprowadzoną z wierzchołka A .

Wysokość trójkąta

Ustaw odcinek h tak, aby był wysokością trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka A .

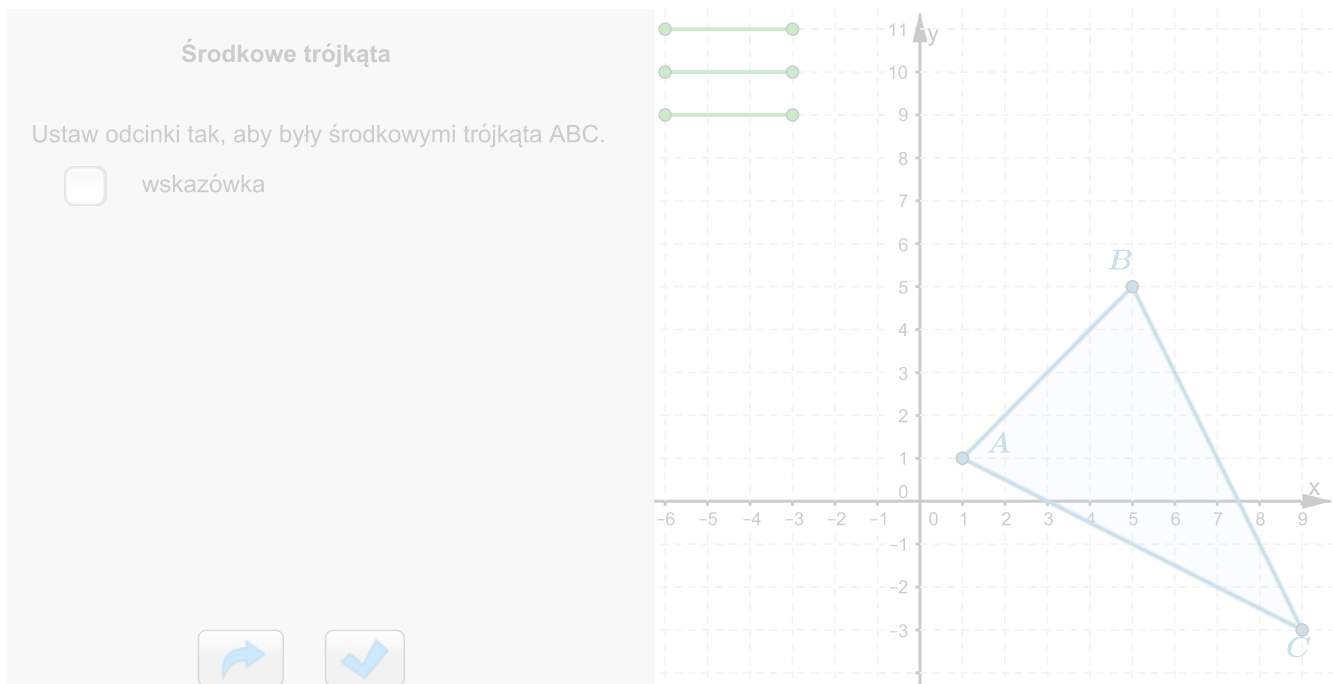


Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DMJZqerKj>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 6

Dany jest trójkąt ABC . Umieść dane odcinki tak, aby były środkowymi tego trójkąta.

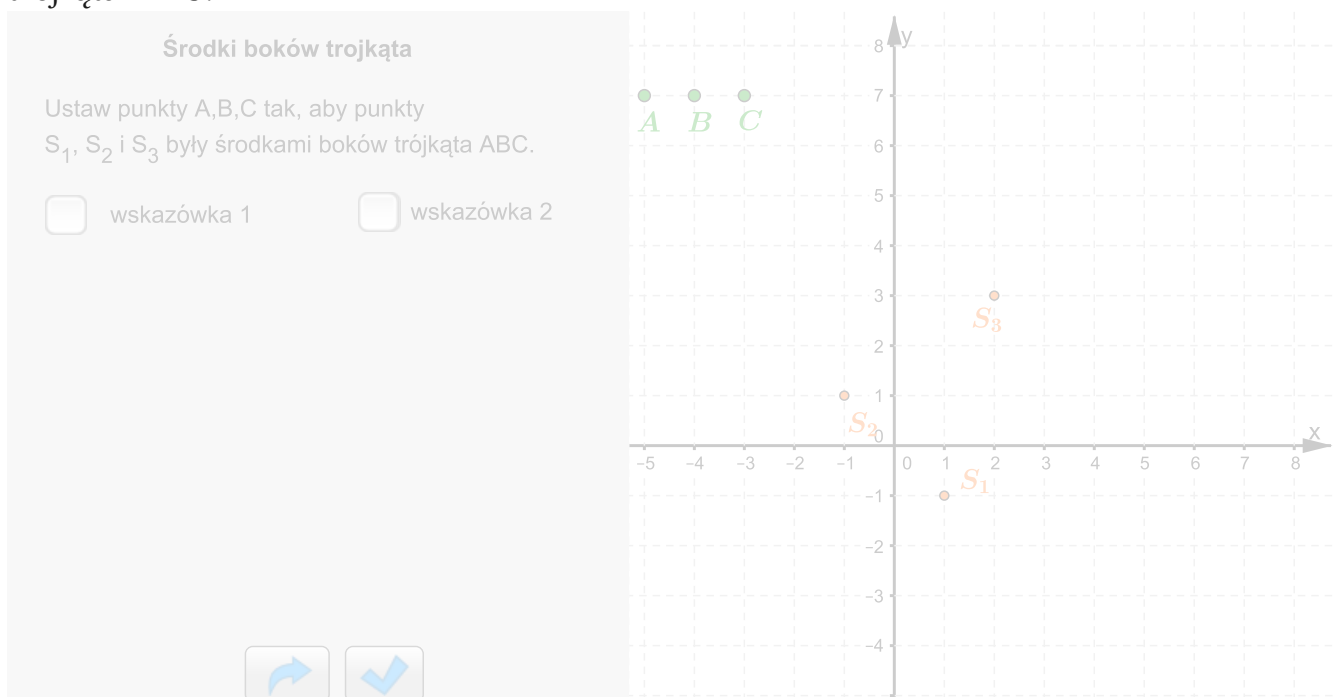


Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DMJZqerKj>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 7

Umieść punkty A , B i C tak, aby punkty S_1 , S_2 , i S_3 były środkami boków utworzonego trójkąta ABC.

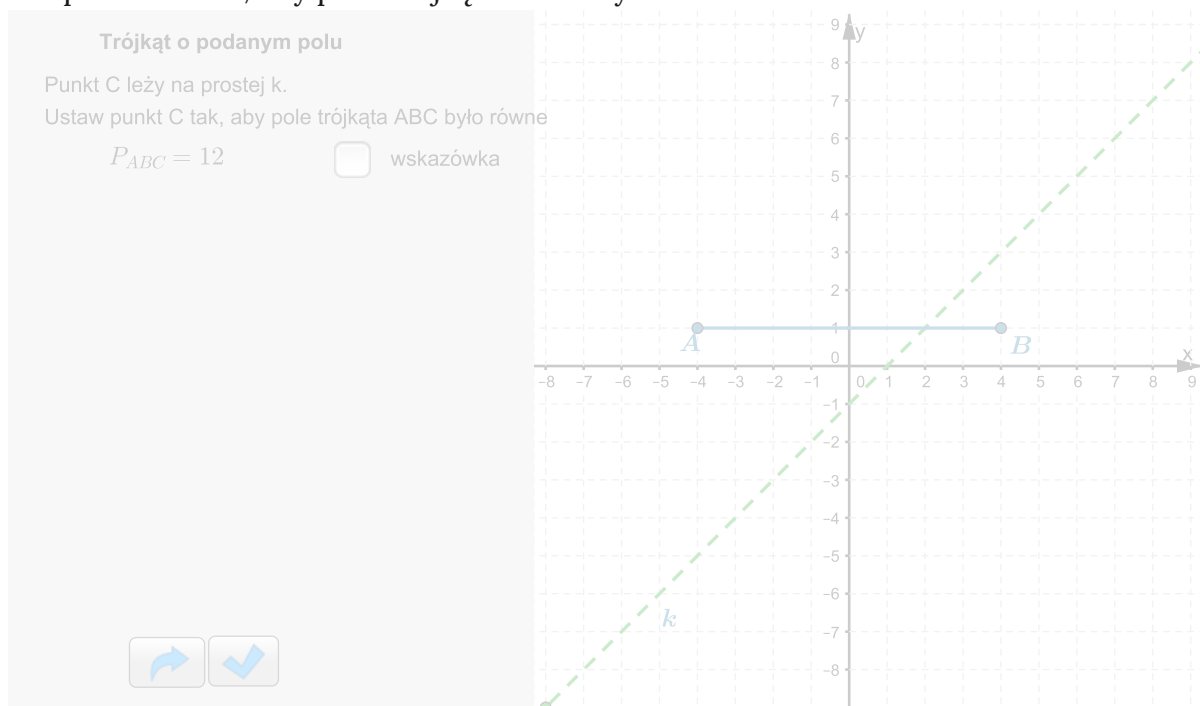


Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DMJZqerKj>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 8

Umieść punkt C tak, aby pole trójkąta ABC było równe 12.

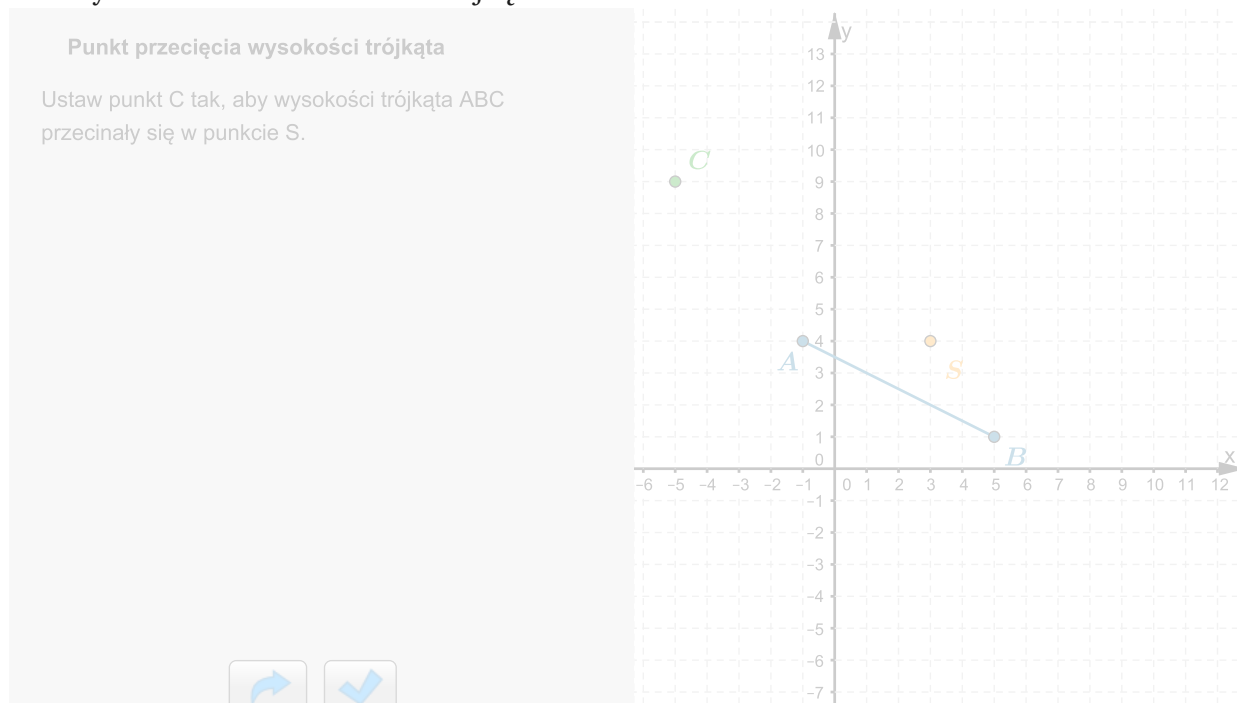


Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DMJZqerKj>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 9

Odcinek AB jest bokiem, a S jest punktem przecięcia wysokości (ortocentrum) trójkąta ABC . Wyznacz wierzchołek C trójkąta ABC .



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DMJZqerKj>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Równanie prostej w postaci ogólnej oraz w postaci kierunkowej

Ćwiczenie 1

Czy dana prosta jest wykresem funkcji?

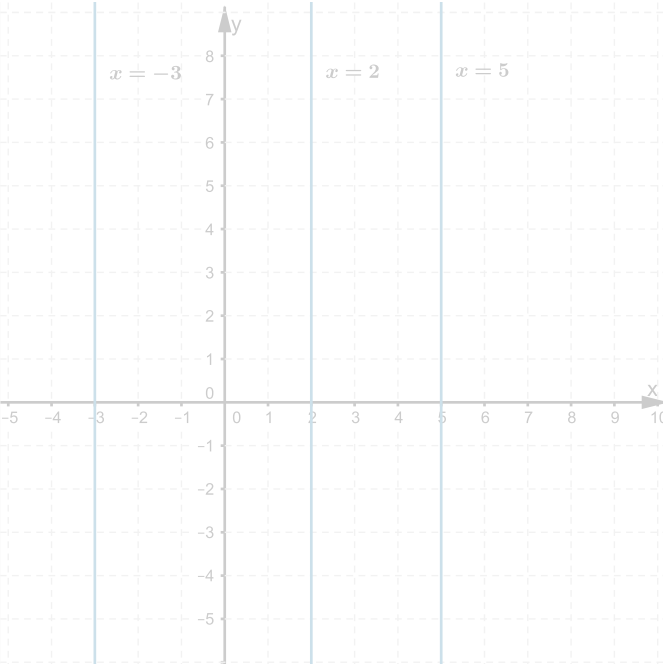
Czy prosta m jest wykresem funkcji?

krok 5 z 5

Czy każda prosta w układzie współrzędnych jest wykresem funkcji liniowej?

☐ tak ☒ nie

Dobrze.
Istnieją takie proste (pionowe), które nie są wykresami funkcji.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DCbDXANfK>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Już wiesz

W klasie pierwszej, w rozdziale poświęconym funkcji liniowej dowiedzieliśmy się, że:

- prosta prostopadła do osi Ox nie jest wykresem funkcji $f(x) = ax + b$
- jeżeli na wykresie funkcji liniowej leżą dwa różne punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, (gdzie $x_A \neq x_B$), to współczynnik kierunkowy prostej, będącej wykresem funkcji jest równy

$$a = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

natomiast wyraz wolny jest równy

$$b = y_A - ax_A$$

- każda prosta, będąca wykresem funkcji liniowej, która przechodzi przez punkt $A = (x_A, y_A)$ ma równanie $y = ax + (y_A - ax_A)$, co zapisujemy w postaci

$$y = a(x - x_A) + y_A$$

- każda prosta, będąca wykresem funkcji liniowej, która przechodzi przez dwa różne punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ ma równanie

$$y = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}(x - x_A) + y_A.$$

Ćwiczenie 2

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

☐ Współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty $K = (3, -2)$ i $L = (-2, 1)$ jest równy $-\frac{2}{5}$.

☐ Prosta przechodząca przez punkty $A = (-4, -2)$ i $B = (-3, -1)$ ma równanie $y = x + 2$.

☐ Punkty $A = (3, 6)$ i $B = (-3, 6)$ leżą na prostej o równaniu $y = 6$.

Ćwiczenie 3

Dopasuj równanie prostej do odpowiedniego rysunku.

1. $y = 3$

2. $y = \frac{1}{2}x$

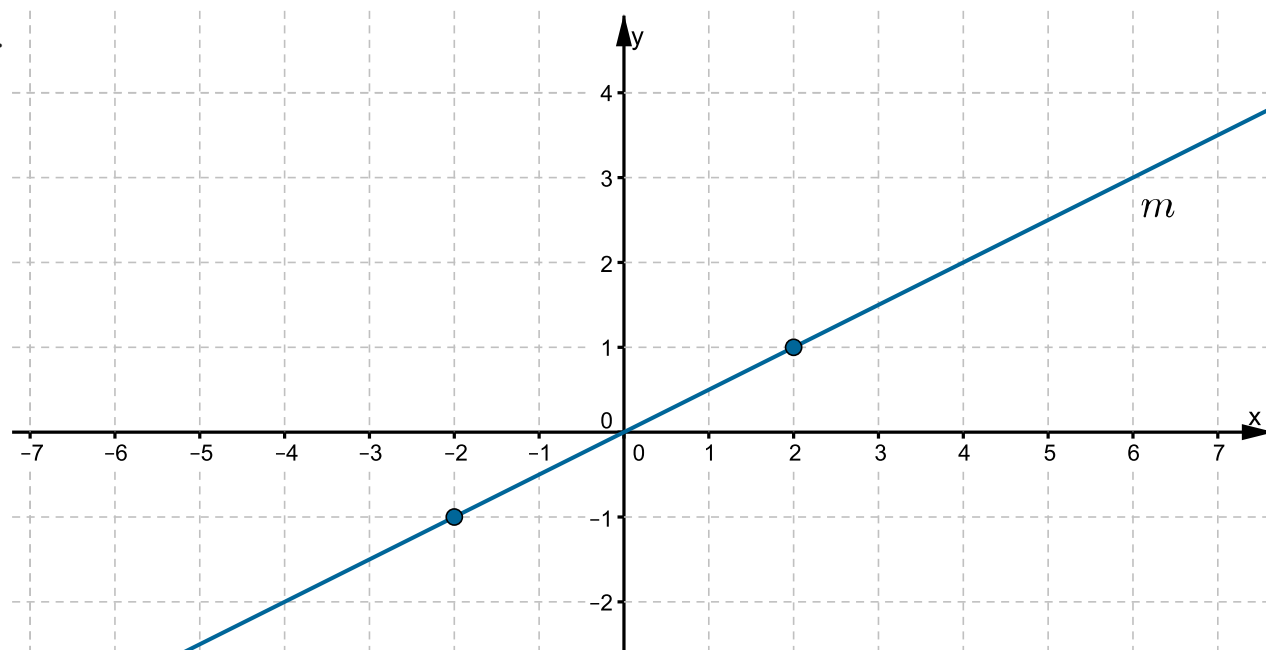
3. $y = -1$

4. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$

5. $y = 3x + 2$

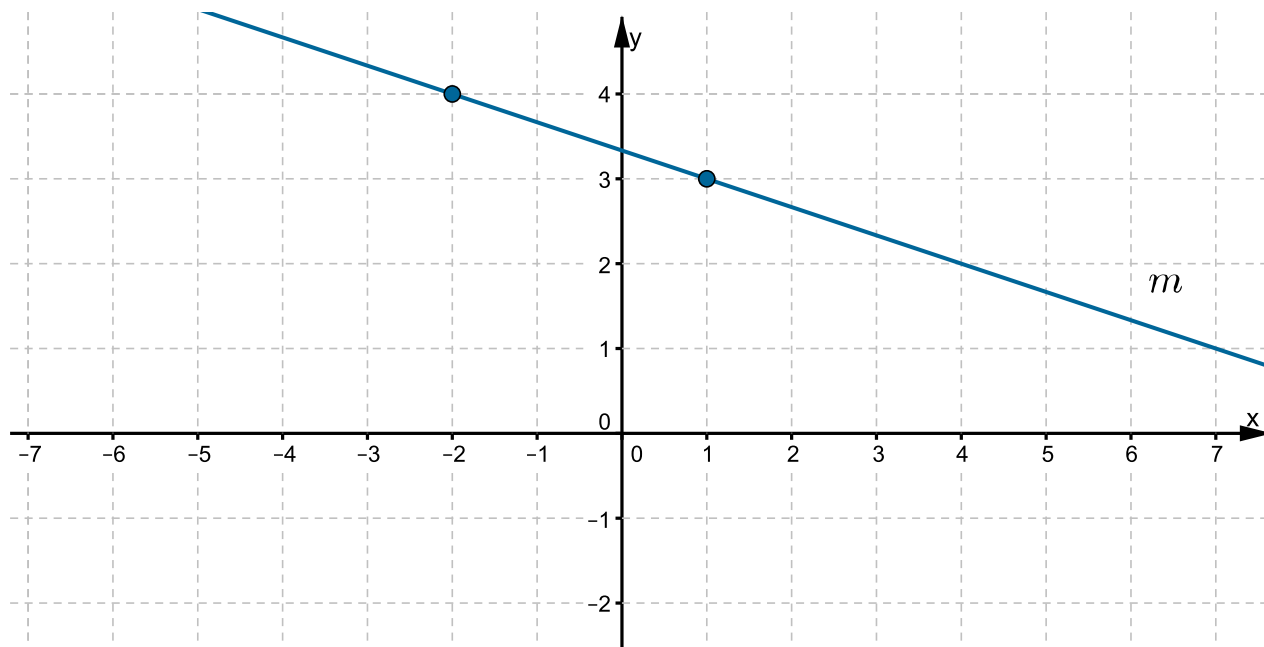
6. $y = -\frac{1}{5}x$

7.



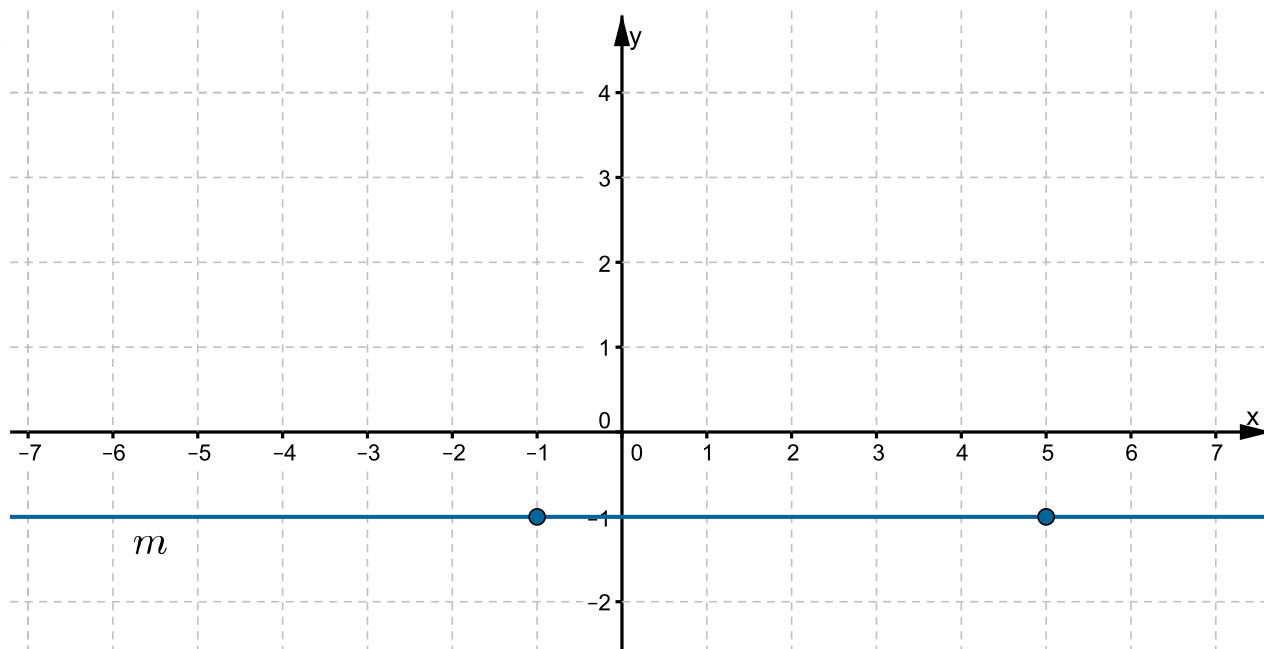
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

8.



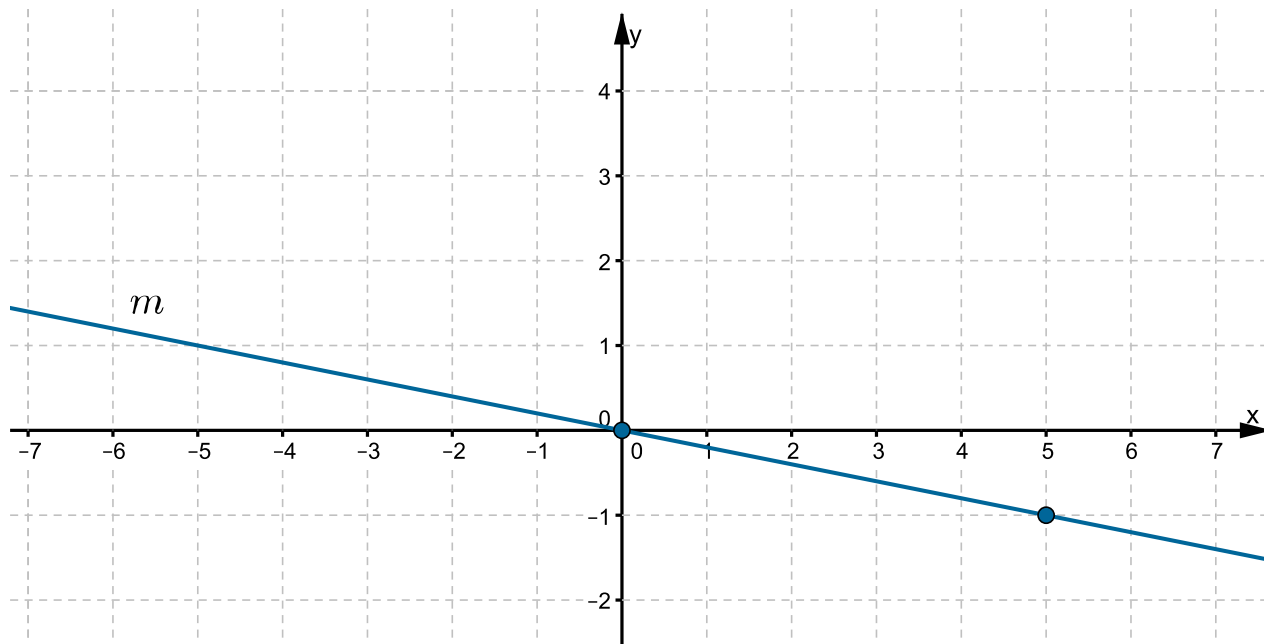
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

9.



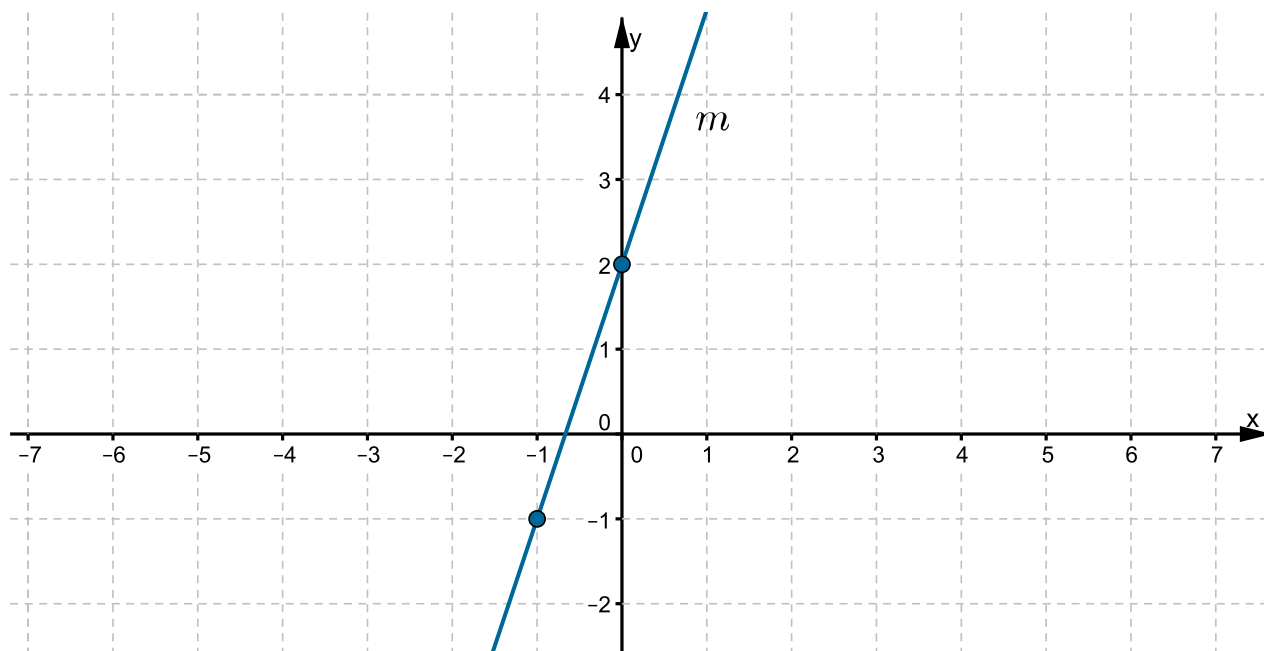
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

10.



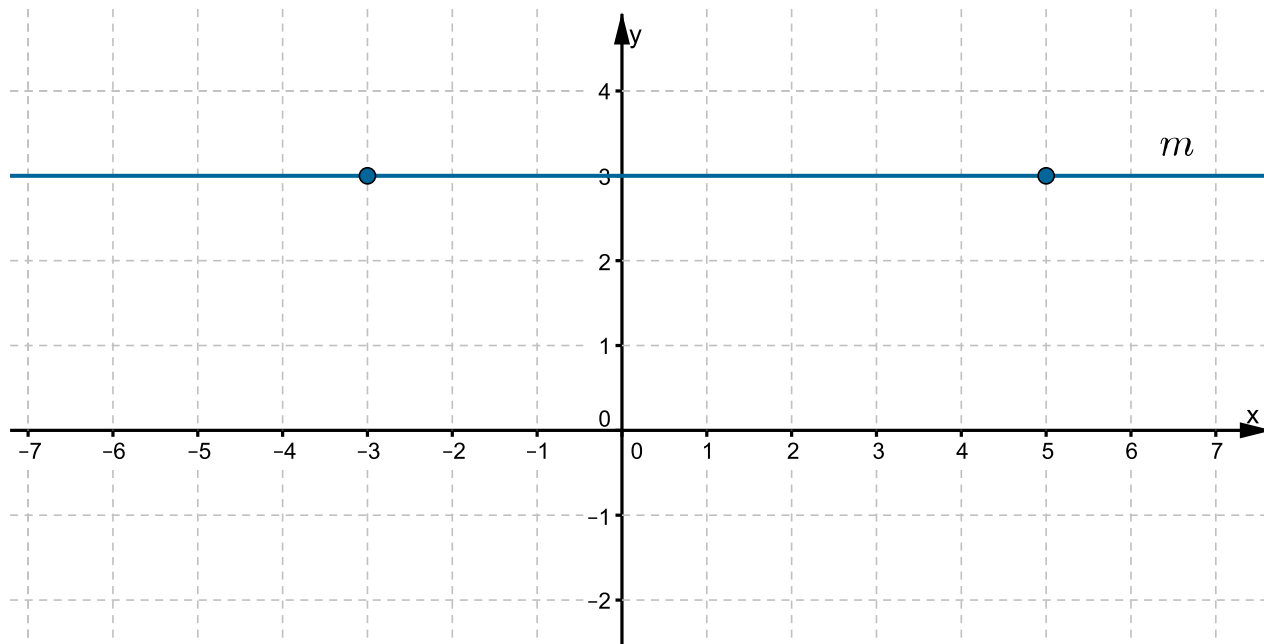
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

11.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

12.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4

Połącz w pary postać ogólną prostej z jej postacią kierunkową.

$$y = -x - 3$$

$$y = 3x + 1$$

$$-15x + 3y + 1 = 0$$

$$x + y + 3 = 0$$

$$-4x + 12y + 9 = 0$$

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{3}{4}$$

$$x - 7y + 5 = 0$$

$$y = \frac{1}{7}x + \frac{5}{7}$$

$$-3x + y - 1 = 0$$

$$y = 5x - \frac{1}{3}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5

Punkt $M = (1, -4)$ leży na prostej o równaniu

☐ $y = -3x - 1$

☐ $y = 3x + 1$

☐ $y = 3x - 1$

☐ $y = -3x + 1$

Przykład 1

Zapisujemy równanie prostej przechodzącej przez punkty $A = (4, 2)$ i $B = (-3, 1)$.
Współczynnik kierunkowy tej prostej jest równy

$$a = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{2 - 1}{4 - (-3)} = \frac{1}{7}$$

Równanie prostej możemy zapisać w postaci

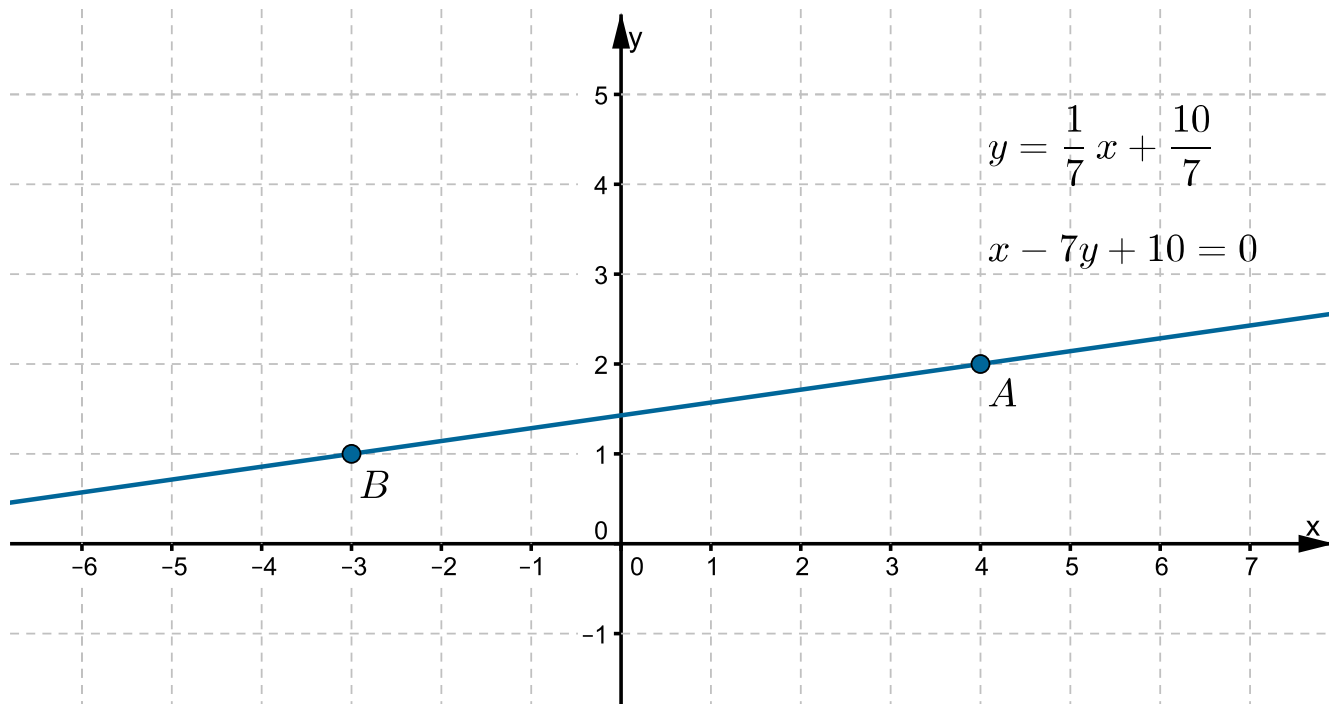
$$y = \frac{1}{7}x + b$$

Współczynnik b obliczymy, wstawiając do równania współrzędne dowolnego punktu należącego do tej prostej, np. $A = (4, 2)$

$$2 = \frac{1}{7} \cdot 4 + b,$$

więc $b = \frac{10}{7}$. Wynika z tego, że równanie prostej przechodzącej przez punkty A i B ma postać

$$y = \frac{1}{7}x + \frac{10}{7}.$$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zauważmy, że mnożąc obie strony równania prostej przez 7, otrzymamy inną postać tego równania:

$$7y = x + 10.$$

Po uporządkowaniu możemy zapisać

$$x - 7y + 10 = 0.$$

Jest to równanie tej samej prostej przechodzącej przez punkty A i B zapisane w postaci ogólnej.

Definicja: Równanie ogólne prostej

Równanie $Ax + By + C = 0$, gdzie A , B i C są liczbami rzeczywistymi oraz A i B nie są jednocześnie równe zero, nazywamy równaniem ogólnym prostej.

[Film dostępny na portalu epodreczniki.pl](#)

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

[Film dostępny na portalu epodreczniki.pl](#)

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Przykład 2

Wyznacz równanie ogólne prostej przechodzącej przez punkty

$A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, gdzie $x_A \neq x_B$. Zauważmy, że korzystając ze wzoru

$$y = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}(x - x_A) + y_A$$

otrzymamy postać kierunkową prostej.

Możemy jednak przekształcić wzór tak, aby można było otrzymać również postać ogólną prostej.

Od obu stron równania odejmiemy wyrażenie

$$\begin{aligned} & \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}(x - x_A) + y_A \\ y - y_A - \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}(x - x_A) &= 0 \end{aligned}$$

Mnożymy obie strony przez

$$\begin{aligned} & x_A - x_B (x_A - x_B \neq 0) \\ (y - y_A)(x_A - x_B) - (y_A - y_B)(x - x_A) &= 0 \end{aligned}$$

Zauważmy, że jeżeli $x_A = x_B$, to otrzymany wzór opisuje prostą równoległą do osi Oy, przechodzącą przez punkty A i B. Ponieważ $(x_A, y_A) \neq (x_B, y_B)$ i $x_A = x_B$, to $y_A \neq y_B$. Wówczas mamy

$$\begin{aligned} (y - y_A) \cdot 0 - (y_A - y_B)(x - x_A) &= 0 / : (y_A - y_B) \\ x - x_A &= 0 \\ x &= x_A \end{aligned}$$

Zapamiętaj!

Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ ma postać

$$(y - y_A)(x_A - x_B) - (y_A - y_B)(x - x_A) = 0$$

Przykład 3

- Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty $A = (-3, 4)$ i $B = (2, -1)$.

Po podstawieniu współrzędnych punktów A i B do wzoru

$$(y - y_A)(x_A - x_B) - (y_A - y_B)(x - x_A) = 0$$

otrzymamy $x - (-3)$

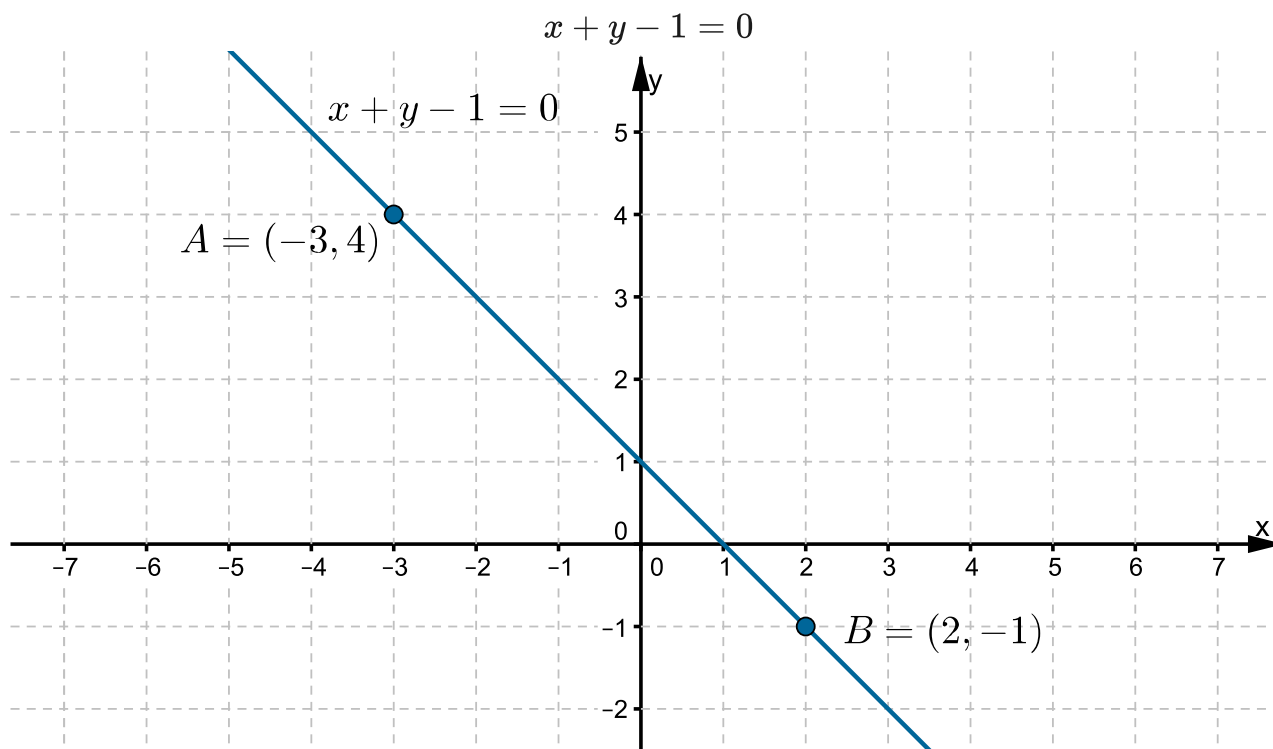
$$(y - 4)(-3 - 2) - [4 - (-1)][x - (-3)] = 0$$

$$-5(y - 4) - 5(x + 3) = 0$$

$$-5y + 20 - 5x - 15 = 0$$

Po uporządkowaniu

$$-5x - 5y + 5 = 0 / : (-5)$$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty $A = (5, 2)$ i $B = (5, -3)$.

Po podstawieniu współrzędnych punktów A i B do wzoru

$$(y - y_A)(x_A - x_B) - (y_A - y_B)(x - x_A) = 0$$

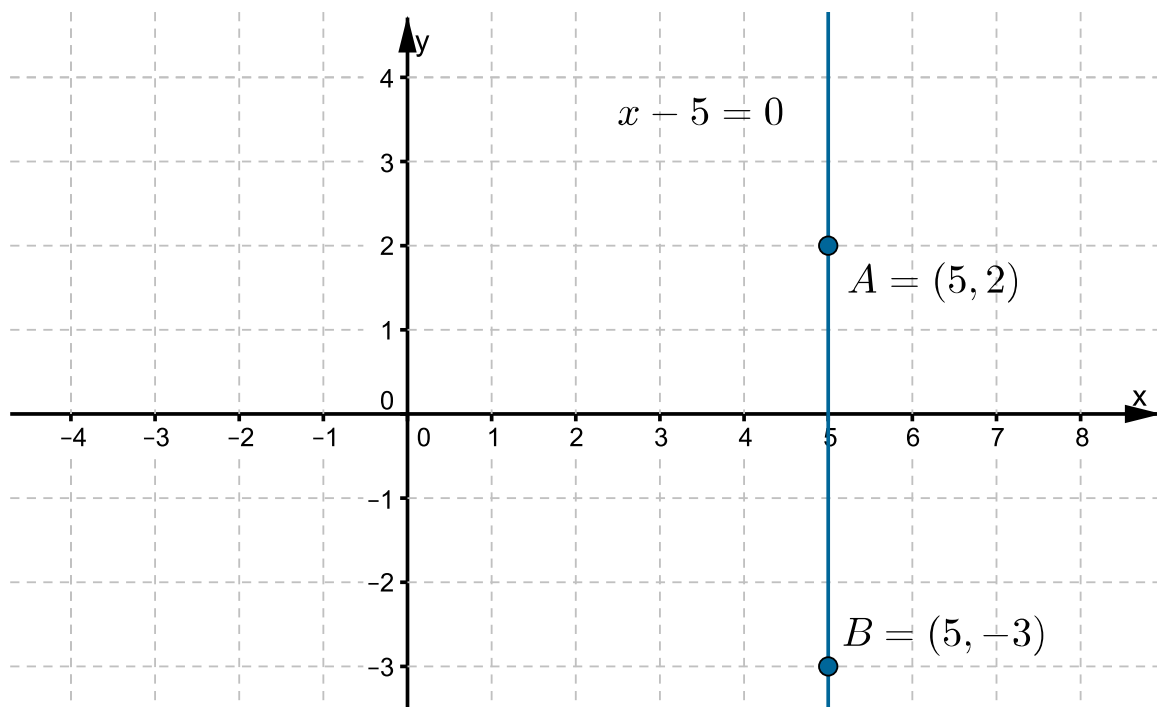
otrzymamy

$$(y - 2)(5 - 5) - (2 + 3)(x - 5) = 0$$

$$0 \bullet (y - 2) - 5(x - 5) = 0$$

Po uporządkowaniu otrzymaliśmy równanie prostej w postaci ogólnej

$$x - 5 = 0.$$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Jest to prosta prostopadła do osi Ox . Tej prostej nie można opisać równaniem w postaci kierunkowej, ponieważ nie jest ona wykresem funkcji liniowej.

Uwaga.

Równanie tej prostej wyznaczymy szybciej, jeśli zauważymy, że pierwsze współrzędne obu punktów są jednakowe i równe 5, a drugie są różne. Oznacza to, że równanie prostej przechodzącej przez te punkty ma postać $x = 5$, czyli $x - 5 = 0$.

Ćwiczenie 6

Połącz w pary proste z punktami przez nie przechodzącymi.

$$x = 2$$

$$A = (2, 3), B = (2, 0)$$

$$x + y = 1$$

$$A = (-2, -1), B = (3, 1)$$

$$-2x + 5y = -1$$

$$A = (-1, 2), B = (2, -1)$$

$$-x + 3y = 8$$

$$A = (-2, 2), B = (3, 2)$$

$$y = 2$$

$$A = (-2, 2), B = (1, 3)$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

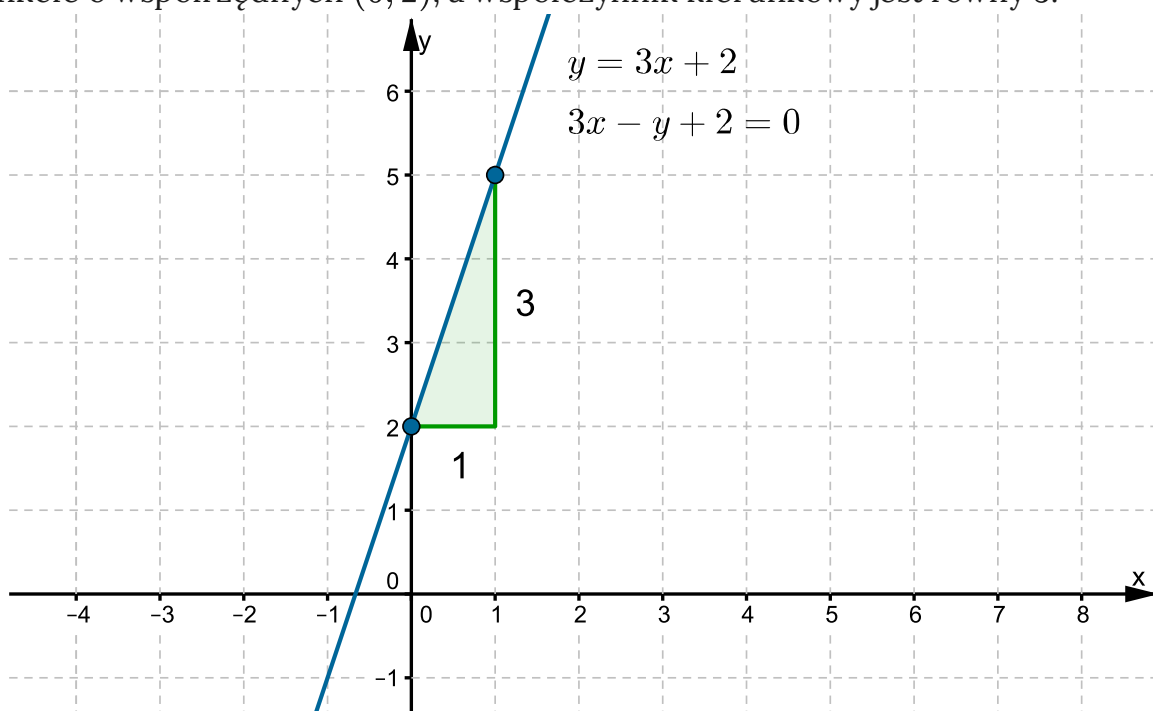
Przykład 4

Narysuj prostą o równaniu ogólnym $3x - y + 2 = 0$.

Narysowanie tej prostej będzie łatwiejsze, jeśli zapiszemy ją w postaci kierunkowej:

$$y = 3x + 2.$$

Z własności funkcji liniowej pamiętamy, że wykres funkcji $y = 3x + 2$ przecina oś Oy w punkcie o współrzędnych $(0, 2)$, a współczynnik kierunkowy jest równy 3.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7

Prosta o równaniu $-2x + 5y - 10 = 0$

☐ przechodzi przez punkt $A = (2, 3)$

☐ przecina oś Ox w punkcie $(-5, 0)$

☐ przecina oś Oy w punkcie $(0, 2)$

Ćwiczenie 8

Przeciągnij odpowiednie proste z dolnej sekcji do górnej.

proste pokrywające się z prostą o równaniu

$$6x + 2y = 4$$

$$x + y = 1$$

$$\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}y = \frac{4}{5}$$

$$2x + 2y + 2 = 0$$

$$3x + y - 2 = 0$$

proste pokrywające się z prostą o równaniu

$$100x + 100y = 100$$

$$-x - y = -1$$

$$3x + y = 2$$

$$x + \frac{1}{3}y = \frac{2}{3}$$

$$2x + 2y - 2 = 0$$

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{4} = 0$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9

Współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty $A = (30, 20)$ i $B = (40, 80)$ jest równy

☐ -6

☐ $-\frac{1}{6}$

☐ $\frac{1}{6}$

☐ 6

Ćwiczenie 10

Punkty $M = (\sqrt{3}, \sqrt{2})$ i $N = (-\sqrt{3}, \sqrt{2})$ leżą na prostej o równaniu

☐ $y = -\sqrt{2}$

☐ $x = \sqrt{3}$

☐ $x = -\sqrt{3}$

☐ $y = \sqrt{2}$

Ćwiczenie 11

Równanie prostej $-2x + 4y - 6 = 0$ można zapisać w postaci

☐ $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

☐ $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

☐ $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

☐ $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

Ćwiczenie 12

Punkt $M = (-2, 2)$ leży na prostej o równaniu $3x + By + 10 = 0$. Wynika z tego, że

☐ $B = -2$

☐ $B = -4$

☐ $B = 4$

☐ $B = 2$

Ćwiczenie 13

Punkt $K = (m + 1, 1)$ leży na prostej o równaniu $-20x + 33y + 127 = 0$. Wynika z tego, że

☐ $m = -7$

☐ $m = -3$

☐ $m = 7$

☐ $m = 3$

Ćwiczenie 14

Prosta m ma równanie $y = -\frac{2}{3}x + 2$. Wskaż równanie, które nie jest równaniem prostej m .

☐ $-8x + 12y + 24 = 0$

☐ $-2x - 3y + 6 = 0$

☐ $16x + 24y - 48 = 0$

☐ $2x + 3y - 6 = 0$

Ćwiczenie 15

Punkty $A = (-1, 2)$, $B = (3, 4)$, $C = (-1, 7)$ i $D = (-5, 4)$ są wierzchołkami czworokąta ABCD. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie o współrzędnych

☐ $S = (-3, 7)$

☐ $S = (-1, 4)$

☐ $S = (3, 2)$

☐ $S = (-5, 7)$

Ćwiczenie 16

Dany jest punkt $A = (2, -1)$ oraz prosta k o równaniu $y = 3x - 4$. Na prostej k leży taki punkt B , że prosta AB jest prostopadła do osi O*x* układu współrzędnych. Współrzędne punktu B są równe

☐ $B = (2, 2)$

☐ $B = (2, -2)$

☐ $B = (3, -1)$

☐ $B = (-4, -1)$

Ćwiczenie 17

Punkty $A = (0, 0)$, $B = (0, 150)$, $C = (50, 50)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Boki AC i BC są zawarte w prostych o równaniach

☐ $AC : y = x, BC : y = 2x + 150$

☐ $AC : y = -x, BC : y = 2x + 150$

☐ $AC : y = -x, BC : y = -2x + 150$

☐ $AC : y = x, BC : y = -2x + 150$

Ćwiczenie 18

Punkty $A = (-1, 2)$, $B = (3, 4)$, $C = (-1, 7)$ i $D = (-5, 4)$ są wierzchołkami czworokąta ABCD. Przekątne AC i BD zawierają się w prostych o równaniach

☐ $AC : x - 1 = 0, BD : y - 4 = 0$

☐ $AC : x + 1 = 0, BD : y + 4 = 0$

☐ $AC : x + 1 = 0, BD : y - 4 = 0$

☐ $AC : x - 1 = 0, BD : y + 4 = 0$

Ćwiczenie 19

Wyznacz równanie prostej w postaci ogólnej, która przechodzi przez punkty

1. $A = (0,0)$ i $B = (-4,1)$

2. $A = (2,4)$ i $B = (-2,-3)$

3. $A = (-5,2)$ i $B = (-5,-6)$

4. $A = (124,48)$ i $B = (-124,-48)$

5. $A = (\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$ i $B = (5\sqrt{3}, 4\sqrt{3})$

Ćwiczenie 20

Wyznacz współrzędne punktu M , w którym przecinają się proste o równaniach

1. $m : -2x + 5y - 12 = 0$ i $k : x + 3y - 5 = 0$

2. $m : -2x + 3y + 1 = 0$ i $k : x - 5 = 0$

3. $m : -x + 3y - 6 = 0$ i $k : 2x + y - 2 = 0$

4. $m : x + 4y + 23 = 0$ i $k : 3x - 2y - 1 = 0$

Ćwiczenie 21

Boki trójkąta ABC zawierają się w prostych AC, AB i BC. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta, jeśli

1. AB : $y + 4 = 0$, AC : $5x + 3y - 8 = 0$ oraz BC : $x - y = 0$
2. AB : $x + y + 2 = 0$, AC : $-3x + 2y + 9 = 0$ oraz BC : $-x + 9y - 22 = 0$
3. AB : $-x + 2y - 10 = 0$, AC : $x - 4 = 0$ oraz BC : $y - 3 = 0$

Ćwiczenie 22

Wyznacz równania przekątnych czworokąta o wierzchołkach w punktach: $A = (-4, -2)$, $B = (5, -5)$, $C = (4, 2)$ i $D = (-2, 4)$. Oblicz współrzędne punktu przecięcia przekątnych czworokąta ABCD.

Ćwiczenie 23

Wyznacz wszystkie wartości m , tak aby prosta

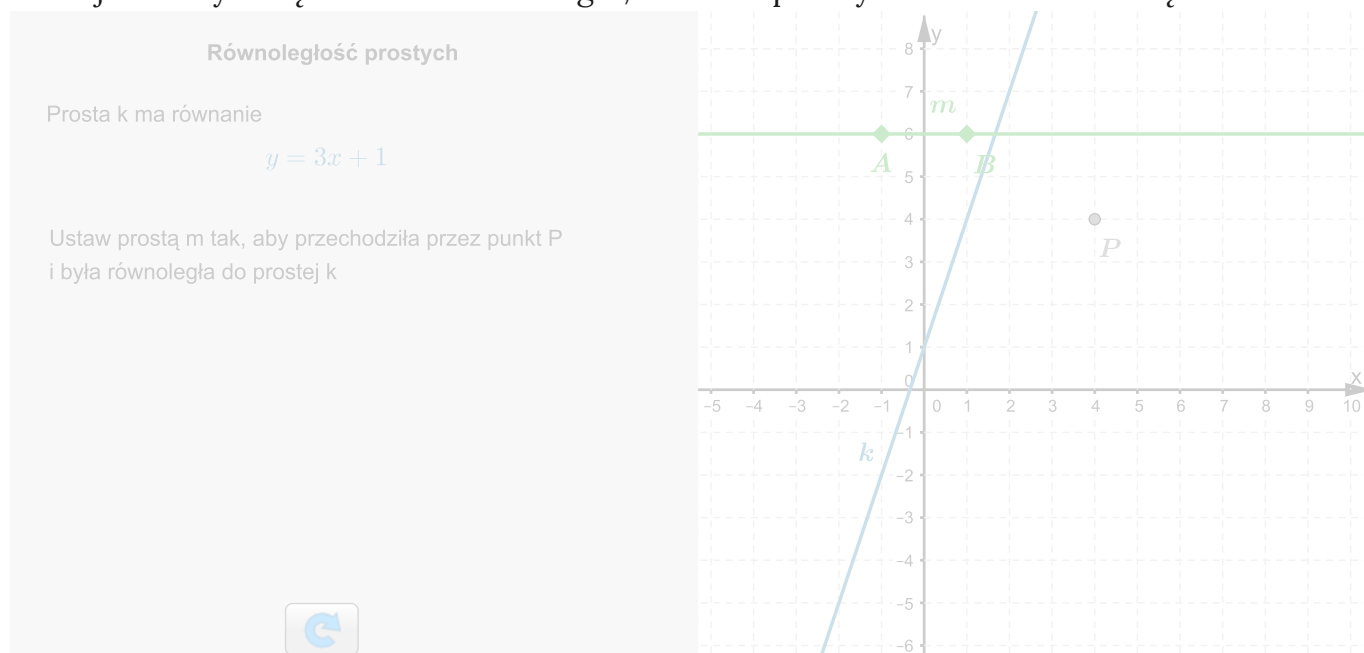
1. $3x - (m - 1)y + 3 = 0$ przechodziła przez punkt $K = (-5, 4)$
2. $3(m + 3)x + (m + 4)y + 5 = 0$ była prostopadła do osi Ox
3. $(m^2 - 25)x - 2(m - 2)y - 1 = 0$ była prostopadła do osi Oy

Ćwiczenie 24

Uzasadnij, że nie istnieje wartość m , dla której prosta $(m^2 - 9)x + (m - 3)y + m + 3 = 0$ jest prostopadła do osi Ox .

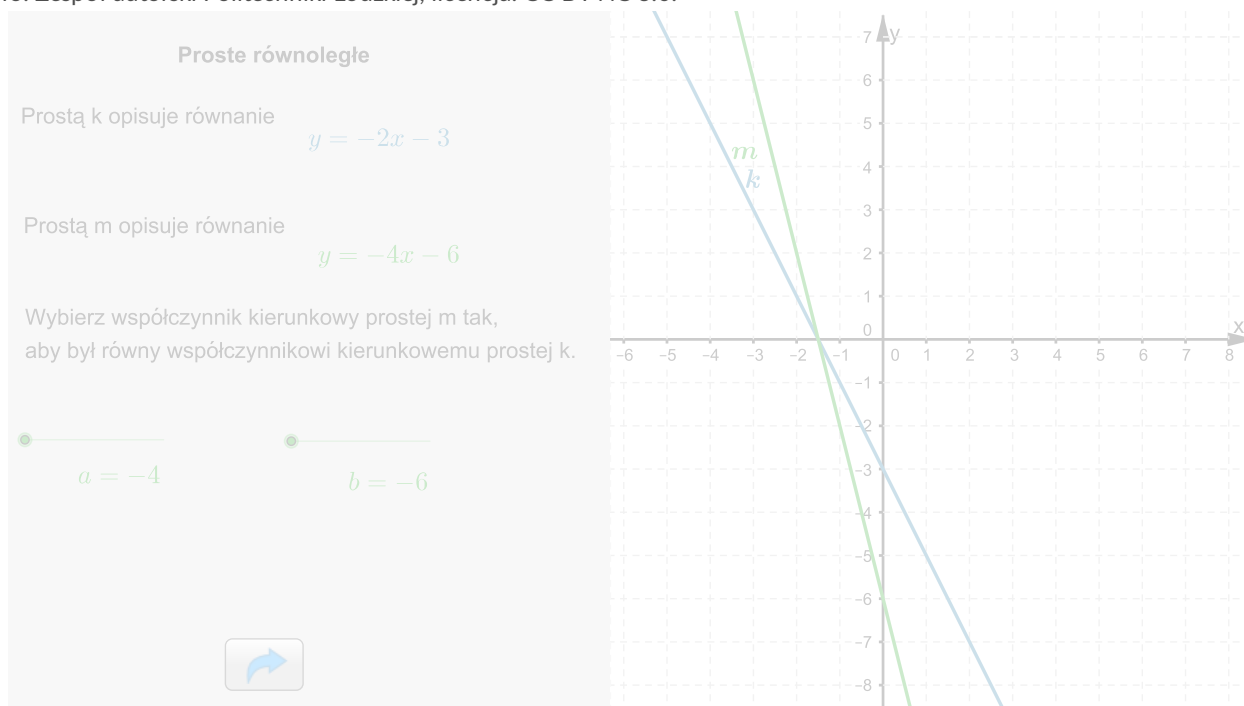
Proste równoległe, proste prostopadłe

W klasie pierwszej, w rozdziale o własnościach funkcji liniowej ustaliliśmy, że jeżeli wykresy funkcji liniowych są do siebie równoległe, to ich współczynniki kierunkowe są równe.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DePf7G83i>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DePf7G83i>

Twierdzenie: Proste równoległe

Proste o równaniach

- $m : y = a_1x + b_1$
- $k : y = a_2x + b_2$

są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy ich współczynniki kierunkowe są równe.

$$a_1 = a_2$$

Przykład 1

Wyznacz równanie prostej k , która jest równoległa do prostej o równaniu $y = -3x + 4$ i przechodzi przez punkt

$$P = (-2, 3).$$

Ponieważ proste są równoległe, to ich współczynniki są równe. Zatem równanie prostej k możemy zapisać

$$y = -3x + b.$$

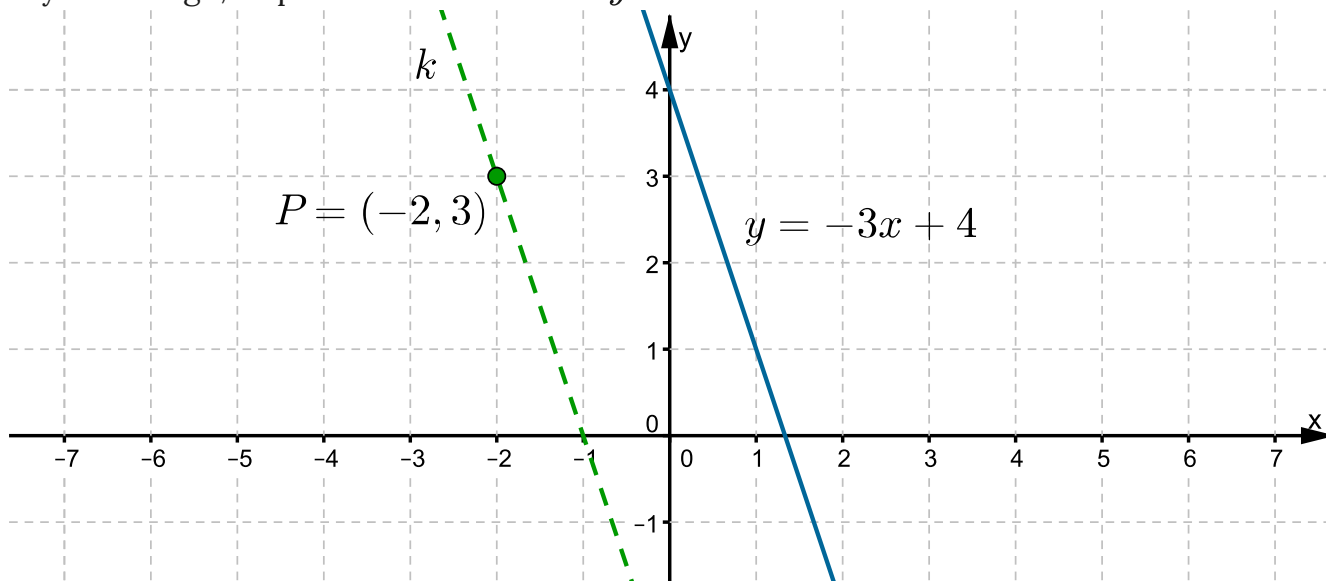
Współrzędne punktu $P = (-2, 3)$ spełniają równanie prostej $y = -3x + b$. Po ich podstawieniu do równania otrzymujemy

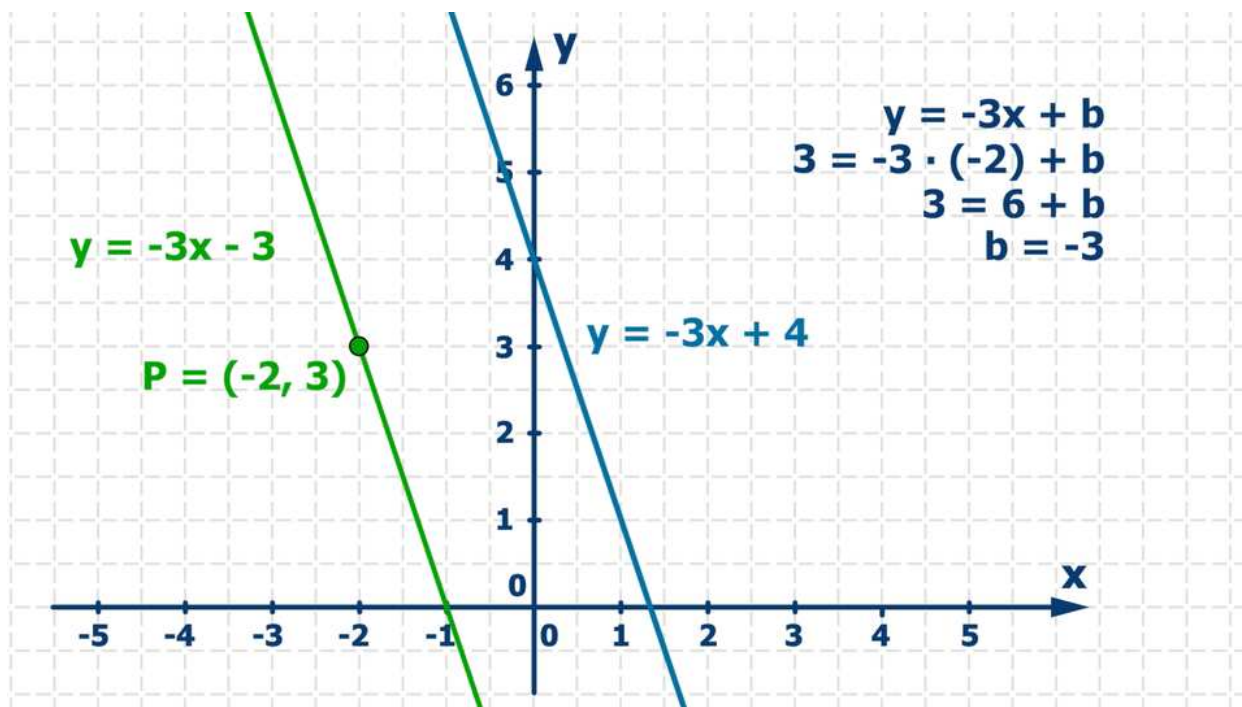
$$3 = -3 \cdot (-2) + b,$$

więc

$$b = -3.$$

Wynika z tego, że prosta k ma równanie $y = -3x - 3$.





Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

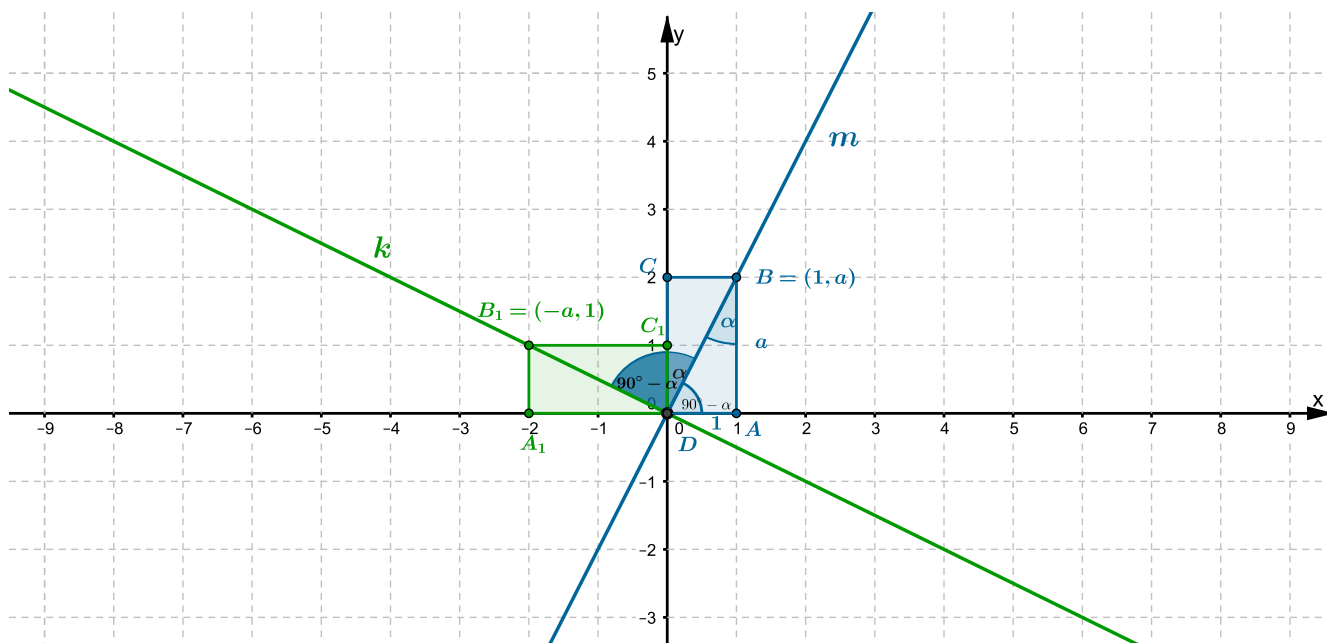
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Przykład 2

Dana jest prosta m o równaniu $y = ax (a \neq 0)$. Ta prosta jest przekątną prostokąta $ABCD$, w którym $B = (1, a)$ i $D = (0, 0)$. Zbudujmy prostokąt $A_1B_1C_1D$, w którym $B_1 = (-a, 1)$.

Oba prostokąty są przystające, a zatem odpowiednie kąty między bokami i przekątnymi są równe.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wynika z tego, że kąt między prostymi zawierającymi przekątne prostokątów jest sumą dwóch kątów

$$\beta = \alpha + (90^\circ - \alpha),$$

czyli

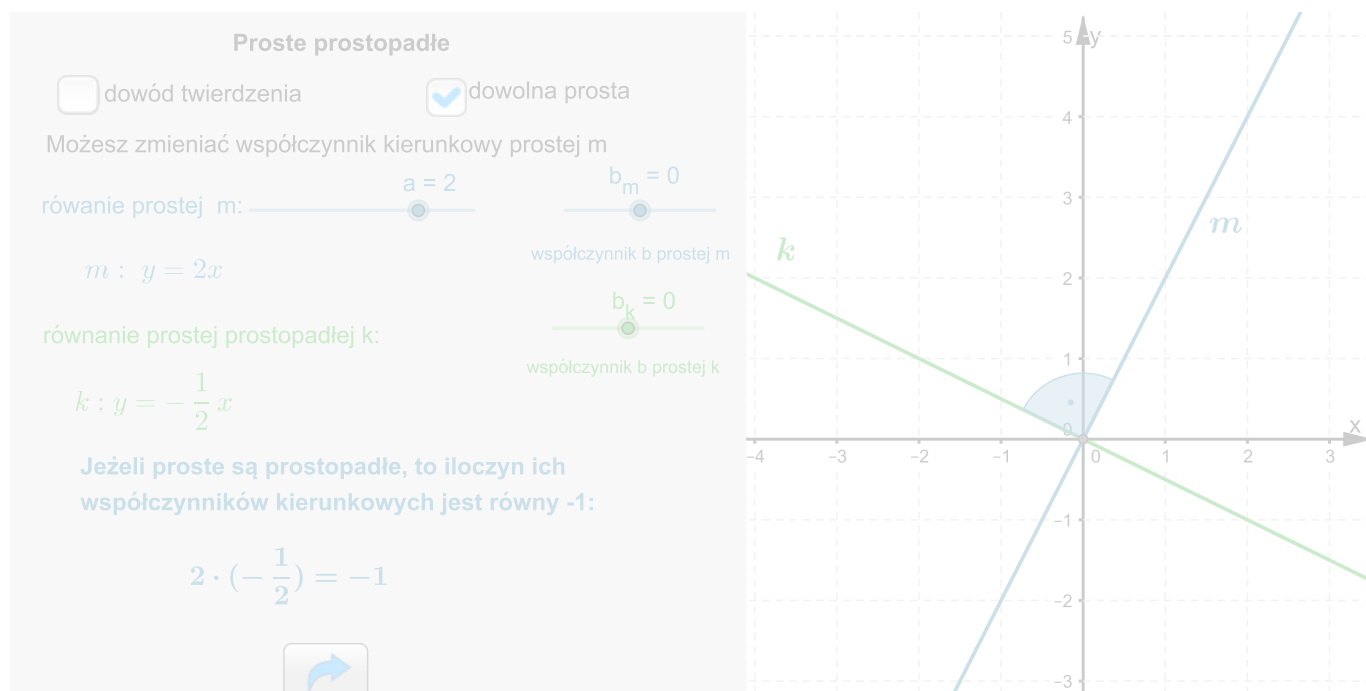
$$\beta = 90^\circ.$$

Zatem proste k i m są prostopadłe.

Prosta k ma równanie $y = a_1x$, a punkt B_1 ma współrzędne $(-a, 1)$. Po podstawieniu współrzędnych punktu B_1 do równania prostej otrzymamy

$$1 = a_1 \cdot (-a)$$

$$-1 = a_1 \cdot a.$$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DePf7G83i>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Twierdzenie: Proste prostopadłe

Proste o równaniach $m : y = a_1x + b_1$ oraz $k : y = a_2x + b_2$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy ich współczynniki kierunkowe spełniają warunek

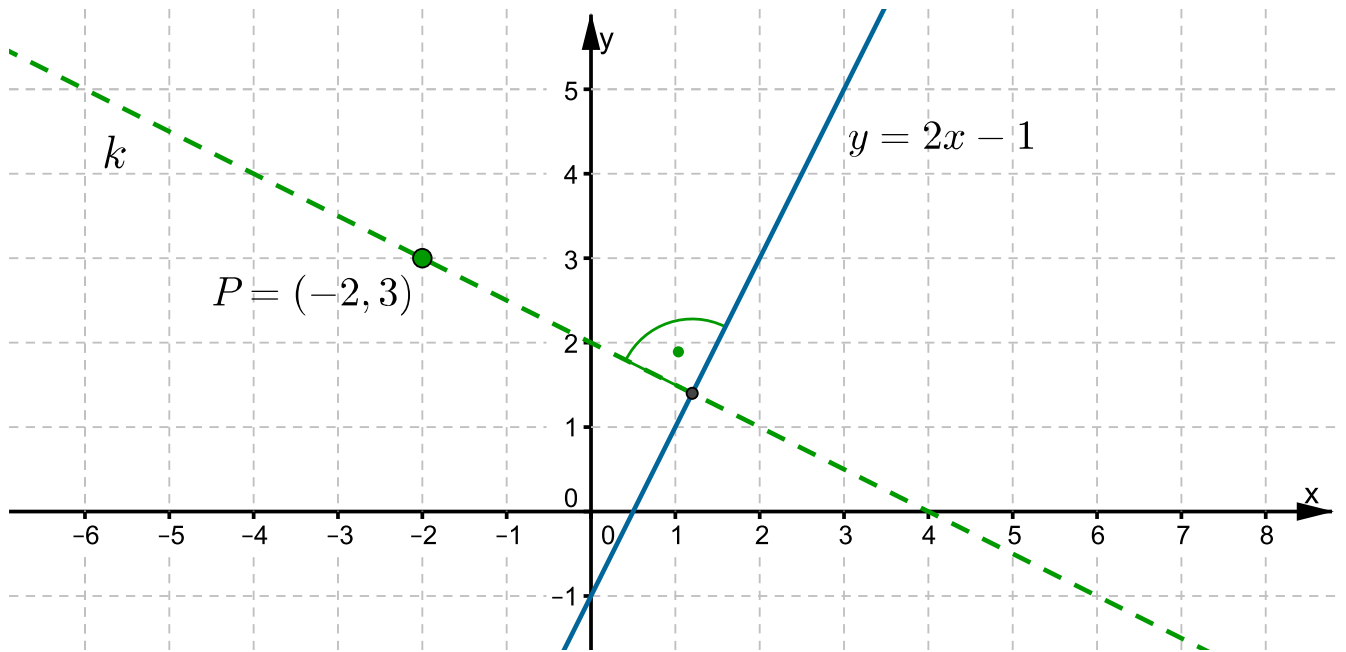
$$a_1 \bullet a_2 = -1$$

Ważne!

Jeśli współczynnik kierunkowy jednej z prostych jest równy 0, a więc prosta jest równoległa do osi Ox, to prosta do niej prostopadła jest równoległa do osi Oy i opisana jest równaniem $x = x_0$.

Przykład 3

Napisz równanie prostej k , która jest prostopadła do prostej o równaniu $y = 2x - 1$ i przechodzi przez punkt $P = (-2, 3)$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Współczynnik kierunkowy a prostej $y = 2x - 1$ jest równy 2. Równanie prostej k ma postać

$$y = a_1x + b.$$

Ponieważ proste są prostopadłe, to ich współczynniki kierunkowe spełniają warunek $-1 = a \cdot a_1$. Po podstawieniu $a = 2$ otrzymamy

$$-1 = 2 \cdot a_1$$

$$a_1 = -\frac{1}{2}$$

Równanie prostej k możemy zapisać w postaci $y = -\frac{1}{2}x + b$.

Współrzędne punktu $P = (-2, 3)$ spełniają równanie prostej $y = -\frac{1}{2}x + b$. Po ich podstawieniu do równania otrzymujemy

$$3 = -\frac{1}{2} \cdot (-2) + b,$$

więc

$$b = 2$$

Wynika z tego, że prosta k ma równanie

$$y = -\frac{1}{2}x + 2.$$

Przykład 4

Sprawdź, czy proste o równaniach $5x + 2y - 15 = 0$ i $-x + 3y - 10 = 0$ są prostopadłe.

Oba równania zapiszemy w postaci kierunkowej.

$$y = -\frac{5}{2}x + \frac{15}{2}$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$$

Współczynniki kierunkowe tych prostych są równe $a_1 = -\frac{5}{2}$ i $a_2 = \frac{1}{3}$.

Sprawdzimy, czy spełniony jest warunek $a_1 \bullet a_2 = -1$.

Otrzymujemy $-\frac{5}{2} \bullet \frac{1}{3} \neq -1$. Wynika z tego, że proste o równaniach

$$y = -\frac{5}{2}x + \frac{15}{2}$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$$

nie są prostopadłe.

Przykład 5

Punkty $A = (1, 5)$, $B = (4, 0)$ i $C = (5, 4)$ są wierzchołkami trójkąta. Wykaż, że trójkąt ABC jest prostokątny.

Aby wykazać, że ten trójkąt jest prostokątny, wystarczy stwierdzić, że dwie proste zawierające boki trójkąta są prostopadłe.

Współczynniki kierunkowe prostych zawierających boki trójkąta obliczymy ze wzoru

$$a = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}.$$

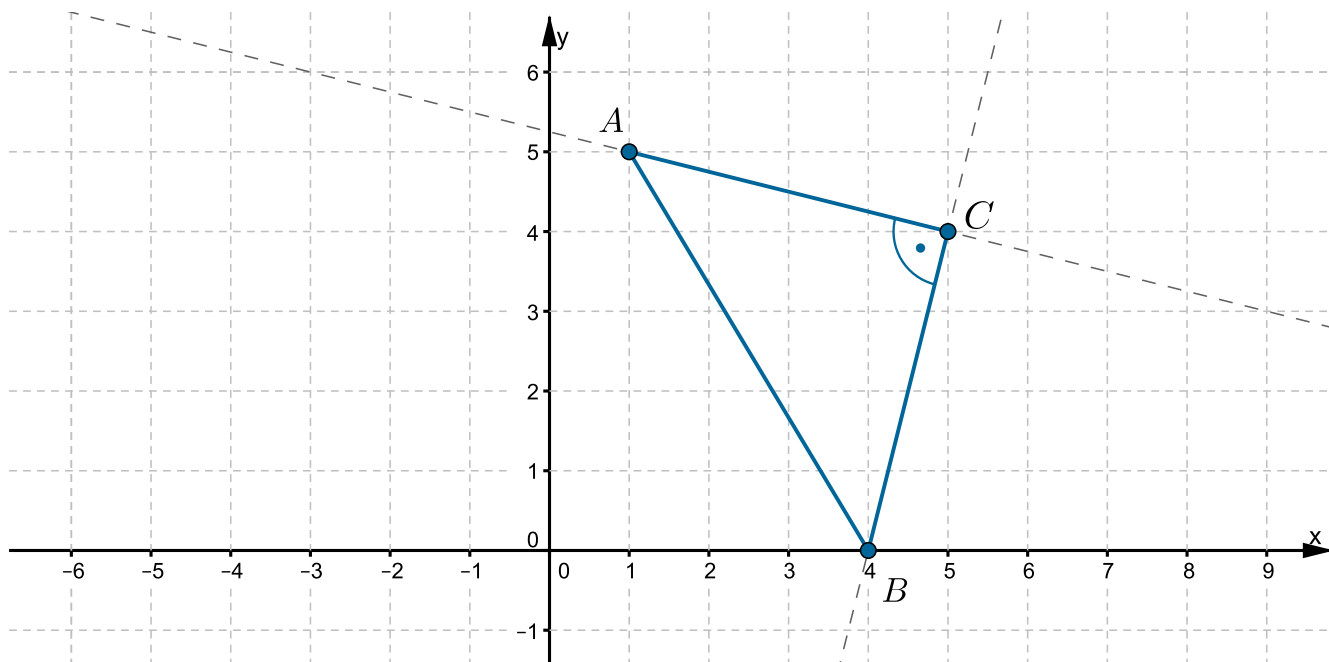
Tabela. Dane

bok AB	bok AC	bok BC
$a_{AB} = \frac{0-5}{4-1} = -\frac{5}{3}$	$a_{AC} = \frac{4-5}{5-1} = -\frac{1}{4}$	$a_{BC} = \frac{4-0}{5-4} = \frac{4}{1} = 4$

Dla prostych zawierających boki AC i BC zachodzi warunek

$$a_{AC} \bullet a_{BC} = -\frac{1}{4} \bullet 4 = -1.$$

Wynika z tego, że te proste są prostopadłe. Zatem trójkąt ABC jest prostokątny.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 6

Wierzchołek C trójkąta ABC ma współrzędne $(1, 6)$, a bok AB leży na prostej opisanej równaniem $x + 6y - 8 = 0$. Wyznacz równanie prostej m zawierającej wysokość trójkąta, opuszczoną na bok AB .

Równanie prostej, na której leży bok AB , można zapisać w postaci kierunkowej

$$y = -\frac{1}{6}x + 1\frac{1}{3}.$$

Prosta, zawierająca wysokość opuszczoną na ten bok, jest do niej prostopadła, czyli jej współczynnik kierunkowy musi spełniać warunek

$$-\frac{1}{6} \cdot a_1 = -1.$$

Zatem

$$a_1 = 6.$$

Równanie prostej m możemy zapisać w postaci

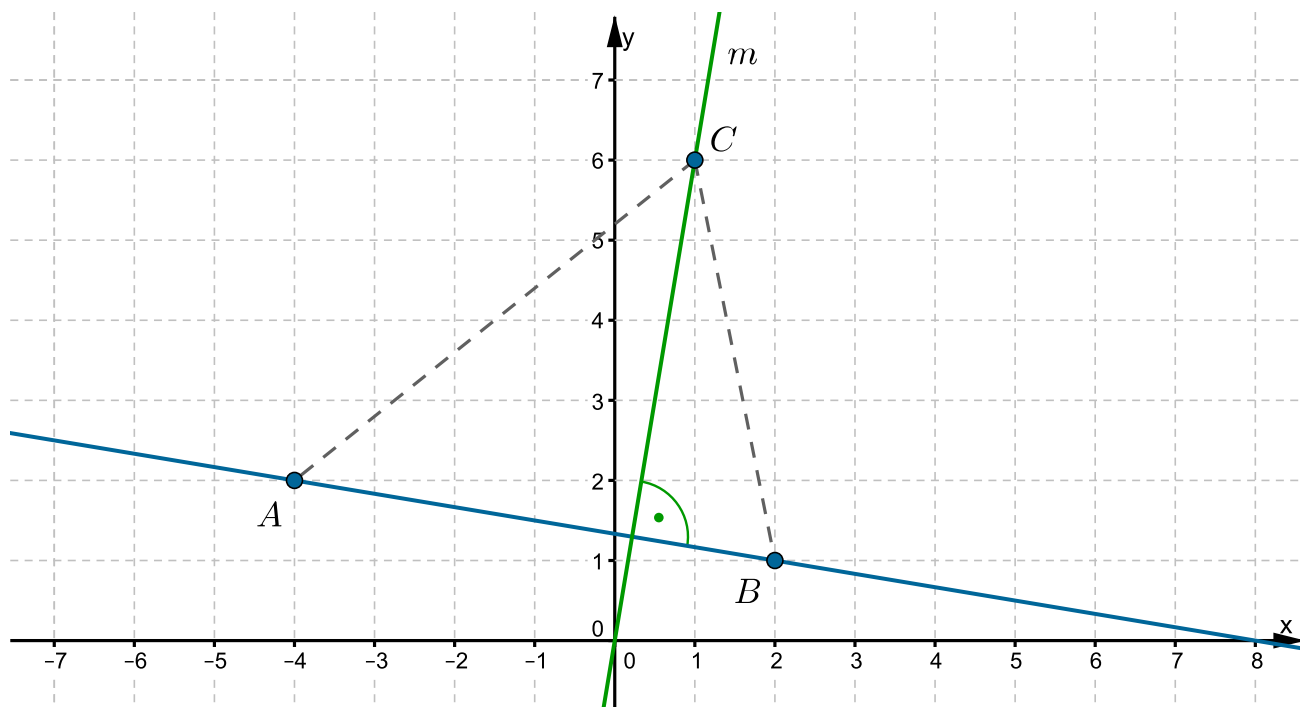
$$y = 6x + b.$$

Wierzchołek C trójkąta leży na tej prostej, a jego współrzędne spełniają to równanie. Możemy obliczyć wartość współczynnika b

$$6 = 6 \cdot 1 + b$$

$$b = 0$$

Równanie prostej zawierającej wysokość trójkąta, opuszczoną na bok AB , ma postać $y = 6x$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 7

Dla jakiej wartości m prosta $y = \frac{1}{3}x - 2$ jest prostopadła do prostej $y = (m^2 - 12)x + m - 1$?

Ponieważ proste są do siebie prostopadłe, to spełniony jest warunek

$$\frac{1}{3} \cdot (m^2 - 12) = -1$$

$$m^2 - 12 = -3$$

$$m^2 = 9$$

Wynika z tego, że proste $y = \frac{1}{3}x - 2$ i $y = (m^2 - 12)x + m - 1$ są prostopadłe dla $m = 3$ lub $m = -3$.

Równania tych prostych to $y = -3x + 2$ i $y = -3x - 4$.

Ćwiczenie 1

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2

1. Wyznacz równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $y = \frac{2}{3}x - 4$ i przechodzącej przez punkt $A = (-3, 5)$.
2. Wyznacz równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $6x - 2y + 3 = 0$ i przechodzącej przez punkt $B = (2, 1)$.
3. Uzasadnij, że czworokąt ABCD o wierzchołkach w punktach $A = (2, -2)$, $B = (6, 0)$, $C = (5, 3)$ i $D = (3, 2)$ jest trapezem.

Ćwiczenie 3

Bok BC równoległoboku ABCD jest zawarty w prostej o równaniu $y = -2x - 1$, a bok AB jest zawarty w prostej o równaniu $y = -1$. Wierzchołek D ma współrzędne $D = (3, 3)$. Wyznacz równania prostych zawierających boki AD i CD tego równoległoboku.

Ćwiczenie 4

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8

1. Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej o równaniu $y = \frac{3}{5}x - 2$ i przechodzącej przez punkt $A = (3, 1)$.
2. Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej o równaniu $-x + 2y + 6 = 0$ i przechodzącej przez punkt $B = (1, -1)$.
3. Uzasadnij, że trójkąt ABC o wierzchołkach $A = (1, -1)$, $B = (-3, 1)$ i $C = (4, 5)$ jest prostokątny.

Ćwiczenie 9

Połącz w pary równania prostych prostopadłych.

$$-x - 2y = -4$$

$$y = 2x + 1$$

$$-x + 3y = 10$$

$$y = -4x + 1$$

$$-x + \frac{1}{2}y = 2\frac{1}{2}$$

$$y = -3x + 1$$

$$x - 4y = -1$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 1$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10

Połącz w pary równanie prostej z równaniem prostej równoległej przechodzącej przez punkt A.

$$-2x + 3y = -5$$

$$-2x + 3y = 4, A = (1, 2)$$

$$-2x + y = -5$$

$$-4x + 3y = -4, A = (-3, -1)$$

$$-4x + 3y = 9$$

$$4x + 3y = 4, A = (0, 0)$$

$$4x + 3y = 0$$

$$-2x + y = -4, A = (3, 1)$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11

Wierzchołki trójkąta ABC to punkty o współrzędnych: $A = (4, 1)$, $B = (0, 3)$, $C = (2, -5)$. Wyznacz równanie prostej zawierającej wysokość trójkąta poprowadzoną z wierzchołka A.

Ćwiczenie 12

Współczynnik kierunkowy prostej równoległej do prostej $y = -2x + 3$ jest równy

☐ 2

☐ $-\frac{1}{2}$

☐ -2

☐ $\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 13

Wskaż równanie prostej równoległej do prostej $y = 3x - 1$ i przechodzącej przez punkt $P(-2, -3)$.

☐ $y = 3x - 3$

☐ $y = 3x + 3$

☐ $y = -3x - 9$

☐ $y = -2x - 3$

Ćwiczenie 14

Które z równań opisuje prostą prostopadłą do prostej $y = 2x + 3$?

☐ $y = \frac{1}{2}x + 2$

☐ $y = -\frac{1}{2}x + 4$

☐ $y = 2x - 3$

☐ $y = -2x - 7$

Ćwiczenie 15

Proste o równaniach $y = 3x - 5$ i $y = \frac{1}{5}x + 3$

☐ przecinają się pod kątem innym niż kąt prosty

☐ pokrywają się

☐ są prostopadłe

☐ są równoległe i różne

Ćwiczenie 16

Prosta $-x + 4y - 6 = 0$ jest prostopadła do prostej $y = ax + 3$. Wynika z tego, że

☐ $a = 4$

☐ $a = -4$

☐ $a = -\frac{1}{4}$

☐ $a = \frac{1}{4}$

Ćwiczenie 17

Współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do prostej $y = -\frac{\sqrt{2}+1}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$ jest równy

☐ $2\sqrt{2} + 2$

☐ $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

☐ $\frac{-\sqrt{2}-1}{2}$

☐ $2\sqrt{2} - 2$

Ćwiczenie 18

Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej $y = -\frac{1}{5}x + 2$ i przechodzącej przez punkt

1. $M = (-1, 3)$

2. $M = (0, 0)$

3. $M = (4, 0)$

4. $M = (0, 5)$

Ćwiczenie 19

Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres przecina oś Oy w punkcie $(0, -2)$ i jest prostopadły do prostej $y = -2x + 3$.

Ćwiczenie 20

Punkty $A = (3, 5)$, $B = (-2, -4)$, $C = (6, -1)$ są wierzchołkami trójkąta. Wyznacz równanie prostej, na której leży wysokość tego trójkąta poprowadzona z wierzchołka C .

Ćwiczenie 21

Punkty $A = (2, 6)$, $B = (2, 1)$, $C = (-2, -2)$ i $D = (-2, 3)$ są wierzchołkami czworokąta ABCD. Uzasadnij, że ten czworokąt jest równoległobokiem.

Ćwiczenie 22

Dla jakich wartości parametru m proste $k : y = (m + 2)x - 1$ i $l : y = (3m - 2)x + m$ są równoległe?

Ćwiczenie 23

Dla jakich wartości parametru m proste $y = (m + 5)x - 2m$ i $y = \frac{1}{2}x + 7$ są prostopadłe?

Ćwiczenie 24

Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach $A = (0, 2)$, $B = (3, 1)$, $C = (2, 3)$ jest prostokątny.

Ćwiczenie 25

Podstawa AB trapezu ABCD zawiera się w prostej $y = -3x + 5$. Wyznacz równanie prostej, w której zawiera się podstawa CD, jeżeli $C = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Ćwiczenie 26

Punkty $A = (1, -1)$, $B = (3, 3)$, $C = (0, 6)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku ABCD. Wyznacz równania prostych, w których zawierają się boki tego równoległoboku oraz współrzędne wierzchołka D .

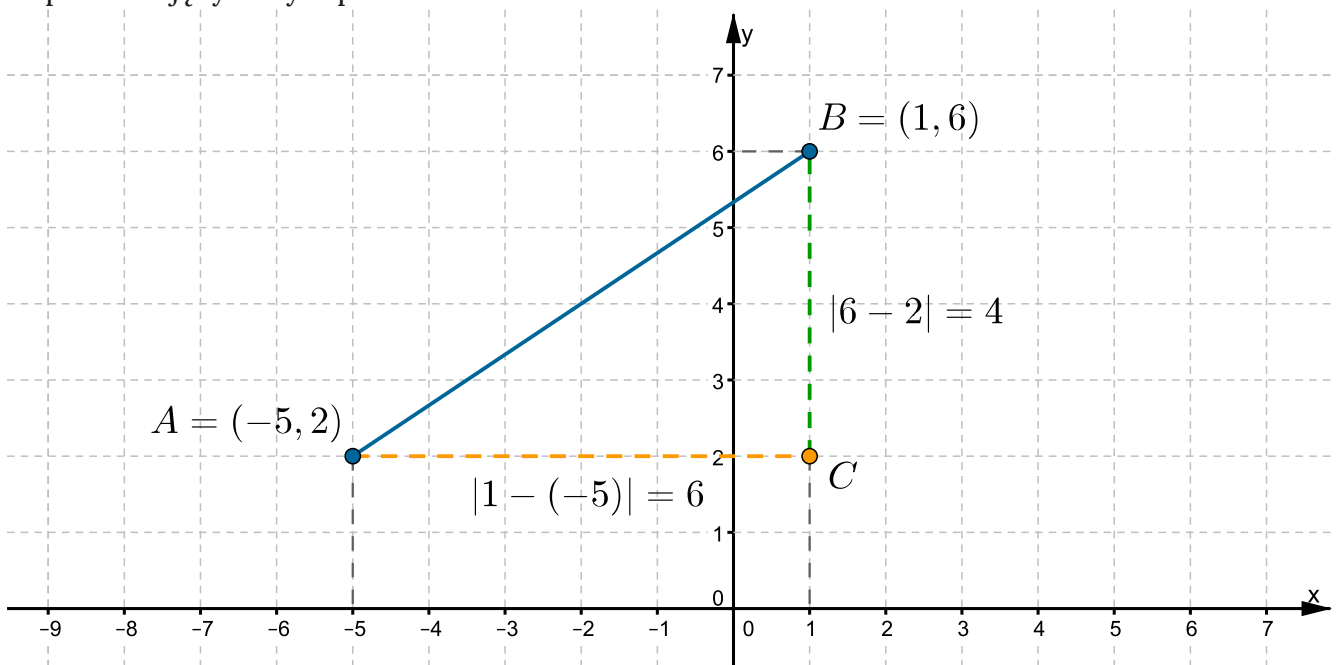
Długość odcinka. Środek odcinka

Przykład 1

Oblicz długość odcinka AB o końcach w punktach $A = (-5, 2)$ i $B = (1, 6)$.
Zbudujmy trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne są równoległe do osi układu współrzędnych, a odcinek AB jest jego przeciwprostokątną.

Przykład 2

Odległość punktów na osi liczbowej jest równa wartości bezwzględnej różnicy liczb, odpowiadających tym punktom.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zatem przyprostokątne tego trójkąta mają długości $|AC| = 6$ i $|BC| = 4$.
Na podstawie twierdzenia Pitagorasa obliczymy długość przeciwprostokątnej AB .

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$$

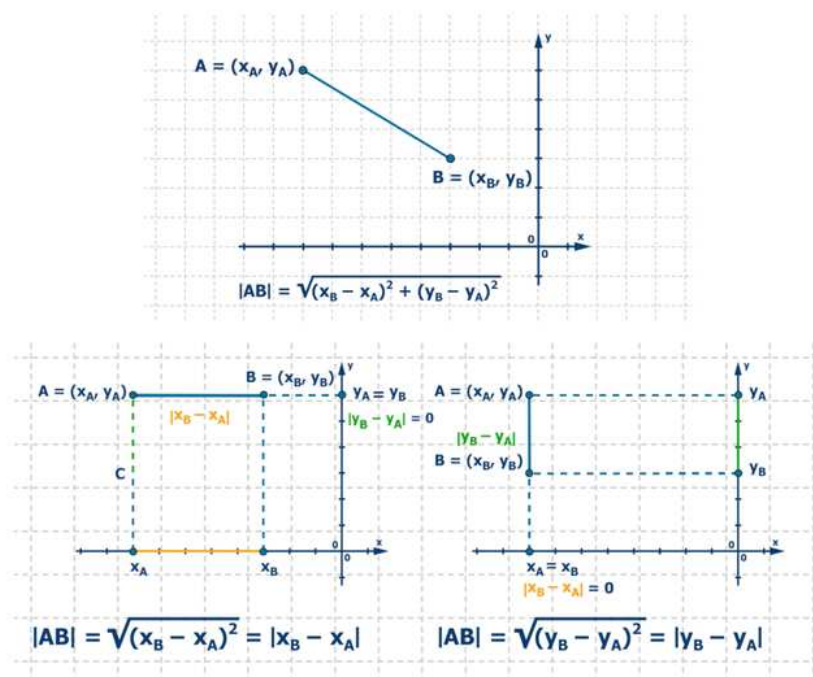
$$|AB|^2 = 6^2 + 4^2$$

$$|AB|^2 = 52$$

$$|AB| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$$

Przykład 3

Punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ są końcami odcinka AB. Oblicz długość odcinka AB.

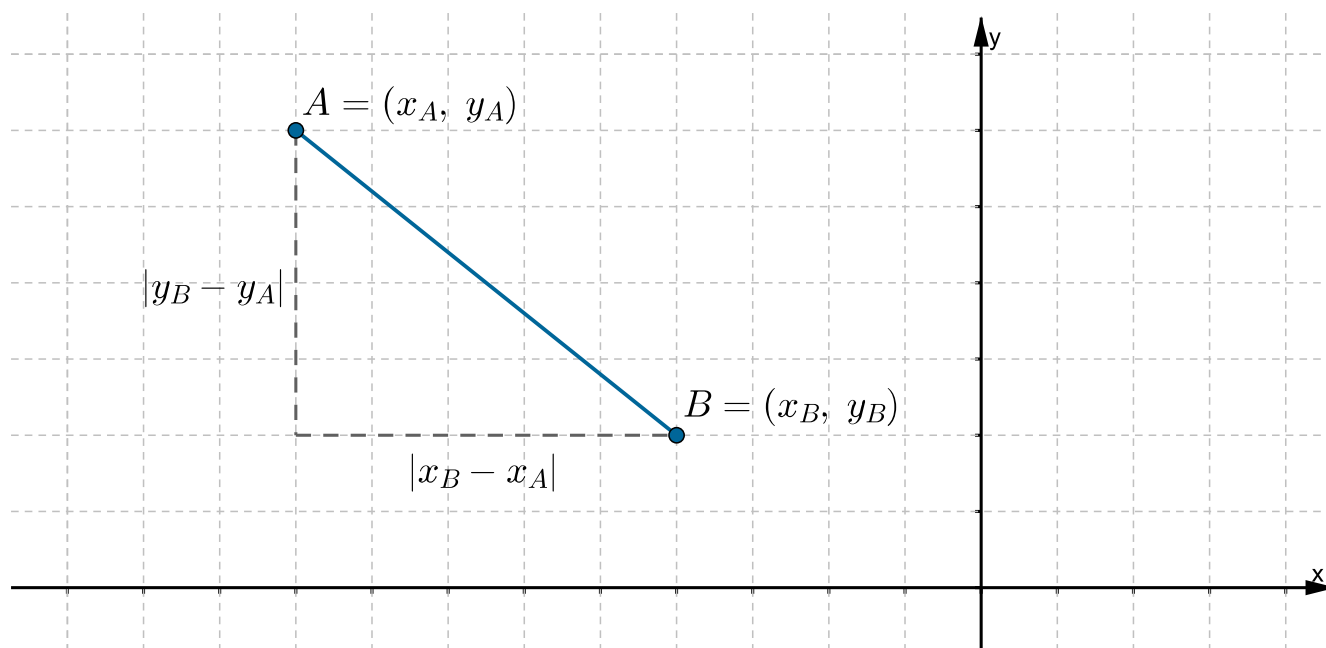


Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Zapamiętaj!



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Długość odcinka AB, którego końcami są punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ obliczamy ze wzoru

$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Zauważmy, że wzór jest prawdziwy w szczególnych przypadkach:

- gdy odcinek AB jest równoległy do osi Ox, wtedy

$$y_A = y_B$$

$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2} = |x_A - x_B|$$

- gdy odcinek AB jest równoległy do osi Oy, wtedy

$$x_A = x_B$$

$$|AB| = \sqrt{(y_A - y_B)^2} = |y_A - y_B|$$

Środek odcinka

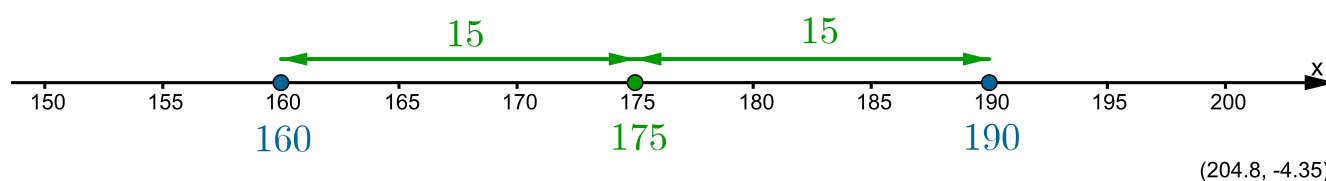
Przykład 4

Ola ma 160 cm wzrostu, a jej brat Marcin 190 cm. Oblicz średni wzrost rodzeństwa. Średni wzrost brata i siostry odpowiada średniej arytmetycznej liczb 160 i 190, czyli

$$x = \frac{160+190}{2} = 175 \text{ (cm)}.$$

Na osi liczbowej liczba 175 jest jednakowo oddalona od obu liczb 160 i 190.

(148.57, 5.88)

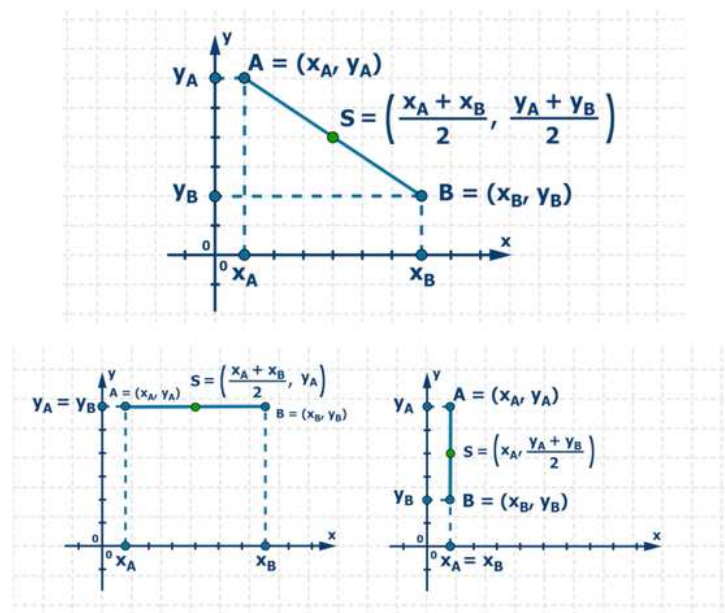


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Z własności średniej arytmetycznej dwóch liczb wynika, że liczba odpowiadająca średniej dwóch liczb leży na osi liczbowej dokładnie pośrodku między tymi dwoma liczbami.

Przykład 5

Punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ są końcami odcinka AB. Wyznacz współrzędne środka odcinka AB.

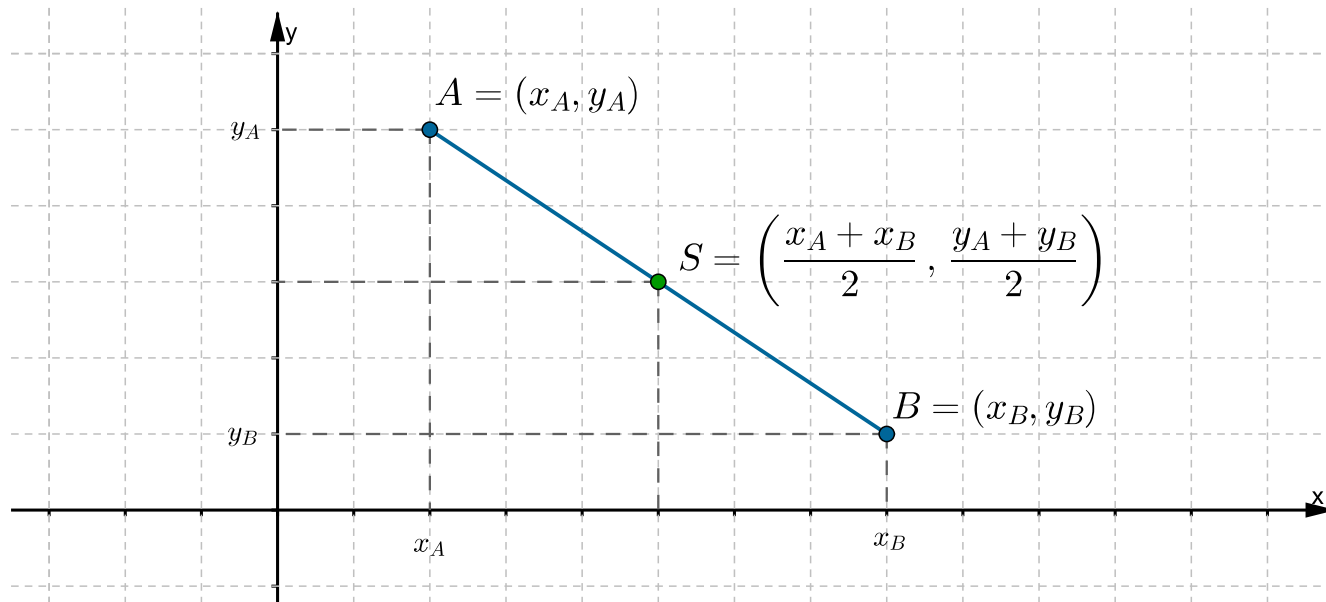


Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

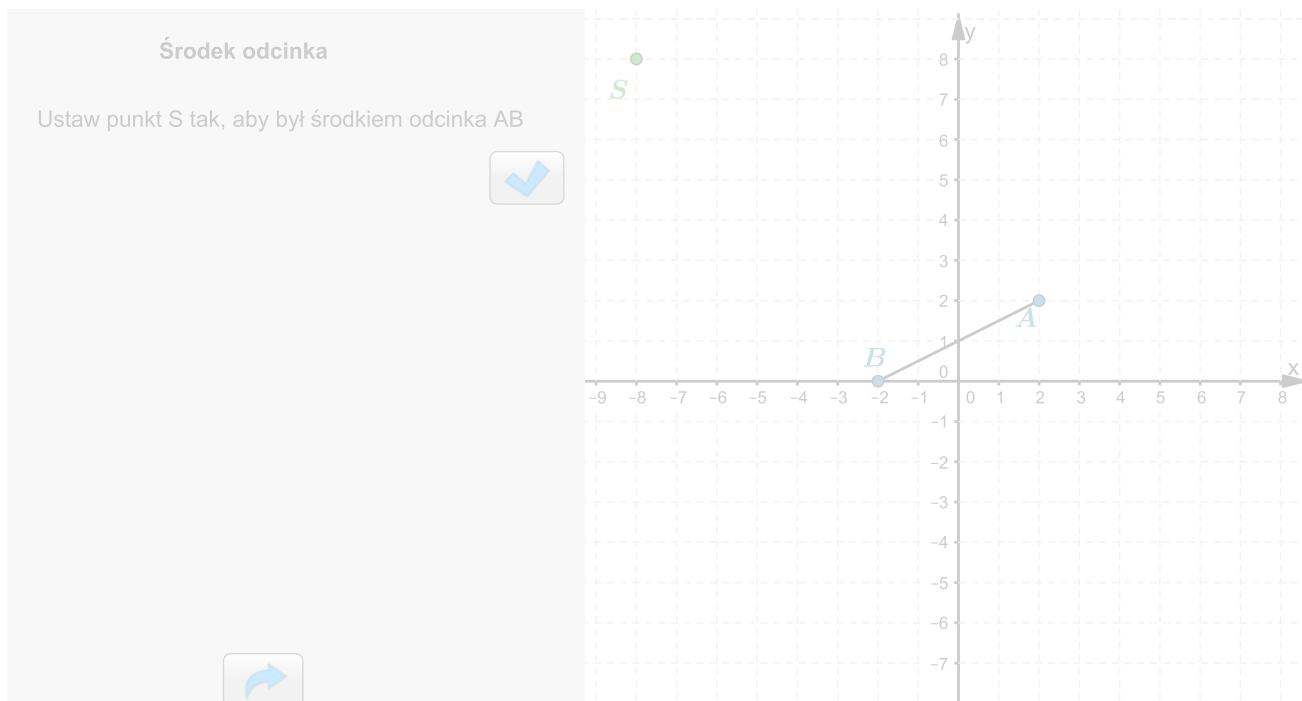
Zapamiętaj!



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Współrzędne punktu S , który jest środkiem odcinka o końcach w punktach $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, są średnimi arytmetycznymi współrzędnych końców odcinka AB .

$$S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

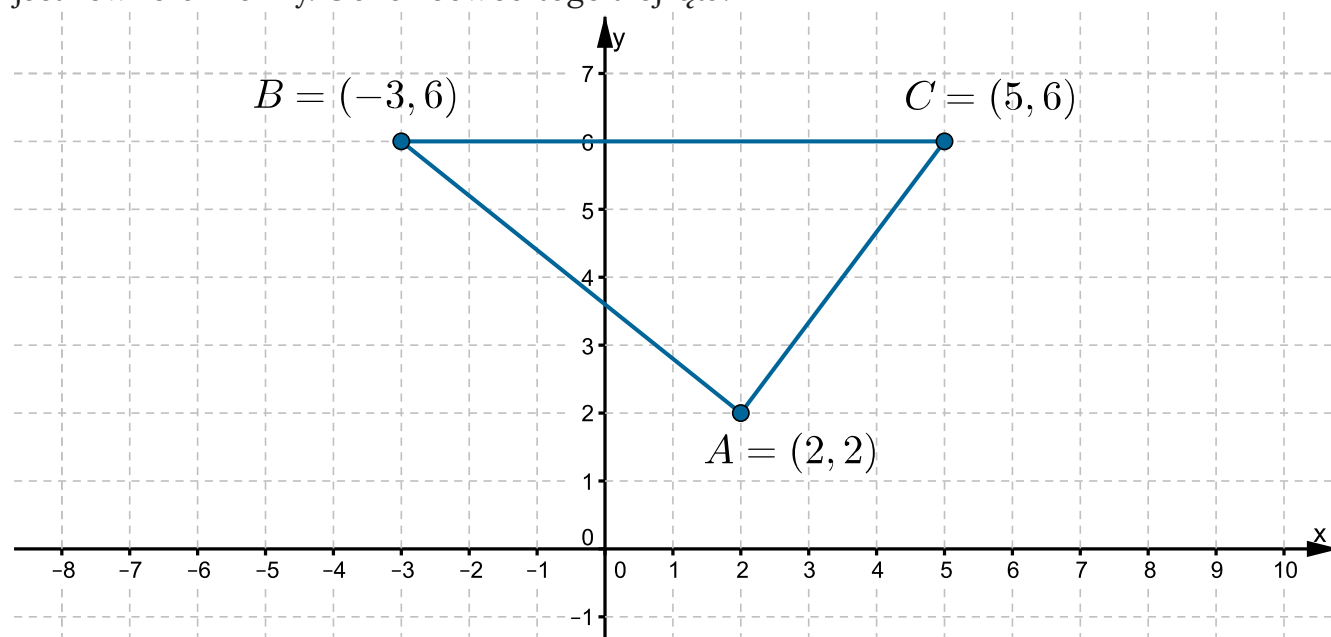


Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DKW85YFr9>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 6

Sprawdź, czy trójkąt o wierzchołkach w punktach $A = (2, 2)$, $B = (-3, 6)$ i $C = (5, 6)$ jest równoramienny. Oblicz obwód tego trójkąta.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Korzystając ze wzoru na długość odcinka, obliczymy długości boków trójkąta.

$$|AB| = \sqrt{(2 + 3)^2 + (2 - 6)^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$$

$$|AC| = \sqrt{(2 - 5)^2 + (2 - 6)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Zauważ, że drugie współrzędne punktów B i C są równe 6, co oznacza, że odcinek BC jest równoległy do osi Ox . Jego długość jest równa

$$|BC| = |5 + 3| = 8.$$

Długość tego odcinka możemy również obliczyć, wykorzystując odpowiedni wzór. Wtedy

$$|BC| = \sqrt{(-3 - 5)^2 + (6 - 6)^2} = \sqrt{64} = 8$$

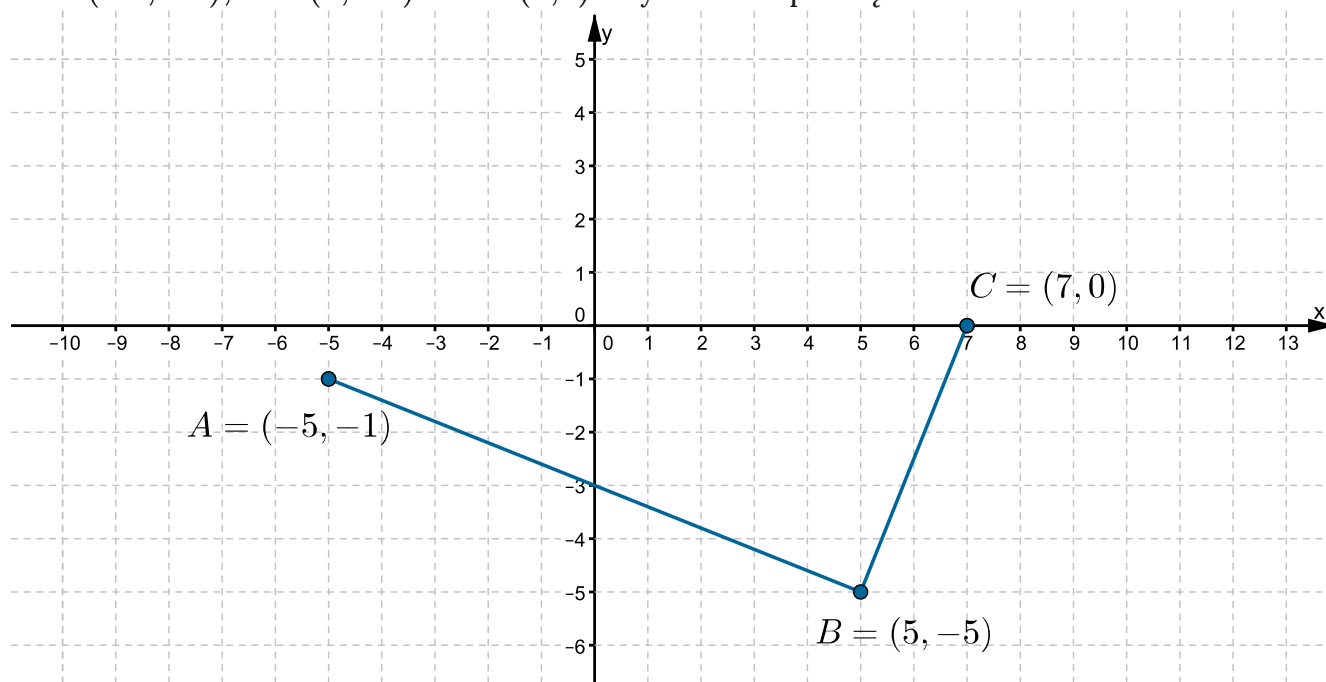
Każdy bok tego trójkąta ma inną długość, zatem nie jest on równoramienny.

Obwód trójkąta jest równy

$$Ob = 5 + 8 + \sqrt{41} = 13 + \sqrt{41}$$

Przykład 7

Oblicz długość przekątnej prostokąta $ABCD$ o wierzchołkach w punktach: $A = (-5, -1)$, $B = (5, -5)$ i $C = (7, 0)$. Wyznacz współrzędne wierzchołka D .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przekątna prostokąta $ABCD$ jest równa długości odcinka

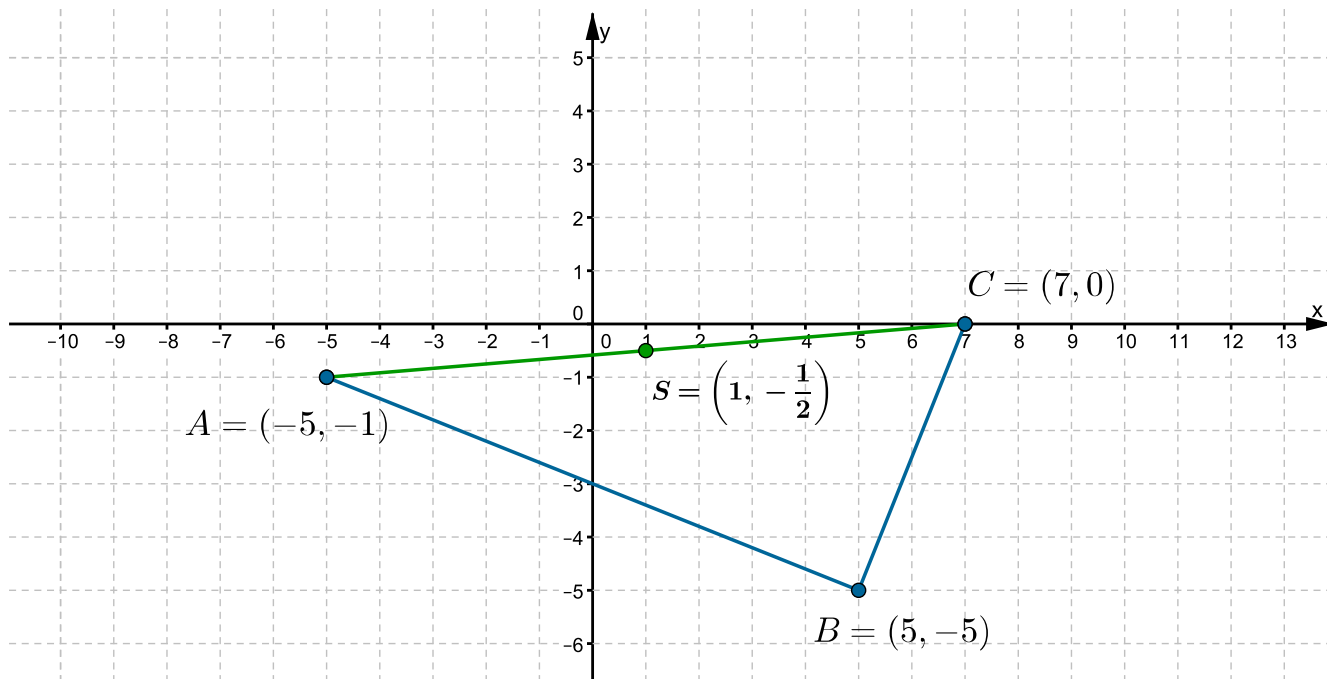
$$|AC| = \sqrt{(-5 - 7)^2 + (-1 - 0)^2} = \sqrt{144 + 1} = \sqrt{145}$$

Przekątne w prostokącie przecinają się w punkcie S , który jest środkiem każdej z nich.

Wynika z tego, że środek przekątnej AC jest również środkiem przekątnej BD .

Środek S przekątnej AC ma współrzędne

$$S = \left(\frac{-5+7}{2}, \frac{-1+0}{2} \right) = \left(1, -\frac{1}{2} \right)$$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Niech $D = (x_D, y_D)$.

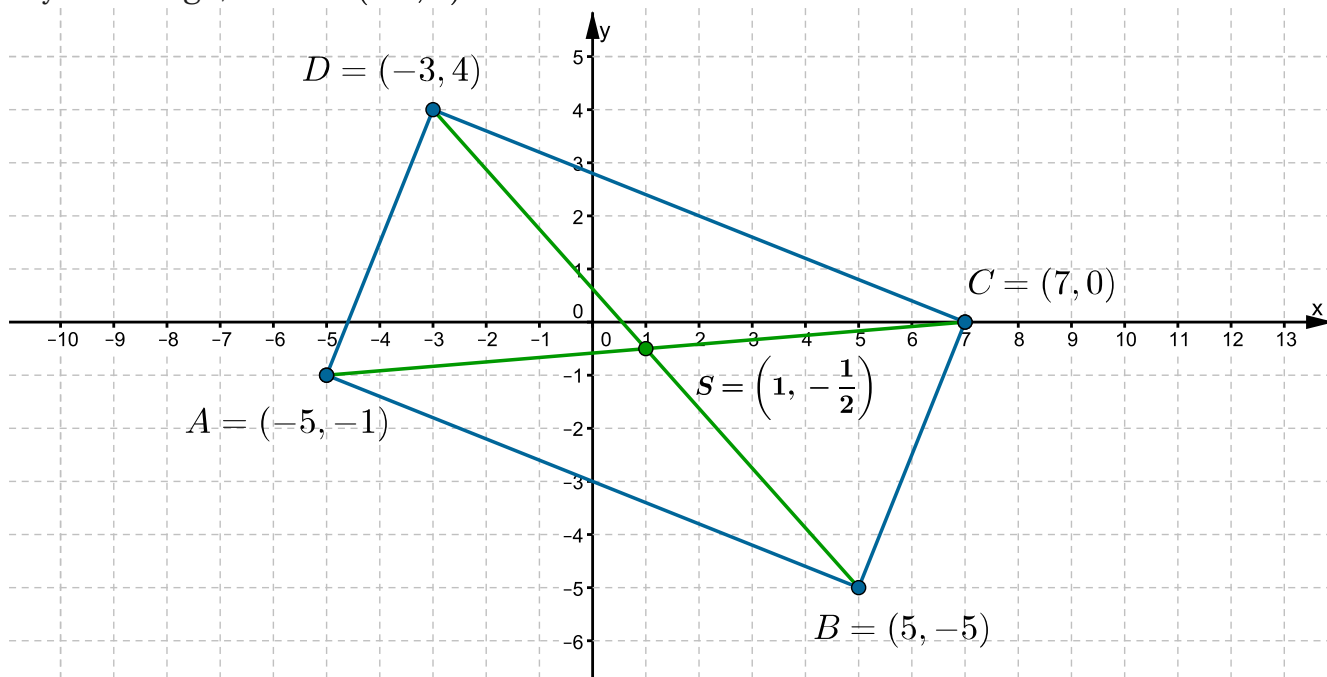
$S = (1, -\frac{1}{2})$ jest środkiem odcinka BD, a zatem

$$(1, -\frac{1}{2}) = \left(\frac{5+x_D}{2}, \frac{-5+y_D}{2} \right)$$

$$1 = \frac{5+x_D}{2}, \quad -\frac{1}{2} = \frac{-5+y_D}{2}$$

$$x_D = -3, \quad y_D = 4$$

Wynika z tego, że $D = (-3, 4)$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 8

Napisz równanie prostej, na której leży środkowa poprowadzona z wierzchołka C w trójkącie o wierzchołkach w punktach

$$A = (-2, -5), B = (8, 1), C = (0, 4).$$

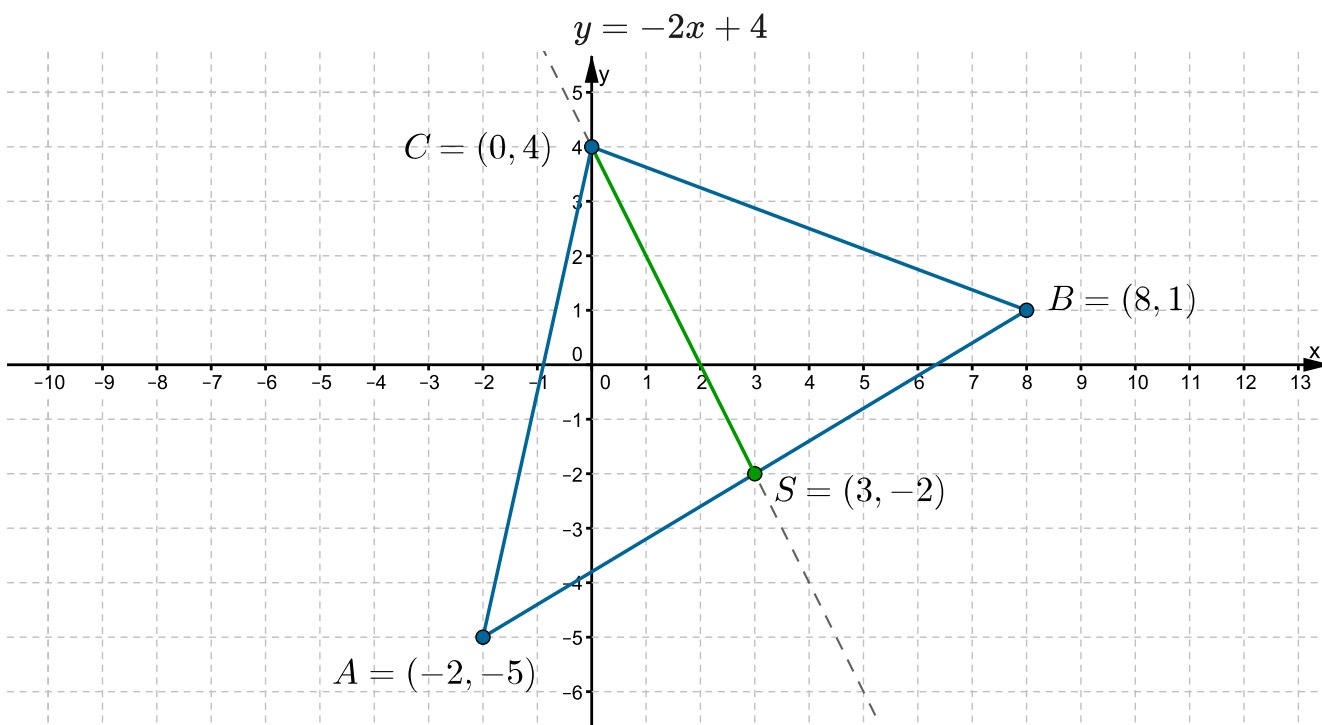
Środkowa trójkąta to odcinek łączący wierzchołek ze środkiem przeciwległego boku. Naprzeciw wierzchołka C leży bok AB , którego środek ma współrzędne

$$S = \left(\frac{-2+8}{2}, \frac{-5+1}{2} \right) = (3, -2)$$

Środkowa poprowadzona z wierzchołka C leży na prostej CS i ma równanie $y = ax + b$. Współczynnik kierunkowy tej prostej jest równy

$$a = \frac{4+2}{0-3} = -2,$$

a punkt $C = (0, 4)$ jest jej punktem przecięcia z osią Oy . Wynika z tego, że $b = 4$. Równanie prostej zawierającej środkową trójkąta poprowadzoną z wierzchołka C ma postać



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 9

Punkty $A = (-3, 7)$ i $B = (4, 8)$ są wierzchołkami rombu $ABCD$, a punkt $S = (3, 5)$ jest jego środkiem symetrii. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków rombu. Środek symetrii rombu jest jednocześnie środkiem każdej przekątnej tego rombu. Punkt $S = (3, 5)$ jest środkiem przekątnej AC , zatem

$$(3, 5) = \left(\frac{-3+x_C}{2}, \frac{7+y_C}{2} \right),$$

czyli

$$3 = \frac{-3+x_C}{2}, 5 = \frac{7+y_C}{2}$$

$$x_C = 9, y_C = 3$$

$$C = (9, 3)$$

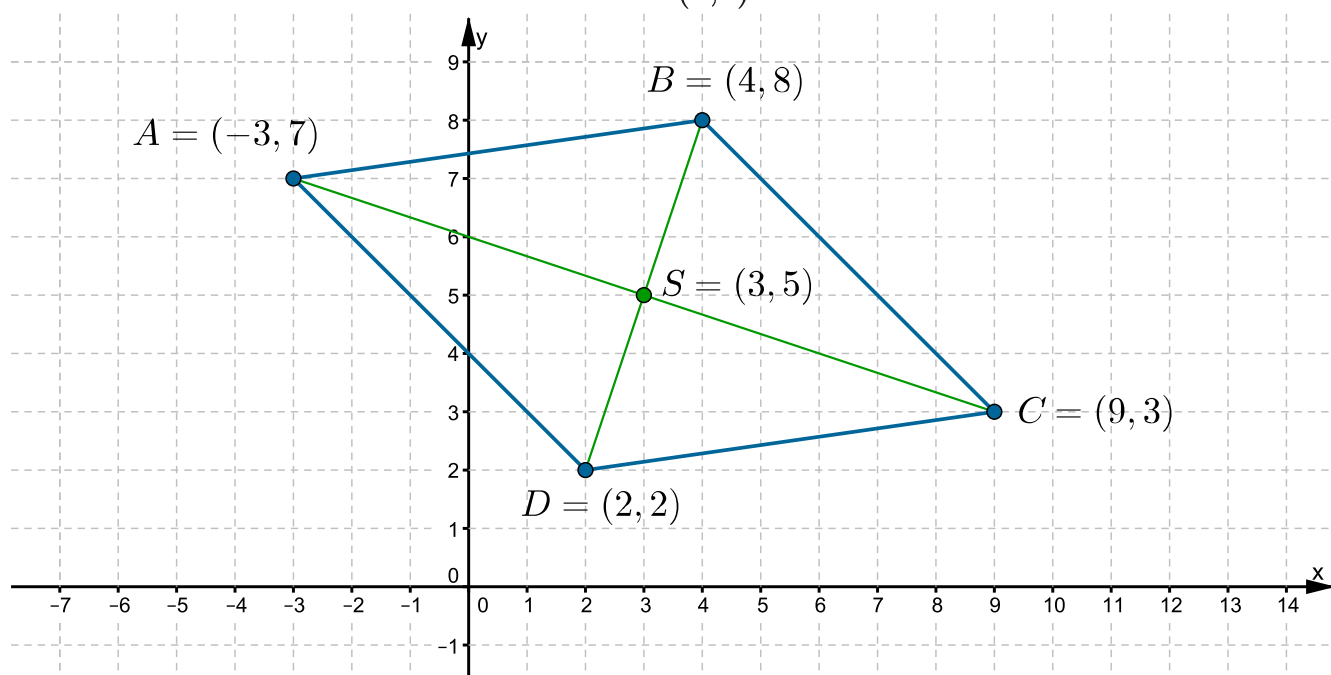
Podobnie obliczymy współrzędne punktu D .

$$(3, 5) = \left(\frac{4+x_D}{2}, \frac{8+y_D}{2} \right)$$

$$3 = \frac{4+x_D}{2}, 5 = \frac{8+y_D}{2}$$

$$x_D = 2, y_D = 2$$

$$D = (2, 2)$$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 1

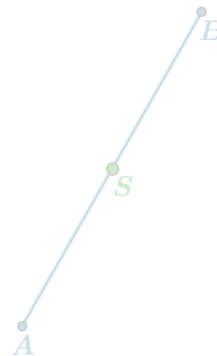
Punkt S jest środkiem odcinka AB . Znajdź brakujące współrzędne.

Punkt S jest środkiem odcinka AB .
Oblicz współrzędne punktu A .

$x_A =$

$$S = (-1, -2.5) \quad B = (1, 1)$$

$y_A =$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DKW85YFr9>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Ćwiczenie 2

Wyznacz współrzędne środka odcinka o końcach w punktach A i B .

1. $A = (\sqrt{2}, 3\sqrt{2}), B = (-3\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$

2. $A = (1, 3\sqrt{3}), B = (-5, 3\sqrt{3})$

3. $A = (-4\sqrt{2}, -3), B = (-4\sqrt{2}, 3)$

4. $A = (1 - \sqrt{5}, 3 + \sqrt{3}), B = (1 + \sqrt{5}, 3 - \sqrt{3})$

Ćwiczenie 3

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9

Oblicz obwód trójkąta, którego wierzchołkami są podane punkty.

1. $A = (1,6)$, $B = (-4,1)$, $C = (1, -4)$

2. $A = (2,8)$, $B = (-2,5)$, $C = (6, -1)$

3. $A = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $B = (2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$, $C = (3\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Ćwiczenie 10

Wyznacz równanie prostej zawierającej środkową trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka A.

1. $A = (2,8)$, $B = (-2,5)$, $C = (6, -1)$

2. $A = (-3,4)$, $B = (5, -1)$, $C = (5,9)$

3. $A = (0,0)$, $B = (4, -1)$, $C = (2,5)$

4. $A = (-2,1)$, $B = (0,6)$, $C = (6,2)$

Ćwiczenie 11

Punkty A , B , C są wierzchołkami prostokąta $ABCD$. Oblicz długość przekątnej prostokąta oraz wyznacz współrzędne wierzchołka D .

1. $A = (-2, 3)$, $B = (1, 6)$, $C = (5, 2)$

2. $A = (2, 0)$, $B = (-2, 6)$, $C = (1, 8)$

3. $A = (0, 3)$, $B = (-6, 0)$, $C = (0, -12)$

Ćwiczenie 12

Sprawdź, czy trójkąt ABC jest równoramienny.

1. $A = (2, -7)$, $B = (-5, -3)$, $C = (6, 0)$

2. $A = (1, -6)$, $B = (-5, 1)$, $C = (7, 1)$

3. $A = (1, -5)$, $B = (8, -6)$, $C = (6, 4)$

Ćwiczenie 13

Przekątne równoległoboku $ABCD$ przecinają się w punkcie S . Wyznacz współrzędne brakujących wierzchołków równoległoboku.

1. $A = (0, -4)$, $B = (7, -5)$, $S = (3, 0)$

2. $A = (9, 1)$, $B = (1, -7)$, $S = (2, -2)$

3. $A = (7, 0)$, $B = (0, -4)$, $S = (0, -1)$

4. $A = (10, -4)$, $B = (5, -7)$, $S = (7, -\frac{7}{2})$

Ćwiczenie 14

Dane są punkty: $A = (4,1)$, $B = (2, -4)$, $C = (-2,2)$. Wyznacz równania prostych zawierających środkowe trójkąta ABC.

Ćwiczenie 15

Sprawdź, czy trójkąt ABC jest podobny do trójkąta $A_1B_1C_1$, jeśli wierzchołki trójkątów mają współrzędne:

$A = (-2,1)$, $B = (-1, -2)$, $C = (1,2)$ oraz $A_1 = (3,0)$, $B_1 = (-3, -2)$, $C_1 = (5, -6)$.

Ćwiczenie 16

Dane są punkty $S = (4\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $A = (m + 3, m)$ oraz $B = (2m, m - 5)$. Wyznacz wartość m tak, aby $|AS| = |BS|$.

Ćwiczenie 17

Punkty $A = (m - 2, -2m + 8)$, $B = (5,0)$. Wyznacz takie wartości m , dla których długość odcinka AB jest równa $2\sqrt{2}$.

Zastosowania równania prostej: wysokości, środkowe, symetralne boków trójkąta

Przykład 1

Dane są punkty $A = (-1, 1)$ i $B = (5, -1)$. Wyznacz równanie symetralnej odcinka AB . Pokażemy dwa sposoby rozwiązania tego zadania.

- sposób I

Symetralna odcinka jest prostą prostopadłą do tego odcinka i przechodzącą przez jego środek

Współrzędne S środka odcinka o końcach w punktach $A = (-1, 1)$ i $B = (5, -1)$ są równe

$$x_S = \frac{-1+5}{2} = 2 \text{ i } y_S = \frac{1-1}{2} = 0, \text{ czyli } S = (2, 0).$$

Współczynnik kierunkowy prostej AB jest równy

$$a = \frac{-1-1}{5+1} = -\frac{1}{3}.$$

Współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej jest więc równy $a_1 = 3$. Zatem symetralną można opisać równaniem

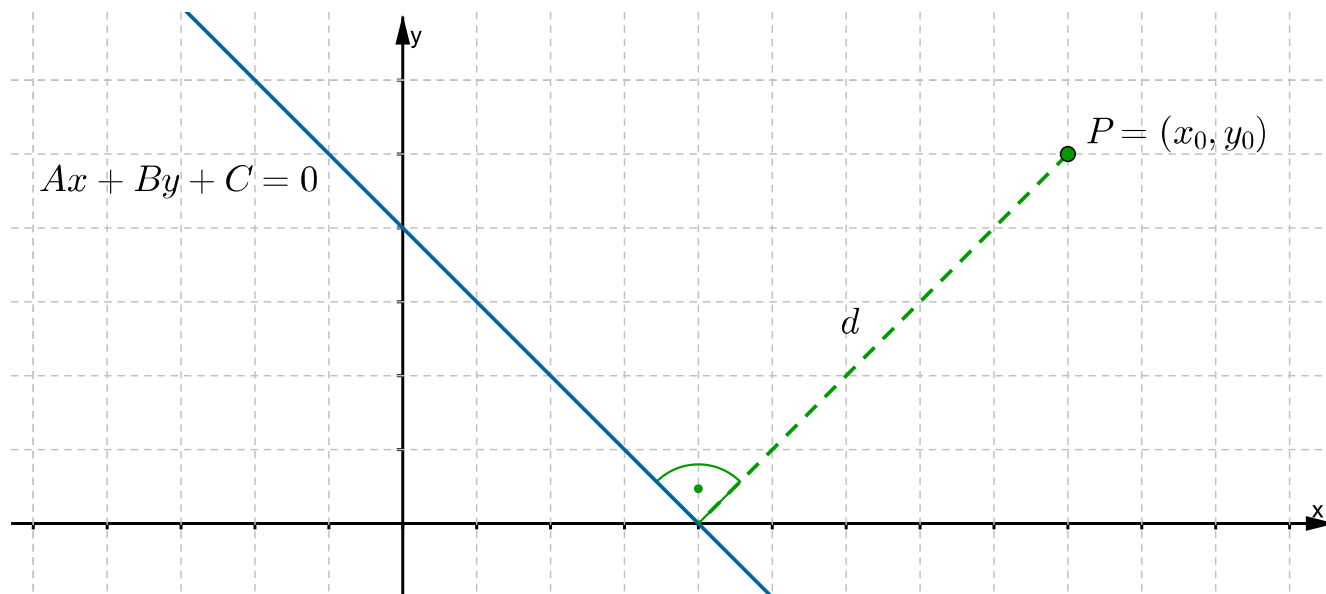
$$y = 3x + b.$$

Punkt $S = (2, 0)$ leży na symetralnej. Po podstawieniu współrzędnych punktu S do równania otrzymujemy $0 = 3 \cdot 2 + b$, czyli $b = -6$.

Równanie symetralnej ma postać $y = 3x - 6$.

- sposób II

Z własności symetralnej odcinka wynika, że każdy punkt P leżący na symetralnej jest równo oddalony od końców odcinka.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wynika z tego, że $|AP| = |BP|$.

Wykorzystując wzór na długość odcinka, otrzymujemy

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y+1)^2}$$

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = (x-5)^2 + (y+1)^2$$

Po zastosowaniu wzorów skróconego mnożenia

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 10x + 25 + y^2 + 2y + 1$$

Stąd otrzymujemy równanie ogólne

$$12x - 4y - 24 = 0.$$

Zapisując to równanie w postaci kierunkowej, mamy

$$y = 3x - 6.$$

Przykład 2

Sprawdź, czy trójkąt o wierzchołkach w punktach: $A = (-3, 6)$, $B = (0, 2)$, $C = (4, 4)$ jest prostokątny.

- sposób I

Trójkąt jest prostokątny, jeśli dwa jego boki są prostopadłe. Sprawdźmy, czy wśród trzech prostych zawierających boki trójkąta jest para prostych prostopadłych.

Obliczymy współczynniki kierunkowe każdej z trzech prostych.

1. Współczynnik kierunkowy prostej AB: $a_{AB} = \frac{6-2}{-3} = -\frac{4}{3}$.
2. Współczynnik kierunkowy prostej BC: $a_{BC} = \frac{4-2}{4} = \frac{1}{2}$.

3. Współczynnik kierunkowy prostej AC: $a_{AC} = \frac{6-4}{-3-4} = -\frac{2}{7}$.

Jeśli proste są prostopadłe, to iloczyn ich współczynników kierunkowych jest równy -1 .
Sprawdźmy:

$a_{AB} \cdot a_{BC} = -\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \neq -1$, zatem boki AB i BC nie leżą na prostych prostopadłych.

Podobnie

$a_{BC} \cdot a_{AC} = -\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{2} \neq -1$, zatem boki BC i AC nie leżą na prostych prostopadłych.

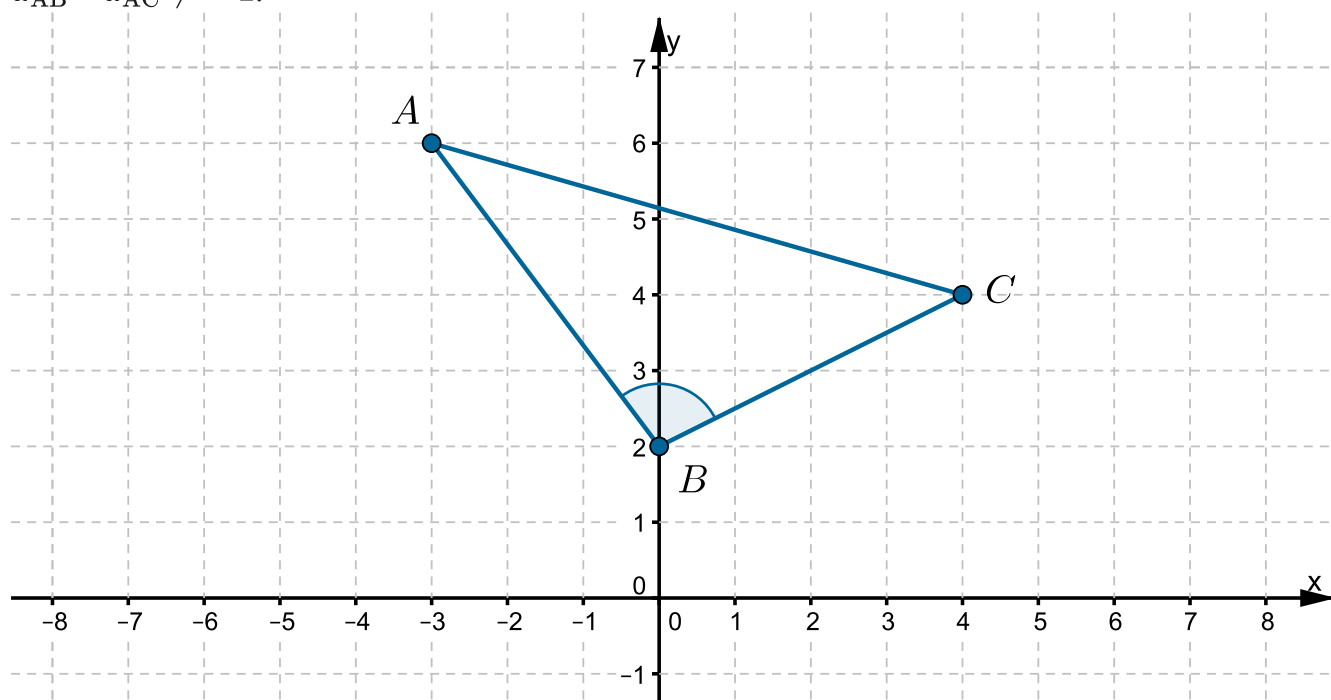
Zauważmy, że boki AB i AC również nie są prostopadłe (ich współczynniki kierunkowe są ujemne, więc ich iloczyn nie może być równy -1).

Wynika z tego, że żadne dwa boki trójkąta nie są prostopadłe, więc ten trójkąt nie jest prostokątny.

Uwaga.

Jeśli wcześniej zaznaczymy punkty w układzie współrzędnych, to zauważymy, że tylko boki AB i AC mogą być prostopadłe. Wystarczy w tym przypadku pokazać, że

$a_{AB} \cdot a_{AC} \neq -1$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- sposób II

Krok 1

Obliczamy długości boków trójkąta.

$$|AB| = \sqrt{(-3)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$|AC| = \sqrt{(-3-4)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{53}$$

$$|BC| = \sqrt{(-4)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{20}$$

Krok 2

Sprawdzamy, czy suma kwadratów długości dwóch krótszych boków jest równa kwadratowi długości trzeciego boku. Sprawdzamy, czy jest spełniony warunek wynikający z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa.

$$|AB|^2 + |BC|^2 = 25 + 20$$

$$|AC|^2 = 53$$

$$53 \neq 25 + 20$$

Wynika z tego, że trójkąt nie jest prostokątny.

Przykład 3

Punkty: $A = (-3, 7)$, $B = (0, -2)$, $C = (6, 0)$, $D = (3, 9)$ są wierzchołkami czworokąta. Uzasadnij, że czworokąt ABCD jest prostokątem.

- sposób I

Krok 1

Sprawdzimy, czy czworokąt ABCD jest równoległobokiem (ma dwie pary boków równoległych).

Obliczymy współczynniki kierunkowe prostych zawierających boki czworokąta.

$$a_{AB} = \frac{7+2}{-3} = -3$$

$$a_{BC} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$$

$$a_{CD} = \frac{9}{3-6} = -3$$

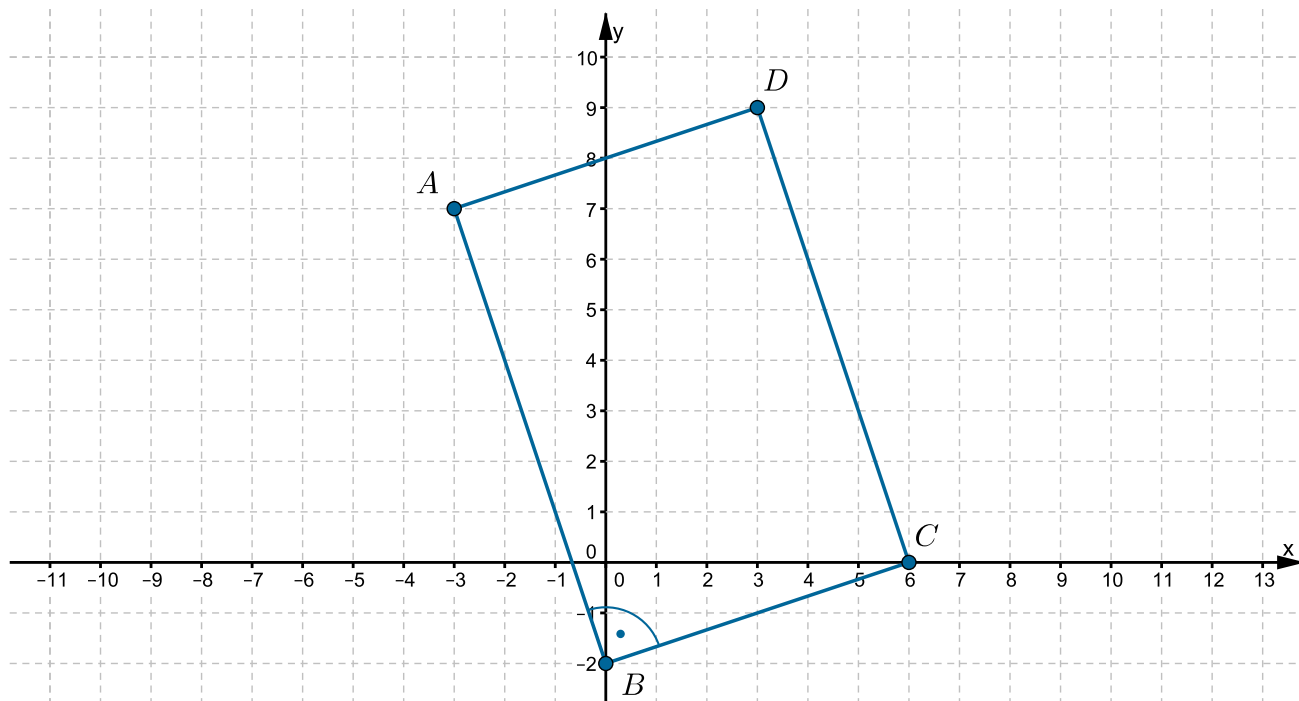
$$a_{DA} = \frac{9-7}{3+3} = \frac{1}{3}$$

Ponieważ $a_{AB} = a_{CD} = -3$ i $a_{BC} = a_{DA} = \frac{1}{3}$, więc czworokąt ABCD ma dwie pary boków równoległych.

Krok 2

Sprawdzamy, czy kąty wewnętrzne równoległoboku są proste.

Ponieważ $a_{AB} \cdot a_{BC} = -3 \cdot \frac{1}{3} = -1$, to proste zawierające boki AB i BC są prostopadłe. Wynika z tego, że jeden z kątów wewnętrznych równoległoboku jest prosty. Z własności kątów w równoległoboku (suma kątów, których wspólnym ramieniem jest bok równoległoboku jest równa 180°) wynika, że pozostałe kąty są również proste.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Uzasadniliśmy, że czworokąt ABCD jest równoległobokiem, którego kąty wewnętrzne są proste, a więc ten czworokąt jest prostokątem.

- sposób II
- Krok 1

Sprawdzamy, czy przekątne czworokąta są równe.

Długość przekątnej AC: $|AC| = \sqrt{(-3-6)^2 + (7)^2} = \sqrt{130}$.

Długość przekątnej BD: $|BD| = \sqrt{(3)^2 + (9+2)^2} = \sqrt{130}$.

Wynika z tego, że przekątne czworokąta ABCD są równe.

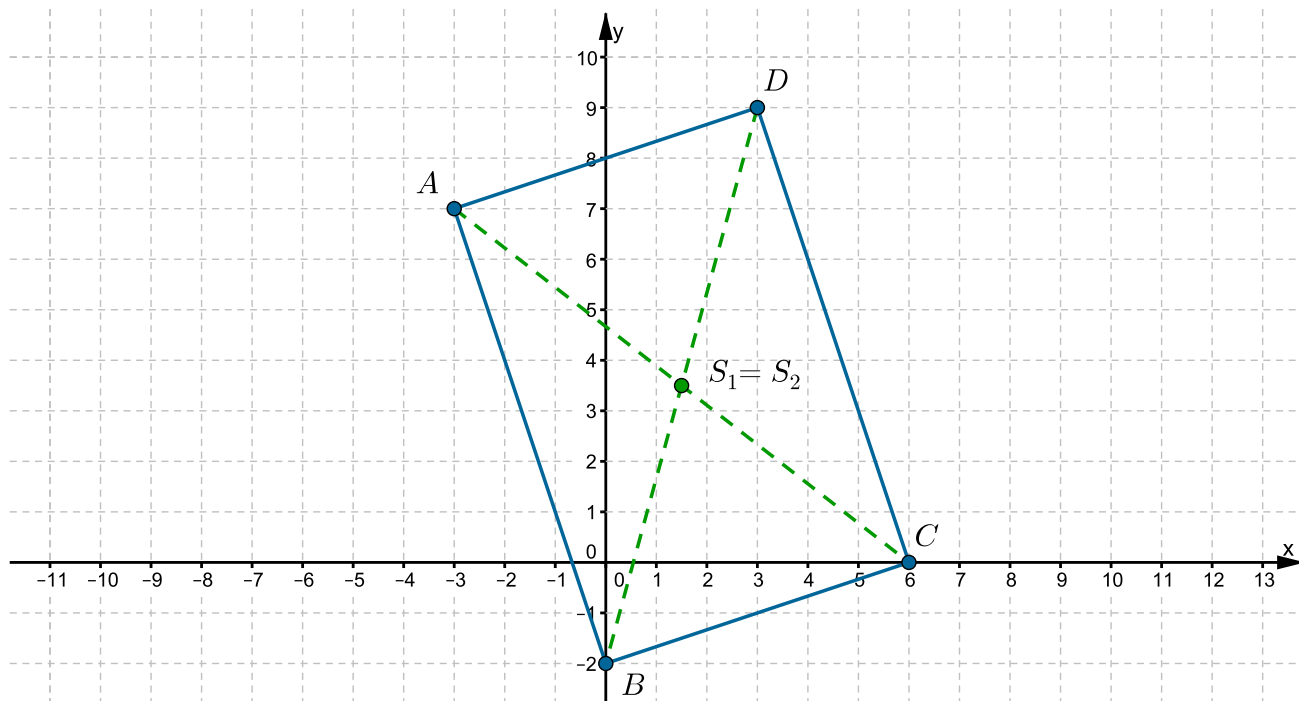
- Krok 2

Sprawdzamy, czy środek przekątnej AC jest jednocześnie środkiem przekątnej BD.

Środek przekątnej AC: $S_1 = \left(\frac{-3+6}{2}, \frac{7}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

Środek przekątnej BD: $S_2 = \left(\frac{3}{2}, \frac{-2+9}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

Wynika z tego, że $S_1 = S_2$. Jest to zatem punkt wspólny obu przekątnych i jednocześnie jest środkiem każdej z nich.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

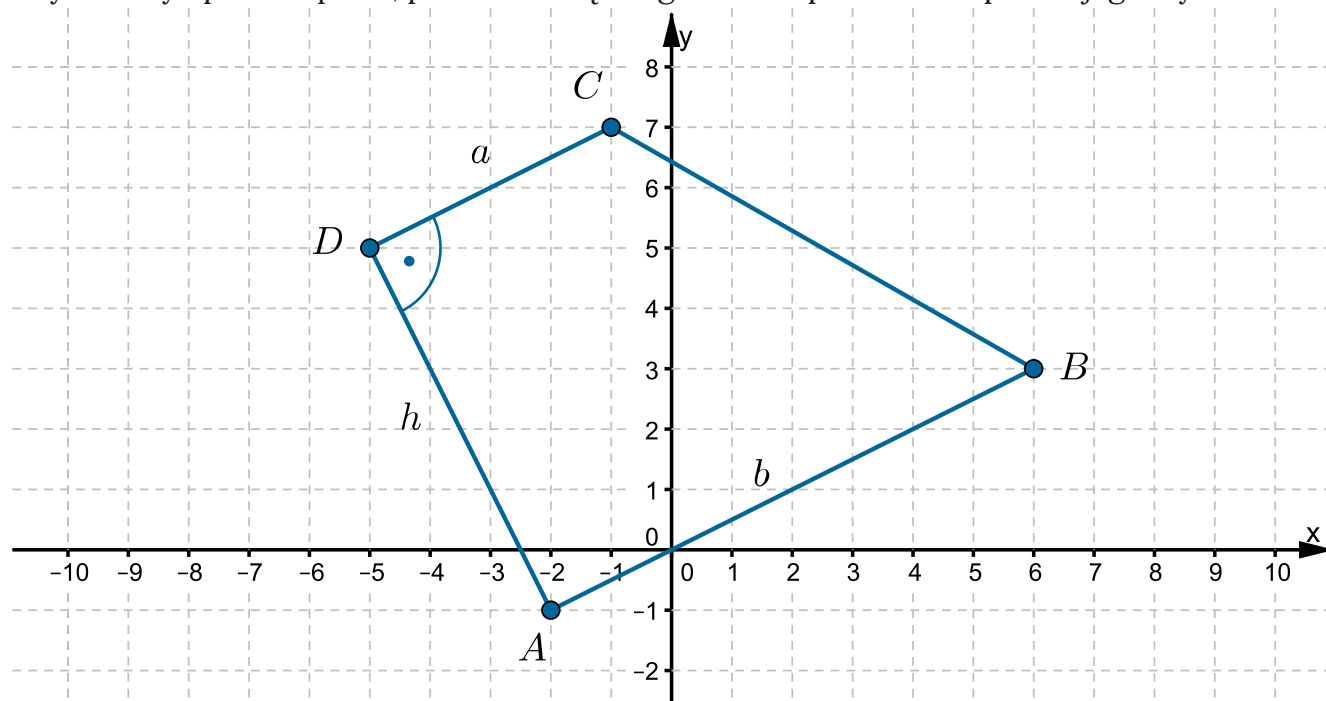
Zatem czworokąt ABCD ma równe przekątne, które przecinają się w punkcie dzielącym każdą z nich na połowę. Z tego wynika, że czworokąt ABCD jest prostokątem.

Przykład 4

Oblicz pole trapezu prostokątnego, którego wierzchołkami są punkty:

$A = (-2, -1)$, $B = (6, 3)$, $C = (-1, 7)$, $D = (-5, 5)$.

Aby obliczyć pole trapezu, potrzebne są długości obu podstaw trapezu i jego wysokość.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Długości podstaw trapezu:

$$a = |DC| = \sqrt{(-1+5)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$b = |BA| = \sqrt{(-2-6)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

Wysokość trapezu:

$$h = |DA| = \sqrt{(-2+5)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

Pole trapezu:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{6\sqrt{5}}{2} \cdot 3\sqrt{5} = 9 \cdot 5 = 45$$

Przykład 5

Punkty: $S_1 = (4,5)$, $S_2 = (\frac{13}{2}, 1)$, $S_3 = (\frac{3}{2}, 0)$ są środkami boków trójkąta ABC.

Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta.

Współrzędne wierzchołków oznaczamy odpowiednio: $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$. Korzystając ze wzoru na współrzędne środka odcinka, możemy zapisać

$$S_1 = (4,5) = \left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2} \right)$$

$$S_2 = \left(\frac{13}{2}, 1 \right) = \left(\frac{x_B+x_C}{2}, \frac{y_B+y_C}{2} \right)$$

$$S_3 = \left(\frac{3}{2}, 0 \right) = \left(\frac{x_A+x_C}{2}, \frac{y_A+y_C}{2} \right)$$

Stąd otrzymujemy następujące układy równań:

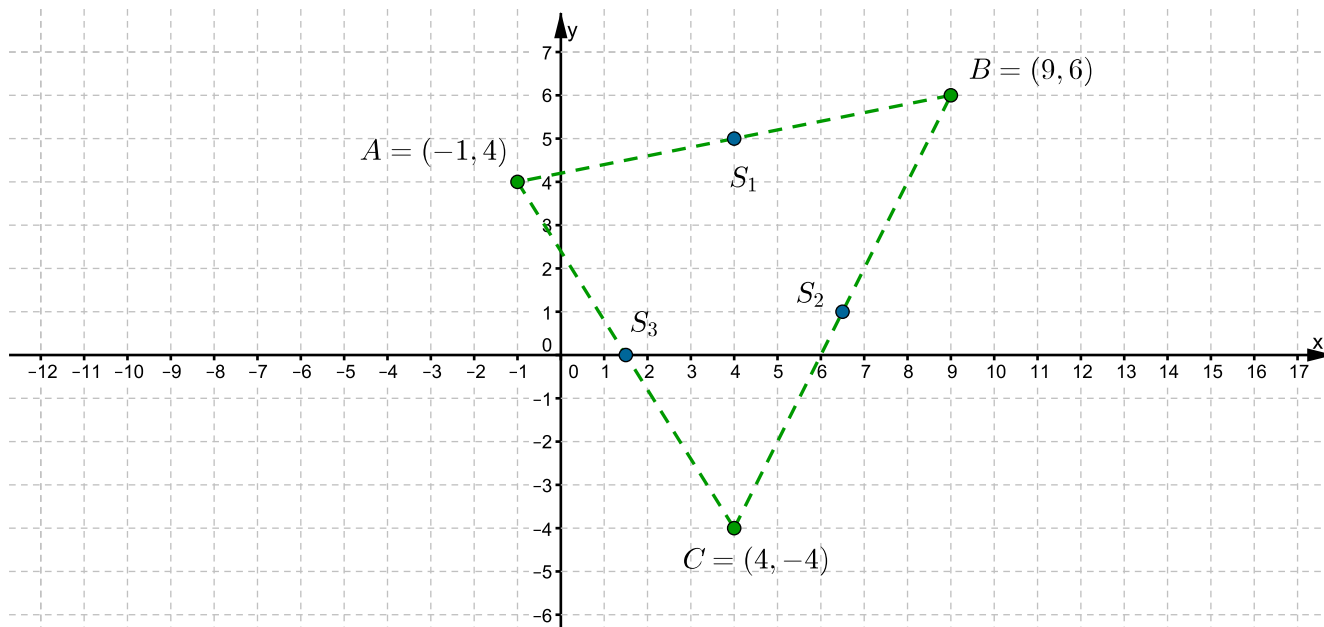
$$\begin{cases} 4 = \frac{x_A+x_B}{2} \\ \frac{13}{2} = \frac{x_B+x_C}{2} \\ \frac{3}{2} = \frac{x_A+x_C}{2} \end{cases} \begin{cases} 5 = \frac{y_A+y_B}{2} \\ 1 = \frac{y_B+y_C}{2} \\ 0 = \frac{y_A+y_C}{2} \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} 8 = x_A + x_B \\ 13 = x_B + x_C \\ 3 = x_A + x_C \end{cases} \begin{cases} 10 = y_A + y_B \\ 2 = y_B + y_C \\ 0 = y_A + y_C \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_A = -1 \\ x_B = 9 \\ x_C = 4 \end{cases} \begin{cases} y_A = 4 \\ y_B = 6 \\ y_C = -4 \end{cases}$$

Wierzchołki trójkąta mają współrzędne: $A = (-1, 4)$, $B = (9, 6)$, $C = (4, -4)$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

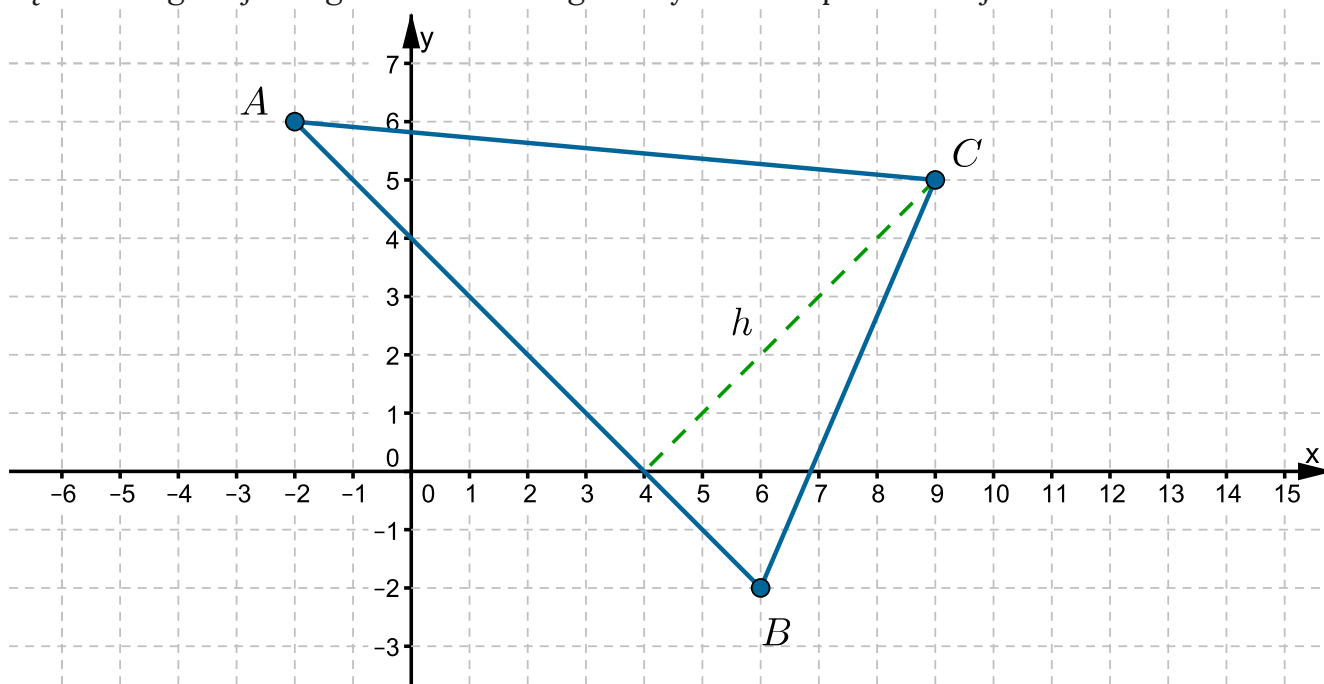
Przykład 6

Oblicz pole trójkąta, którego wierzchołkami są punkty:

$A = (-2, 6)$, $B = (6, -2)$, $C = (9, 5)$.

- sposób I

Obliczymy pole tego trójkąta, wykorzystując wzór $P_{ABC} = \frac{1}{2} |AB| \cdot h$. Potrzebna więc będzie długość jednego z boków i długość wysokości opuszczonej na ten bok.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

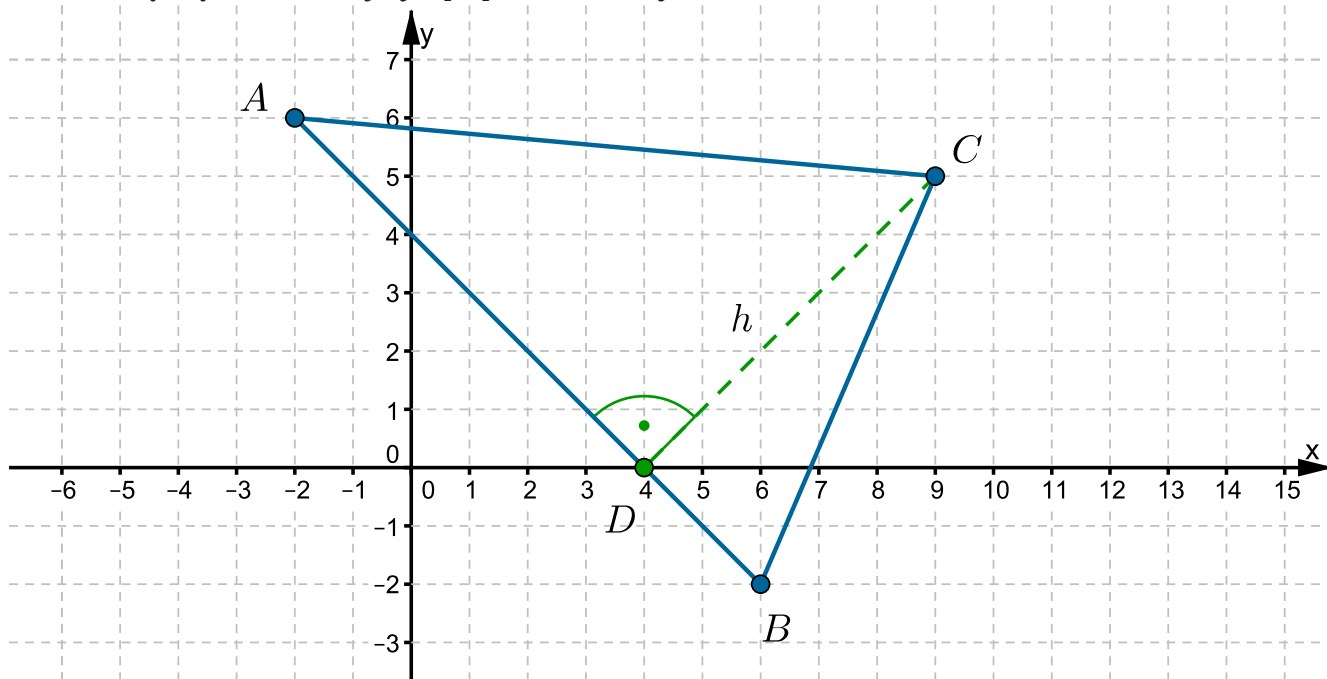
- Krok 1

Obliczamy długość boku AB.

$$|AB| = \sqrt{(-2 - 6)^2 + (6 + 2)^2} = 8\sqrt{2}$$

- Krok 2

Obliczamy wysokość trójkąta poprowadzoną z wierzchołka C do boku AB.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wysokość jest równa długości odcinka CD, gdzie D jest spodkiem tej wysokości na bok AB. Punkt D jest punktem wspólnym prostej zawierającej bok AB i prostej do niej prostopadłej, przechodzącej przez wierzchołek C.

Krok 2.1

Wyznamy równanie prostej zawierającej bok AB.

Współczynnik kierunkowy $a = \frac{6+2}{-2-6} = -1$. Do tej prostej należy punkt $A = (-2, 6)$, zatem jej równanie można zapisać

$$y = -1(x - (-2)) + 6$$

$$y = -x + 4.$$

Krok 2

Wyznamy równanie prostej zawierającej wysokość CD.

Prosta CD jest prostopadła do AB, więc jej współczynnik kierunkowy jest równy 1.

Jej równanie możemy zapisać w postaci $y = x + b$.

Podstawiamy współrzędne punktu $C = (9, 5)$ leżącego na tej prostej i obliczamy współczynnik b .

$$5 = 9 + b$$

czyli $b = -4$. Równanie prostej AB ma postać

$$y = x - 4$$

Krok 3

Obliczamy współrzędne punktu wspólnego obu wyznaczonych prostych.

Współrzędne punktu D są rozwiązaniem układu równań złożonych z równań obu prostych:

$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = x - 4 \end{cases}$$

Rozwiązaniem jest $\begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases}$. Stąd $D = (4, 0)$.

Krok 4

Obliczamy wysokość h .

$$h = |CD| = \sqrt{(9 - 4)^2 + (5)^2} = 5\sqrt{2}$$

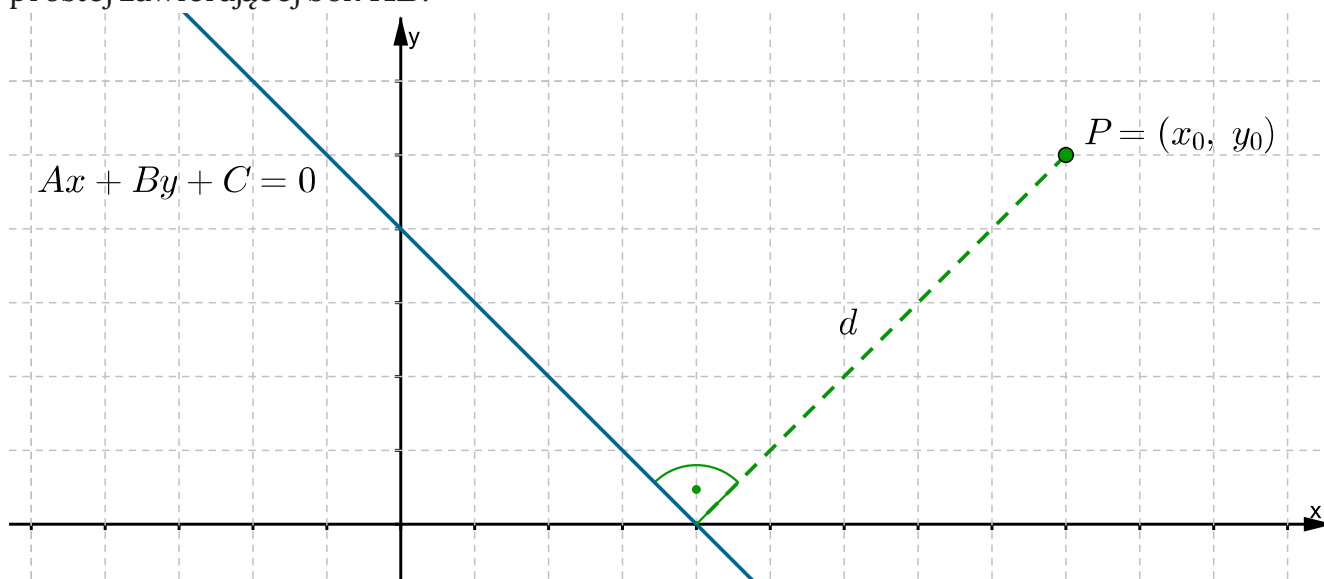
Krok 5

Obliczymy pole trójkąta ABC.

$$P = \frac{1}{2} |AB| h = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 40$$

Uwaga.

Potrzebna do obliczenia pola wysokość trójkąta h jest równa odległości punktu C od prostej zawierającej bok AB.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Odległość punktu $P = (x_0, y_0)$ od prostej o równaniu

$Ax + By + C = 0$ jest równa

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Równanie prostej AB ma postać kierunkową $y = -x + 4$ i ogólną $x + y - 4 = 0$.

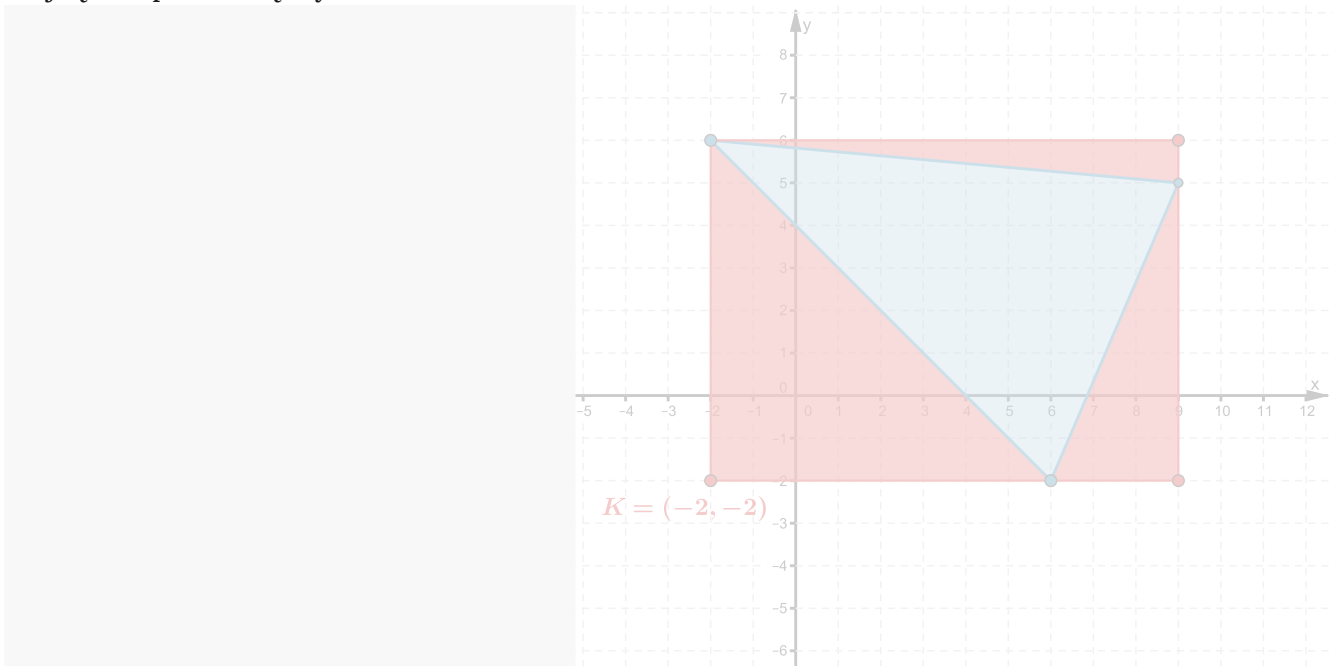
Wysokość h jest odległością punktu $C = (9, 5)$ od prostej o równaniu $x + y - 4 = 0$.

Zatem, wstawiając do wzoru odpowiednie liczby, otrzymujemy

$$h = \frac{|x_0 + y_0 - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|9 + 5 - 4|}{\sqrt{2}} = \frac{|10|}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

- sposób II

Trójkąt ABC możemy wpisać w taki prostokąt, którego boki są równoległe do osi układu współrzędnych. Wtedy pole trójkąta można obliczyć jako różnicę pól prostokąta i trzech trójkątów prostokątnych.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DnT3mEBYy>

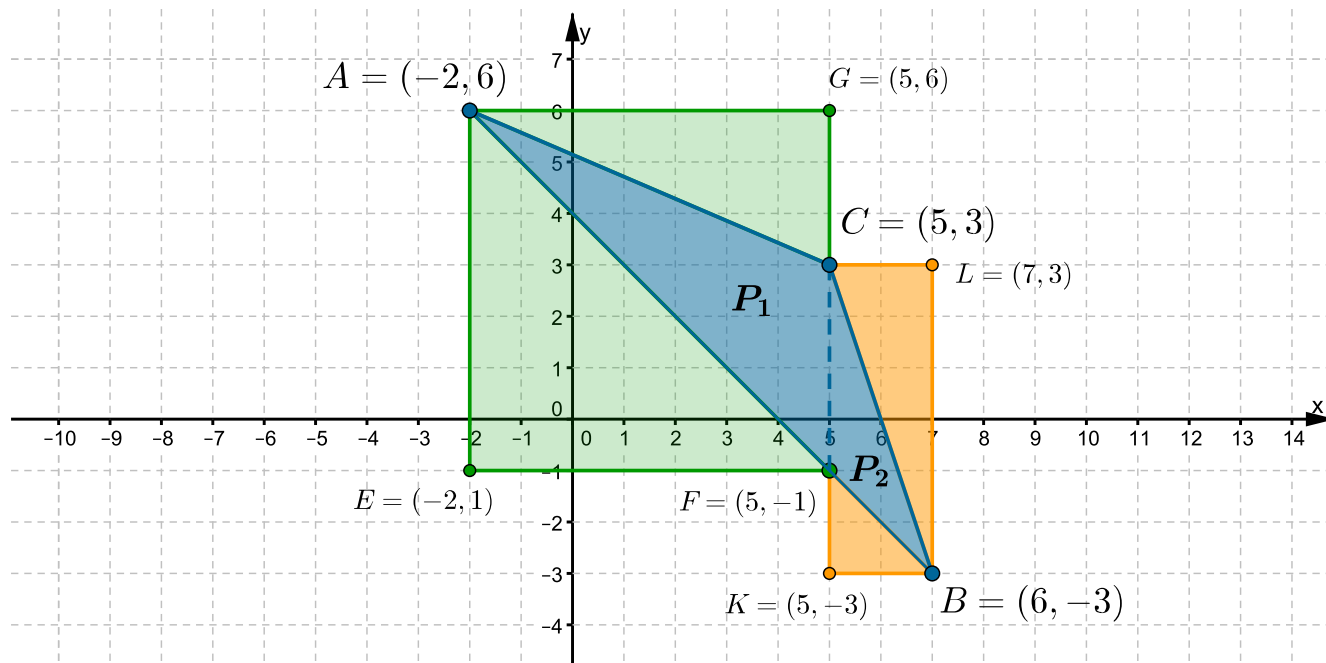
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 7

Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach w punktach:

$A = (-2, 6)$, $B = (6, -3)$, $C = (5, 3)$.

Pole trójkąta rozwartokątnego ABC można obliczyć jako sumę pól dwóch trójkątów ACF i CFB.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

$$P_{ACF} = 7 \cdot 7 - \left(\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 3 \right) = 14$$

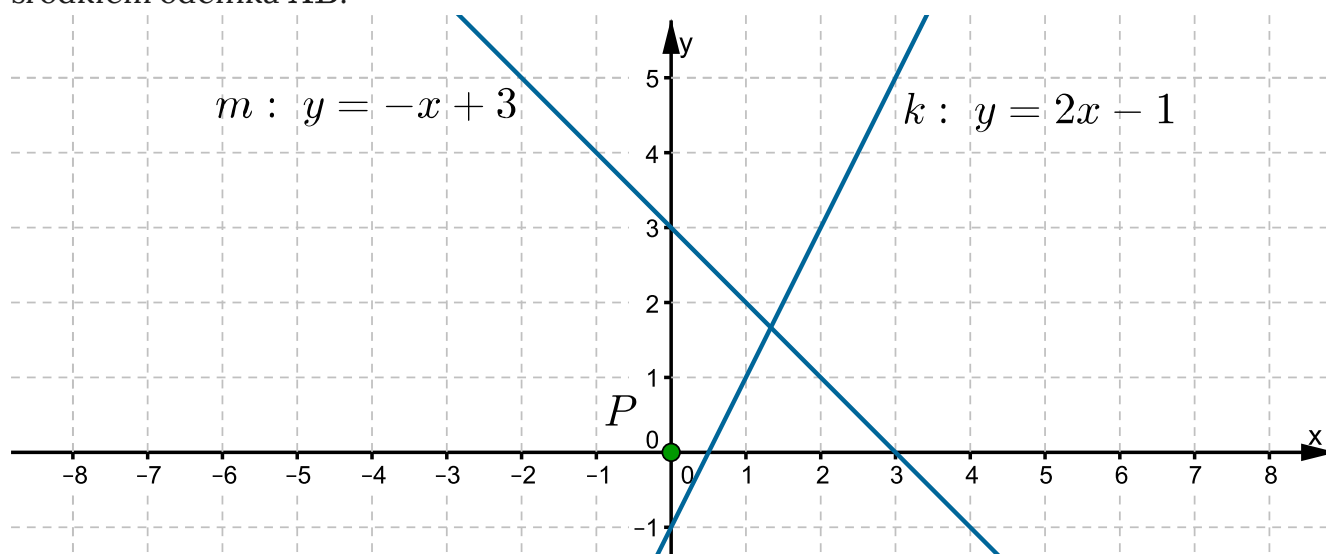
$$P_{CFB} = 6 \cdot 2 - \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 \right) = 4$$

Pole trójkąta ABC:

$$P_{ABC} = P_{ACF} + P_{CFB} = 14 + 4 = 18$$

Przykład 8

Punkt A leży na prostej k o równaniu $y = 2x - 1$, a punkt B na prostej m o równaniu $y = -x + 3$. Wyznacz współrzędne punktów A i B tak, aby punkt $P = (0, 0)$ był środkiem odcinka AB .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Współrzędne punktu A możemy zapisać, wykorzystując fakt, że A leży na prostej $y = 2x - 1$:

$A = (x_A, 2x_A - 1)$. Podobnie zapisujemy współrzędne punktu B leżącego na prostej

$$y = -x + 3:$$

$$B = (x_B, -x_B + 3).$$

Punkt $P = (0,0)$ jest środkiem odcinka AB, zatem wykorzystując wzory na współrzędne środka odcinka, otrzymujemy:

$$\frac{x_A + x_B}{2} = 0 \text{ i } \frac{(2x_A - 1) + (-x_B + 3)}{2} = 0.$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} x_A + x_B = 0 \\ 2x_A - x_B = -2 \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu jest $x_A = -\frac{2}{3}$ i $x_B = \frac{2}{3}$.

Z tego wynika, że

$$A = \left(-\frac{2}{3}, 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 1\right) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{7}{3}\right)$$

$$B = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3} + 3\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

Ćwiczenie 1

Wyznacz równanie symetralnej odcinka AB.

1. $A = (-2, 4)$, $B = (3, 2)$

2. $A = (-3, -1)$, $B = (1, 1)$

3. $A = (1, 2)$, $B = (-2, -1)$

4. $A = (6, 3)$, $B = (-2, 5)$

5. $A = (0, -2)$, $B = (5, 3)$

6. $A = (2\sqrt{2}, -8\sqrt{2})$, $B = (-2\sqrt{2}, 8\sqrt{2})$

Ćwiczenie 2

Wyznacz równanie prostej zawierającej środkową AD trójkąta ABC, którego wierzchołkami są podane punkty.

1. $A = (-2, 3), B = (1, -2), C = (4, 2)$

2. $A = (-3, 3), B = (4, -1), C = (-2, 3)$

3. $A = (6, 1), B = (7, 0), C = (1, 0)$

4. $A = (-3, 2), B = (3, 5), C = (-2, -1)$

Ćwiczenie 3

Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach w punktach: $A = (0, 4), B = (5, 3), C = (-1, -1)$ jest prostokątny. Czy ten trójkąt jest równoramienny?

Ćwiczenie 4

Wykaż, że czworokąt ABCD, którego wierzchołkami są punkty:

$A = (4, -1), B = (8, 6), C = (0, 5), D = (-4, -2)$, jest rombem.

Ćwiczenie 5

Punkty $A = (0, 1), B = (6, -1), C = (7, 2)$ są wierzchołkami równoległoboku ADBC. Punkt E jest punktem przecięcia się przekątnych równoległoboku. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt E i równoległej do boku AB

Ćwiczenie 6

Punkty $B = (5, -2)$ i $D = (3, 6)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu ABCD. Wyznacz równanie prostej AC.

Ćwiczenie 7

Oblicz pole trójkąta prostokątnego ABC, którego wierzchołkami są podane punkty

1. $A = (5,4), B = (-3,0), C = (3,6)$

2. $A = (5,2), B = (-3,8), C = (6,5)$

Ćwiczenie 8

W trójkącie ABC bok AB leży na prostej $y = -x - 2$, wierzchołek $C = (3,5)$. Wyznacz równanie wysokości opuszczonej na bok AB oraz oblicz długość tej wysokości.

Ćwiczenie 9

Oblicz pole równoległoboku ABCD o wierzchołkach w punktach:

$A = (11,4), B = (5, -3), C = (1, -2)$.

Ćwiczenie 10

Punkty: $K = (-3,2), L = (1,4), M = (3,0)$ są środkami kolejnych boków kwadratu ABCD. Wyznacz współrzędne wierzchołków kwadratu.

Jednomian kwadratowy i jego własności. Przesunięcie wykresu jednomianu kwadratowego wzdłuż osi układu współrzędnych

Jednomian kwadratowy i jego własności

Omówimy własności funkcji f określonej wzorem $f(x) = x^2$.

Przykład 1

W poniższej tabeli zapisane są wartości funkcji $f(x) = x^2$ dla kilku przykładowych argumentów.

Tabela.Dane

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

Odczytujemy stąd, że $f(2) = f(-2) = 4$. Uzasadnimy, że tylko dla tych dwóch argumentów funkcja f przyjmuje wartość 4.

Argument x , dla którego funkcja f przyjmuje wartość 4, spełnia równanie $x^2 = 4$, które jest równoważne równaniu

$$x^2 - 4 = 0,$$

czyli

$$(x - 2)(x + 2) = 0.$$

Otrzymany iloczyn $(x - 2)(x + 2)$ jest równy 0 wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z jego czynników jest równy zero.

Wobec tego $x - 2 = 0$ lub $x + 2 = 0$.

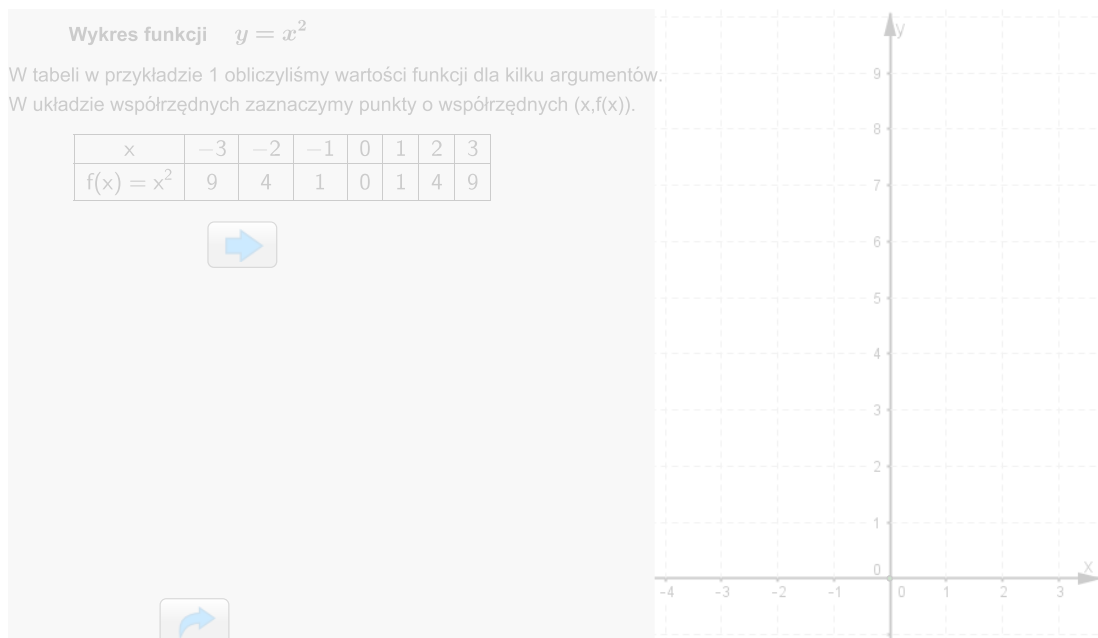
Stąd $f(x) = 4$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 2$ lub $x = -2$.

Przykład 2

Zauważamy też, że $f(-1) = f(1) = 1$ i $f(-3) = f(3) = 9$.

Wykażemy, że dla każdej pary argumentów, które są liczbami przeciwnymi, funkcja f przyjmuje tę samą wartość.

Rozpatrzmy pewną liczbę x , która jest różna od zera. Wtedy $f(x) = x^2$ oraz $f(-x) = (-x)^2 = x^2$, co oznacza, że $f(-x) = f(x)$, czyli funkcja f przyjmuje tę samą wartość dla takich dwóch argumentów, które są liczbami przeciwnymi.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DsCTtcQ6A>

Przykład 3

Z tabeli z przykładu 1 odczytujemy, że $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, $f(3) = 9$, więc $f(0) < f(1) < f(2) < f(3)$. Zauważmy też, że $f(1) - f(0) = 1$, $f(2) - f(1) = 3$, $f(3) - f(2) = 5$. Uzasadnimy, że:

- dla dowolnej nieujemnej liczby całkowitej n prawdziwa jest nierówność $f(n+1) > f(n)$,
 - wraz ze wzrostem n różnica $f(n+1) - f(n)$ rośnie.
- Weźmy pewną liczbę całkowitą nieujemną n . Wówczas $f(n) = n^2$ i $f(n+1) = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$, więc $f(n+1) - f(n) = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1 > 0$, bo liczba n jest nieujemna.
 - Ponieważ $f(n+1) - f(n) = 2n + 1$, więc wraz ze wzrostem n rośnie wartość $2n + 1$.

Przykład 4

Pokażemy, że jedynym punktem wspólnym wykresu funkcji $f(x) = x^2$ z osią Ox jest punkt $(0, 0)$, a pozostałe punkty wykresu tej funkcji leżą powyżej osi Ox .

Funkcja f przyjmuje wyłącznie wartości nieujemne, ponieważ dla dowolnej liczby rzeczywistej x jest $x^2 \geq 0$. Ponadto $x^2 = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$.

Zatem

- punkt $(0, 0)$ jest jedynym punktem wspólnym wykresu funkcji f z osią Ox ,
- pozostałe punkty wykresu tej funkcji leżą powyżej osi Ox .

Przykład 5

Uzasadnimy, że prosta określona równaniem $x = 0$ jest osią symetrii wykresu funkcji f .

Na wykresie funkcji f możemy wskazać pary punktów symetrycznych względem osi Oy . Np. $(1, 1)$ oraz $(-1, 1)$, a także $(-2, 4)$ i $(2, 4)$. Jak wcześniej wykazaliśmy, funkcja f przyjmuje tę samą wartość dla takich dwóch argumentów, które są liczbami przeciwnymi. Zatem dla dowolnej liczby

rzeczywistej x zachodzi równość $f(-x) = f(x)$, a to oznacza, że oś Oy (czyli prosta o równaniu $x = 0$) jest osią symetrii wykresu funkcji f .

Przykład 6

Uzasadniliśmy wcześniej, że dla dowolnej nieujemnej liczby całkowitej n prawdziwa jest nierówność $f(n+1) > f(n)$. Wykażemy, że dla dowolnych liczb nieujemnych x_1, x_2 , takich że $x_1 < x_2$, prawdziwa jest nierówność $f(x_2) > f(x_1)$.

Weźmy takie dwie liczby nieujemne x_1, x_2 , że $x_1 < x_2$. Wtedy

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$$

W otrzymanym iloczynie oba czynniki są dodatnie: $x_2 - x_1 > 0$, bo $x_1 < x_2$, natomiast $x_2 + x_1 > 0$, gdyż $x_2 + x_1$ jest sumą liczby nieujemnej x_1 i liczby dodatniej x_2 . Stąd $f(x_2) - f(x_1) > 0$, czyli $f(x_2) > f(x_1)$.

Zatem (z uwagi na symetrię wykresu funkcji f względem osi Oy)

- maksymalny przedział, w którym funkcja f jest rosnąca to $\langle 0, +\infty \rangle$,
- maksymalny przedział, w którym funkcja f jest malejąca to $(-\infty, 0]$.

Przykład 7

Uzasadniliśmy wcześniej, że dla każdej pary argumentów, które są liczbami przeciwnymi, funkcja f przyjmuje tę samą wartość.

Wykażemy, że dla każdej dodatniej liczby k istnieją dokładnie dwa takie argumenty funkcji f , że $f(x) = k$.

Przekształcamy równanie

$$x^2 = k$$

$$x^2 - k = 0$$

$$(x - \sqrt{k})(x + \sqrt{k}) = 0.$$

Ta równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x - \sqrt{k} = 0$ lub $x + \sqrt{k} = 0$.

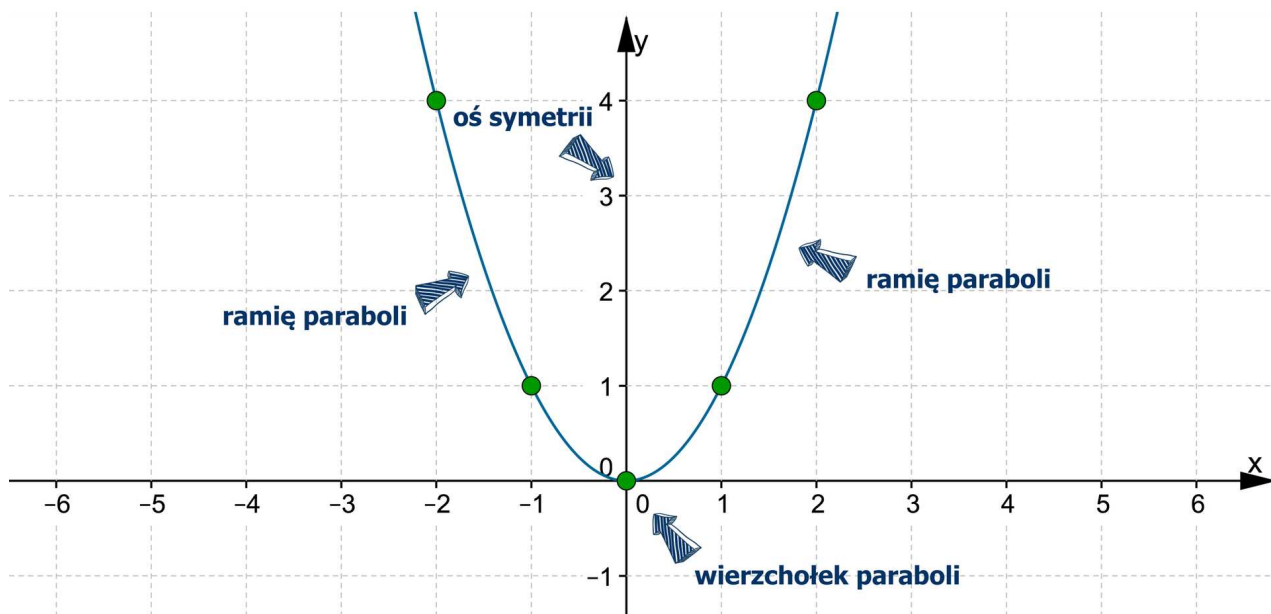
Zatem $f(x) = k$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = \sqrt{k}$ lub $x = -\sqrt{k}$. Liczby te są różne, gdyż $-\sqrt{k} < 0 < \sqrt{k}$.

To oznacza, że dowolna dodatnia liczba k należy do zbioru wartości funkcji f .

Ponieważ $f(0) = 0$, to możemy stwierdzić, że zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle 0, +\infty \rangle$.

Ważne!

- Wykresem funkcji $f(x) = x^2$ jest krzywa o równaniu $y = x^2$, którą nazywamy parabolą.
- Punkt $O = (0, 0)$ nazywamy wierzchołkiem tej paraboli.
- Prosta $x = 0$ jest osią symetrii tej paraboli. Symetryczne względem tej prostej części paraboli $y = x^2$ nazywać będziemy jej ramionami.
- Ramiona paraboli $y = x^2$ skierowane są zgodnie ze zwrotem osi Oy (mówimy też, że ramiona tej paraboli skierowane są w górę).
- Parabola ta ma dokładnie dwa punkty wspólne z każdą prostą o równaniu $y = k$, gdzie $k > 0$.



Przykład 8

Narysujemy wykres funkcji $g(x) = 2x^2$.

Ustalimy najpierw zależność między wykresem funkcji g a wykresem funkcji $f(x) = x^2$.

Wartości tych funkcji dla kilku przykładowych argumentów prezentuje poniższa tabela.

Tabela.Dane

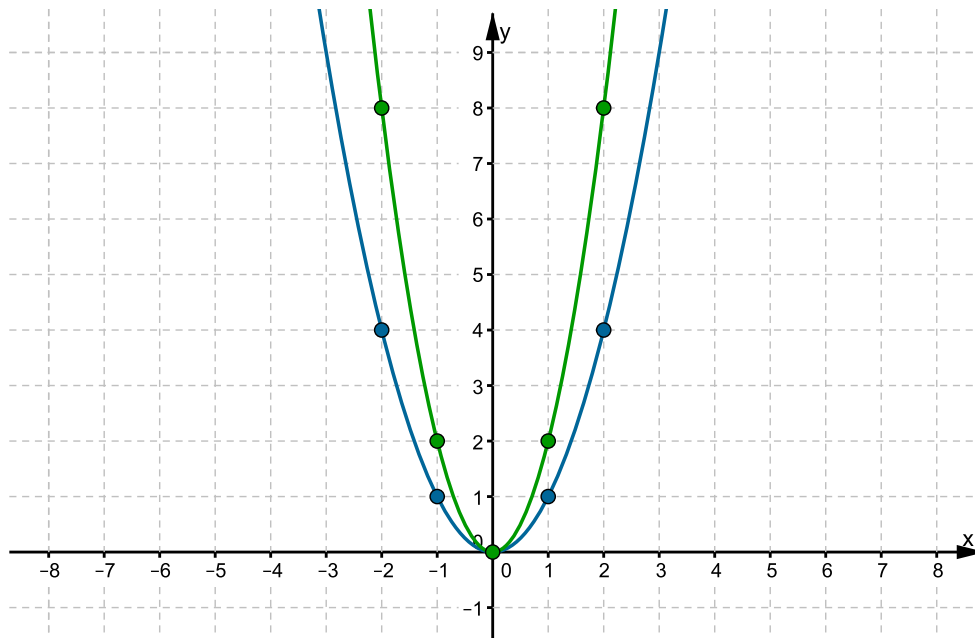
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9
$g(x)$	18	8	2	0	2	8	18

Zauważmy, że $g(0) = f(0) = 0$. Dla ustalonego argumentu $x \neq 0$, $f(x) > 0$ oraz równość

$$g(x) = 2x^2 = 2f(x),$$

co oznacza, że wartość funkcji g jest dwa razy większa od wartości funkcji f .

Wykres funkcji g (krzywa o równaniu $y = 2x^2$) jest parabolą, której wierzchołkiem jest punkt $O = (0, 0)$, a ramiona skierowane są w górę.

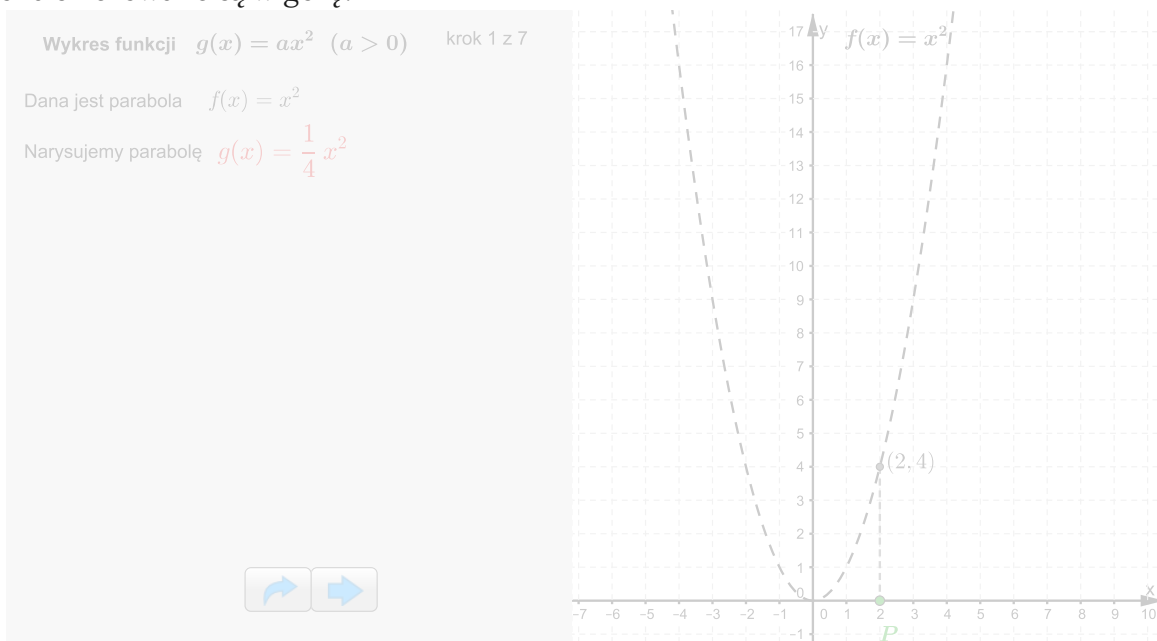


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 9

W odniesieniu do wykresu funkcji $f(x) = x^2$ rozpatrzmy wykres funkcji h danej wzorem $h(x) = ax^2$, gdzie a jest ustaloną liczbą dodatnią. Niezależnie od wartości a jest $h(0) = f(0) = 0$. Dla ustalonego niezerowego $x \neq 0$ zachodzi równość $h(x) = a \cdot f(x) > 0$.

Wykresem każdej takiej funkcji h jest parabola, której wierzchołkiem jest punkt $O = (0, 0)$ i ramiona skierowane są w górę.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DsCTtcQ6A>

- Krzywą o równaniu $y = x^2$ nazwaliśmy parabolą. Wykazaliśmy, że pewne jej własności ma również każda krzywa o równaniu $y = ax^2$, gdzie $a > 0$ i na tej podstawie uznaliśmy, że każdą z tych krzywych można również nazwać parabolą.
- Wybierzmy na płaszczyźnie dowolną prostą k oraz punkt F , który nie należy do tej prostej. Parabola to zbiór wszystkich punktów tej płaszczyzny, których odległość od prostej k , zwanej kierownicą paraboli, jest równa odległości od punktu F , tzw. ogniska paraboli.

- Punkt paraboli, którego odległość od ogniska jest najmniejsza z możliwych, nazywamy wierzchołkiem paraboli. Wierzchołek leży w połowie odległości ogniska F od kierownicy k .
- Prosta prostopadła do kierownicy k i przechodząca przez ognisko F jest osią symetrii paraboli i przecina tę parabolę w jej wierzchołku.

Przykład 10

Wykażemy, że krzywa o równaniu $y = x^2$ to parabola, której kierownicą jest prosta k o równaniu $y = -\frac{1}{4}$, a ogniskiem punkt $F = (0, \frac{1}{4})$.

Spośród punktów danej krzywej, najbliższej prostej k leży punkt $W = (0, 0)$, jedyny punkt tej krzywej, który leży na osi Ox . Jego odległość zarówno od punktu F , jak i od prostej k jest równa $\frac{1}{4}$.

Na krzywej o równaniu $y = x^2$ leżą też np. punkty $A = (1, 1)$ i $B = (-2, 4)$. Pokażemy, że każdy z nich jest równo odległy od kierownicy k i ogniska F .

Dla punktu A odległość od kierownicy k jest równa $1\frac{1}{4}$, a odległość od ogniska jest równa

$$|AF| = \sqrt{(1-0)^2 + (1-\frac{1}{4})^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4},$$

czyli również $1\frac{1}{4}$.

Dla punktu B odległość od kierownicy k jest równa $4\frac{1}{4}$, a odległość od ogniska jest równa

$$|BF| = \sqrt{(-2-0)^2 + (4-\frac{1}{4})^2} = \sqrt{(-2)^2 + (\frac{15}{4})^2} = \sqrt{4 + \frac{225}{16}} = \sqrt{\frac{289}{16}} = \frac{17}{4} = 4\frac{1}{4},$$

zatem i te dwie odległości są równe.

Pokażemy, że każdy punkt krzywej o równaniu $y = x^2$ leży w tej samej odległości od prostej k i punktu F .

Zauważmy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x punkt $P = (x, x^2)$ leży na tej krzywej. Odległość punktu P od prostej k to $x^2 + \frac{1}{4}$, a odległość punktu P od ogniska F jest równa

$$|PF| = \sqrt{(x-0)^2 + (x^2-\frac{1}{4})^2} = \sqrt{x^2 + x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16}} = \sqrt{x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16}} = \sqrt{(x^2 + \frac{1}{4})^2} = x^2 + \frac{1}{4}.$$

Zatem dla każdego x odległości te są równe, więc krzywa o równaniu $y = x^2$ to parabola, której wierzchołkiem jest punkt $W = (0, 0)$, a jej osią symetrii jest prosta o równaniu $x = 0$.

Każda krzywa o równaniu $y = ax^2$, gdzie $a \neq 0$ to parabola, której kierownicą jest prosta k o równaniu $y = -\frac{1}{4a}$, a ogniskiem jest punkt $F = (0, \frac{1}{4a})$.

Dla dowolnej liczby rzeczywistej x punkt $P = (x, ax^2)$ leży na tej krzywej. Odległość punktu P od prostej k to $|ax^2 + \frac{1}{4a}|$, a odległość punktu P od ogniska F wyraża się wzorem

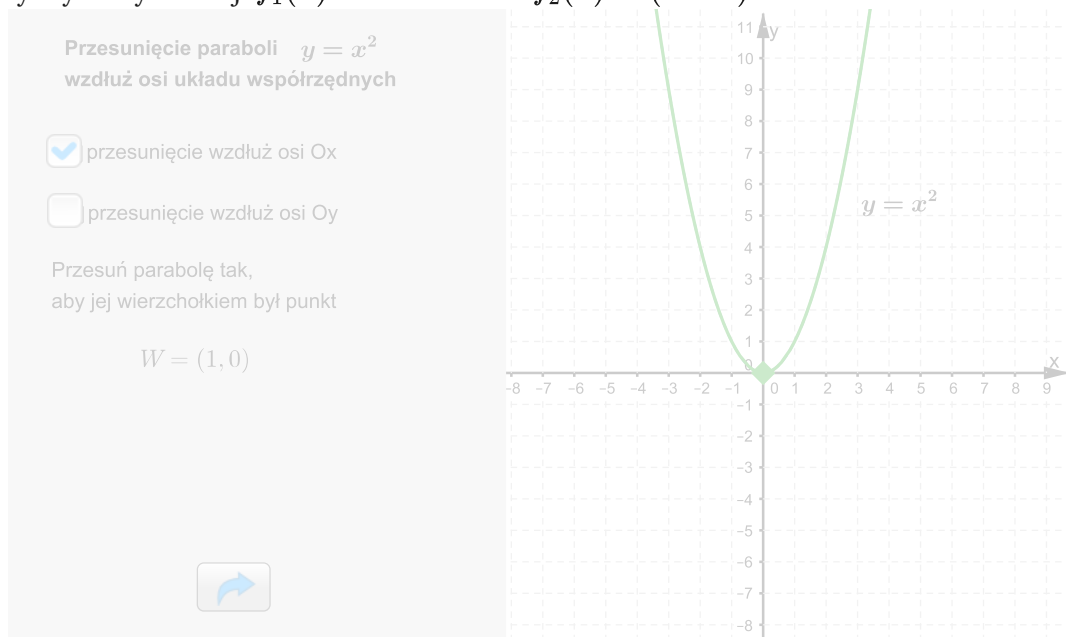
$$\begin{aligned} &= \sqrt{(x-0)^2 + (ax^2 - \frac{1}{4a})^2} = \sqrt{x^2 + a^2x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16a^2}} = \sqrt{a^2x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16a^2}} = \sqrt{(ax^2 + \frac{1}{4a})^2} \\ &= a|x^2 + \frac{1}{4a}|. \end{aligned}$$

Odległości te są równe, zatem krzywa o równaniu $y = ax^2$ to parabola. Jej wierzchołkiem jest punkt $W = (0, 0)$, a osią symetrii – prosta o równaniu $x = 0$.

Przesunięcie wykresu jednomianu kwadratowego wzdłuż osi układu współrzędnych

Przykład 11

Narysujemy wykresy funkcji $f_1(x) = x^2 - 3$ oraz $f_2(x) = (x - 2)^2$.

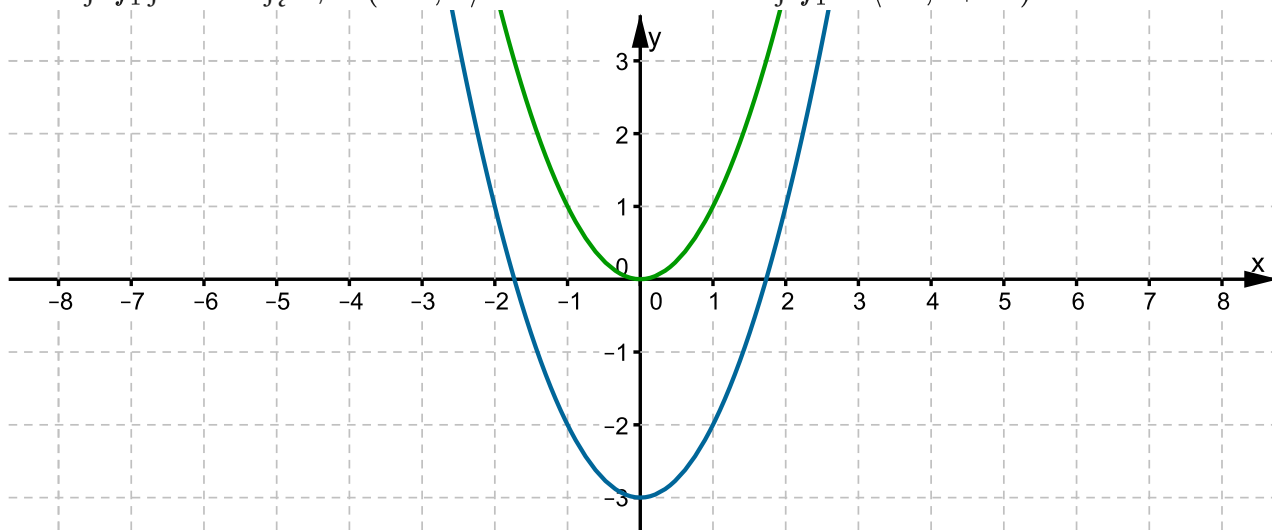


Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DsCTtcQ6A>

Rozpatrzmy parabolę o równaniu $y = x^2$.

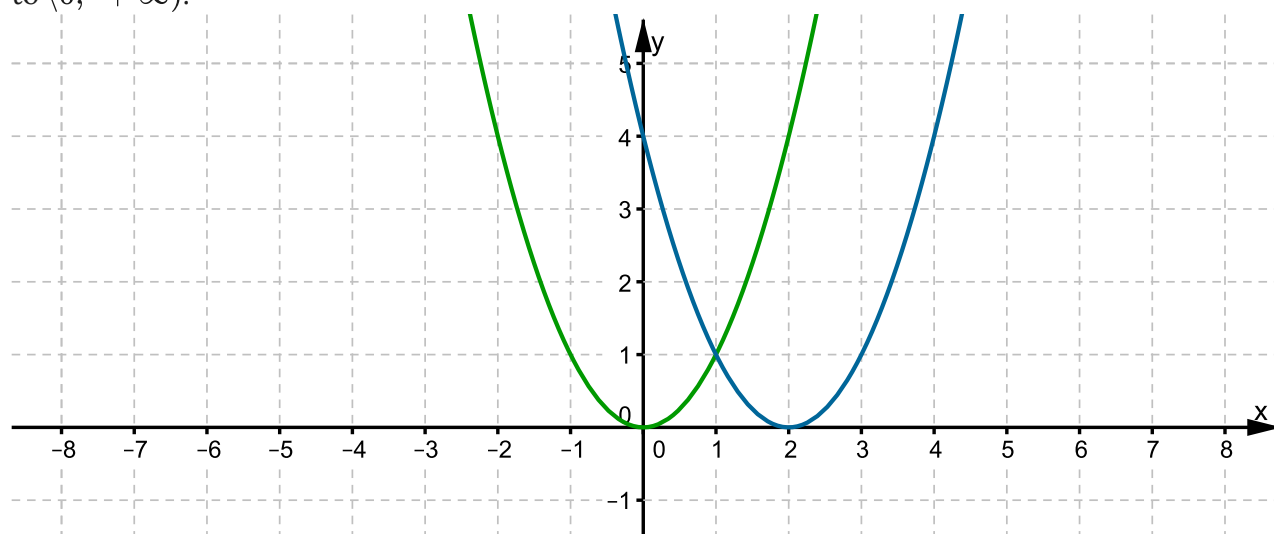
Zauważmy, że:

- po jej przesunięciu o 3 jednostki w dół wzdłuż osi Oy otrzymamy parabolę o równaniu $y = x^2 - 3$. Wykresem funkcji f_1 jest więc parabola, której wierzchołek to $W_1 = (0, -3)$, a jej ramiona skierowane są w górę. Prosta $x = 0$ jest osią symetrii tej paraboli. Zatem maksymalny przedział, w którym funkcja f_1 jest rosnąca, to $\langle 0, +\infty \rangle$, a maksymalny przedział, w którym funkcja f_1 jest malejąca, to $\langle -\infty, 0 \rangle$. Zbiór wartości funkcji f_1 to $\langle -3, +\infty \rangle$.



- po jej przesunięciu o 2 jednostki w prawo wzdłuż osi Ox otrzymamy parabolę o równaniu $y = (x - 2)^2$. Stąd wykresem funkcji f_2 jest parabola o wierzchołku w punkcie $W_2 = (2, 0)$, której ramiona skierowane są w górę. Prosta $x = 2$ jest osią symetrii tej paraboli. Wobec tego

przedział $\langle 2, +\infty \rangle$ to maksymalny przedział, w którym funkcja f_2 jest rosnąca, a przedział $(-\infty, 2\rangle$ to maksymalny przedział, w którym funkcja f jest malejąca. Zbiór wartości funkcji f_1 to $\langle 0, +\infty \rangle$.



Przykład 12

Narysujemy wykresy funkcji.

1. $g_1(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2$
2. $g_2(x) = -x^2 - 1$
3. $g_3(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 3$
4. $g_4(x) = -2(x+1)^2$

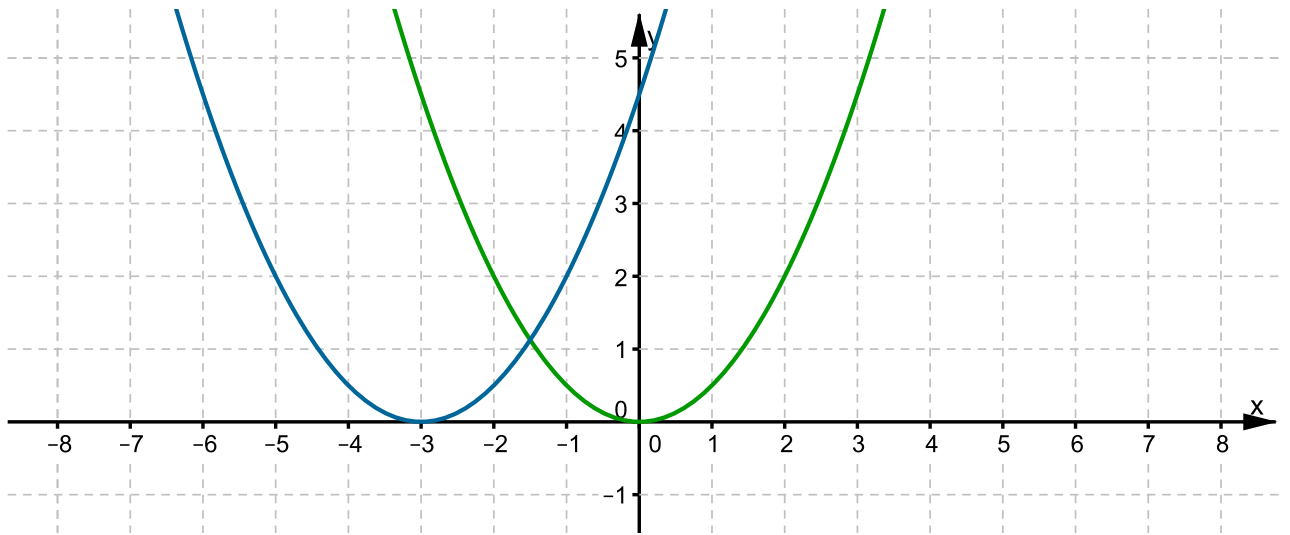
Rozpatrzmy funkcję f daną wzorem $f(x) = ax^2$, gdzie a jest ustaloną liczbą różną od zera.

Obrazem wykresu funkcji f w przesunięciu o q jednostek wzdłuż osi Oy jest wykres takiej funkcji g , że $g(x) = ax^2 + q$. Jest to więc parabola przystająca do paraboli o równaniu $y = ax^2$, której wierzchołkiem jest punkt $(0, q)$. Ośią symetrii tej paraboli jest prosta o równaniu $x = 0$.

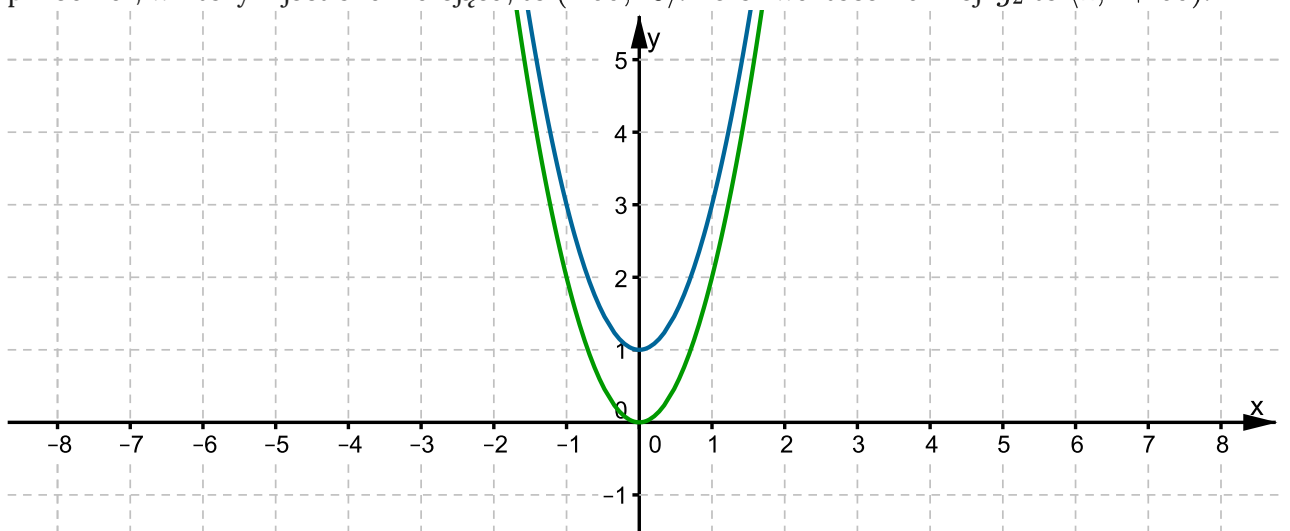
Obrazem wykresu funkcji f w przesunięciu o p jednostek wzdłuż osi Ox jest wykres takiej funkcji h , że $h(x) = a(x-p)^2$. Jest to więc parabola przystająca do paraboli o równaniu $y = ax^2$, której wierzchołkiem jest punkt $(p, 0)$. Ośią symetrii tej paraboli jest prosta o równaniu $x = p$.

Wobec powyższego:

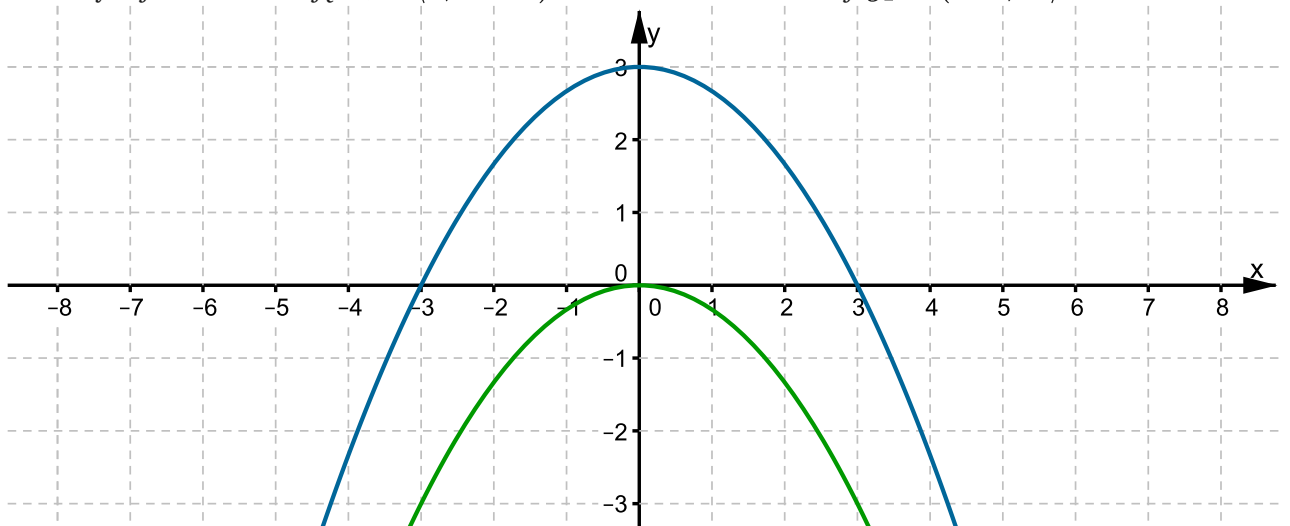
1. Wykresem funkcji $g_1(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2$ jest parabola, której wierzchołkiem jest punkt $(-3, 0)$, a jej ramiona są skierowane w górę. Ośią symetrii tej paraboli jest prosta o równaniu $x = -3$. Maksymalny przedział, w którym funkcja g_1 jest rosnąca, to $\langle -3, +\infty \rangle$, a maksymalny przedział, w którym funkcja g_1 jest malejąca, to $(-\infty, -3\rangle$. Zbiór wartości funkcji g_1 to $\langle 0, +\infty \rangle$.



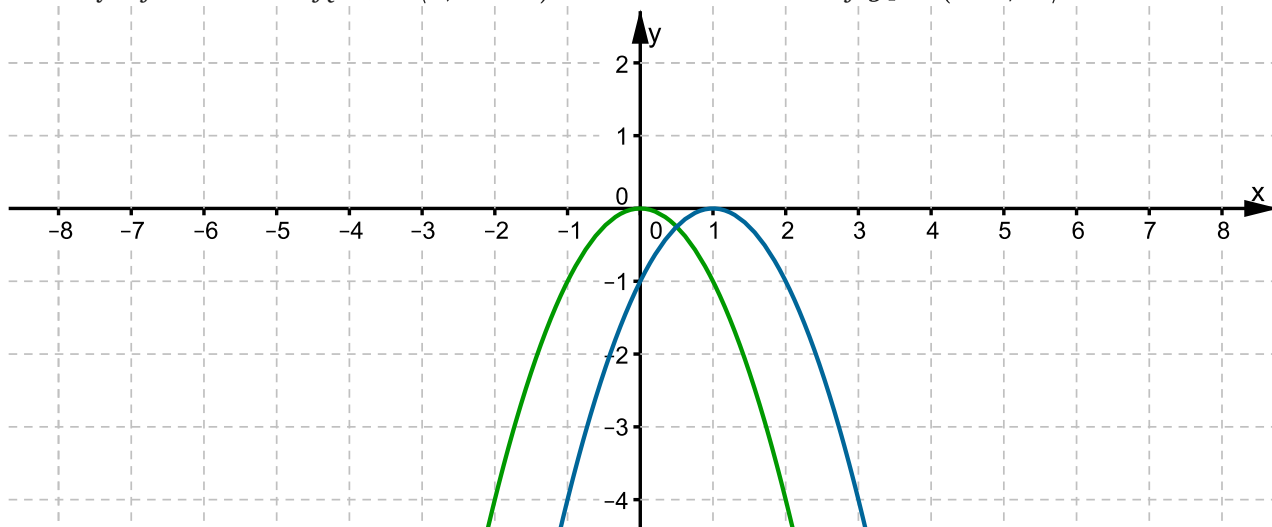
2. Wykresem funkcji $g_2(x) = 2x^2 + 1$ jest parabola, której wierzchołkiem jest punkt $(0, 1)$, a jej ramiona skierowane są w górę. Oś symetrii tej paraboli jest prosta o równaniu $x = 0$. Maksymalny przedział, w którym funkcja g_2 jest rosnąca, to $\langle 0, +\infty \rangle$, a maksymalny przedział, w którym jest ona malejąca, to $(-\infty, 0]$. Zbiór wartości funkcji g_2 to $[1, +\infty)$.



3. Wykresem funkcji $g_3(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 3$ jest parabola, której wierzchołkiem jest punkt $(0, 3)$, a jej ramiona są skierowane w dół. Oś symetrii tej paraboli jest prosta o równaniu $x = 0$. Maksymalny przedział, w którym funkcja g_3 jest rosnąca, to $(-\infty, 0]$, a maksymalny przedział, w którym jest ona malejąca, to $\langle 0, +\infty \rangle$. Zbiór wartości funkcji g_3 to $(-\infty, 3]$.



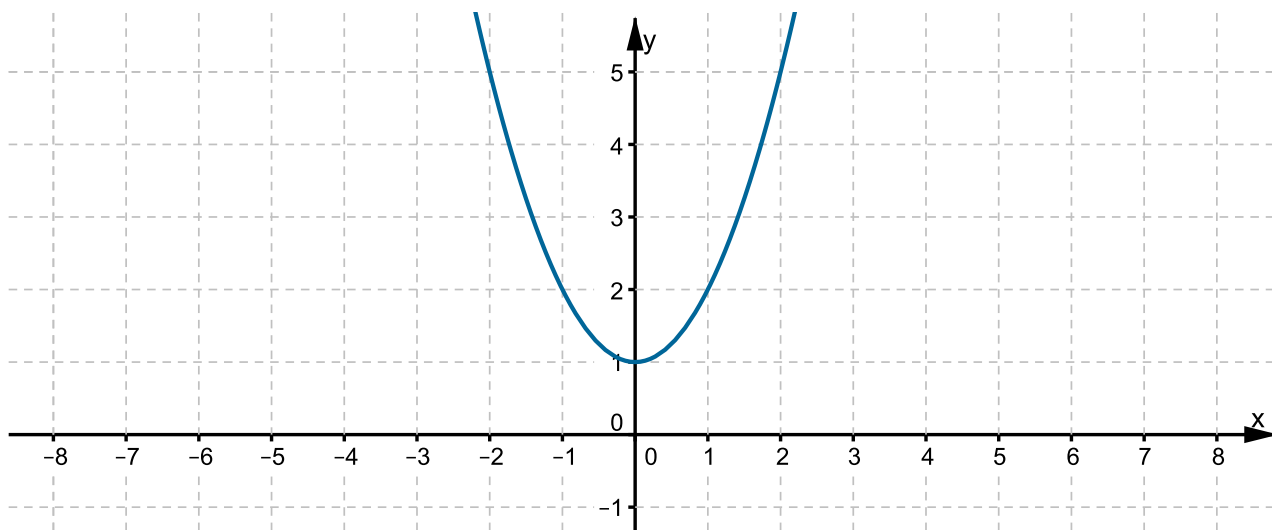
4. Wykresem funkcji $g_4(x) = -(x - 1)^2$ jest parabola, której wierzchołkiem jest punkt $(1, 0)$, a jej ramiona są skierowane w dół. Oś symetrii tej paraboli jest prosta o równaniu $x = 1$. Maksymalny przedział, w którym funkcja g_4 jest rosnąca, to $(-\infty, 1)$, a maksymalny przedział, w którym jest ona malejąca, to $\langle 1, +\infty)$. Zbiór wartości funkcji g_4 to $(-\infty, 0]$.



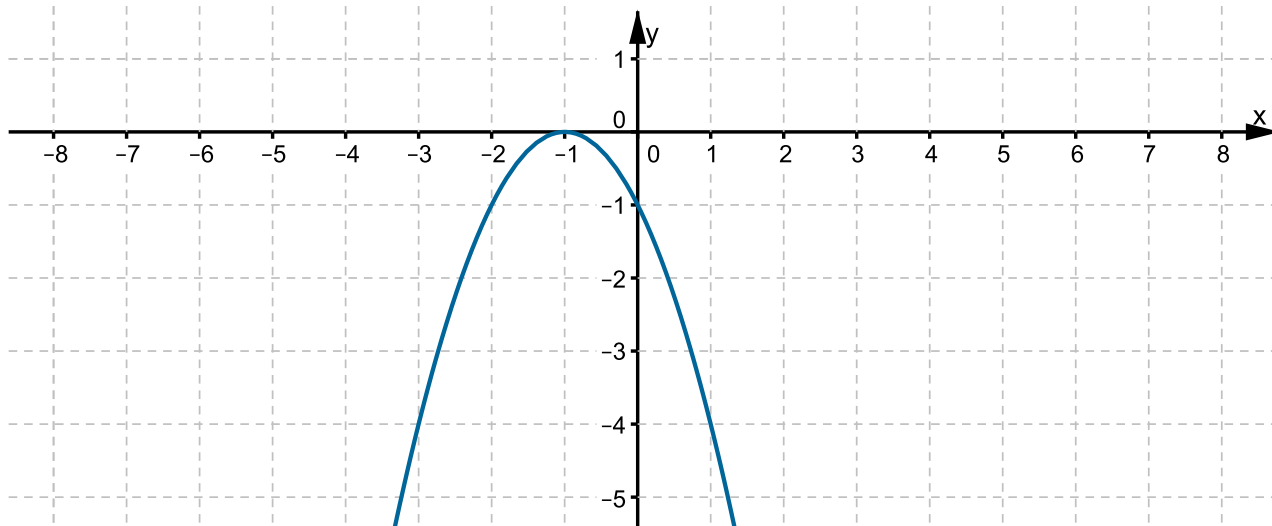
Przykład 13

Znajdziemy równania parabol, które są zaprezentowane na poniższych rysunkach.

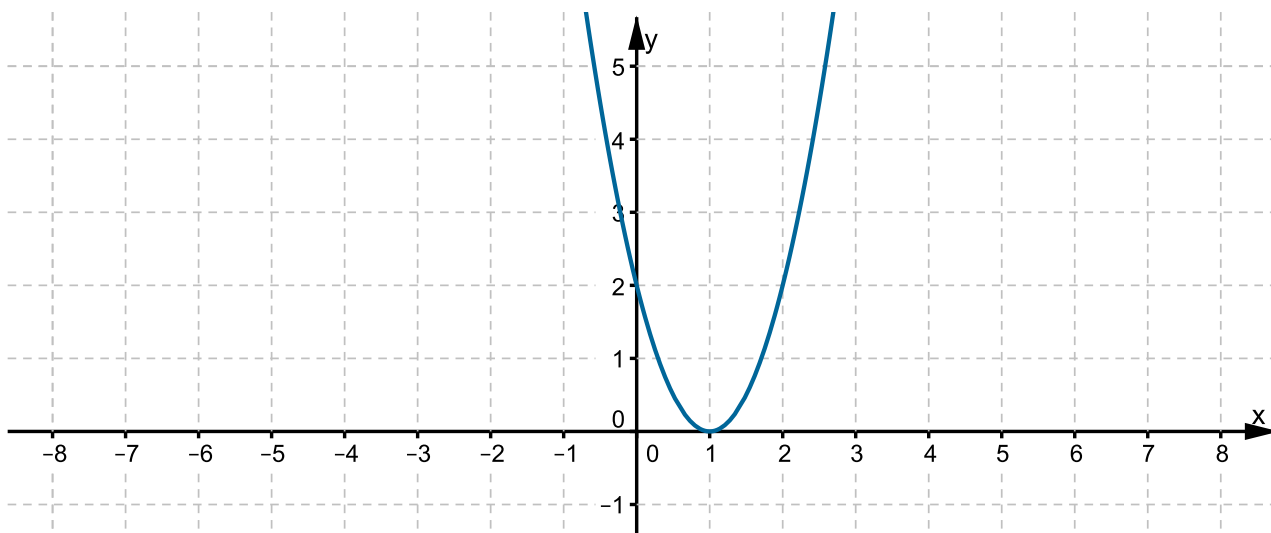
1.



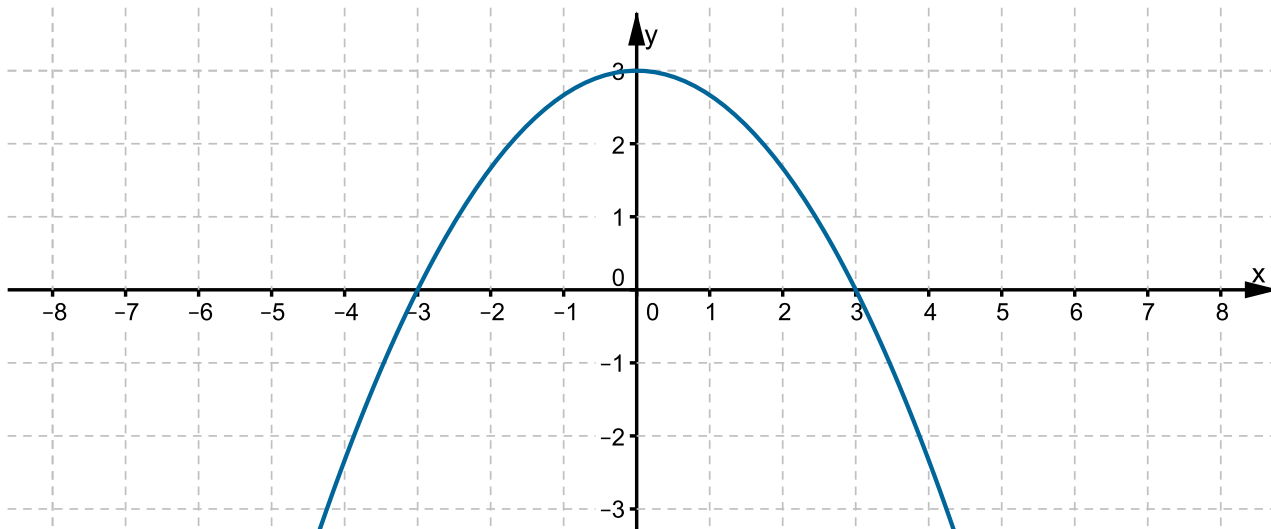
2.



3.



4.



5. Wierzchołkiem paraboli jest punkt $(0, 1)$, więc ma ona równanie postaci $y = ax^2 + 1$. Na tej paraboli leży też punkt $(1, 2)$, zatem $a \cdot 1^2 + 1 = 2$, stąd $a = 1$. Wobec tego równanie tej paraboli to $y = x^2 + 1$.
6. Wierzchołkiem paraboli jest punkt $(-1, 0)$, zatem ma ona równanie postaci $y = a(x + 1)^2$. Na tej paraboli leży też punkt $(0, -1)$, więc $a \cdot (0 + 1)^2 = -1$, stąd $a = -1$. To znaczy, że ta parabola ma równanie $y = -(x + 1)^2$.
7. Wierzchołkiem paraboli jest punkt $(1, 0)$, więc ma ona równanie postaci $y = a(x - 1)^2$. Na tej paraboli leży też punkt $(0, 2)$, zatem $a \cdot (0 - 1)^2 = 2$, stąd $a = 2$. To znaczy, że ta parabola ma równanie $y = 2(x - 1)^2$.
8. Wierzchołkiem paraboli jest punkt $(0, 3)$, zatem ma ona równanie postaci $y = ax^2 + 3$. Na tej paraboli leży też punkt $(3, 0)$, więc $a \cdot 3^2 + 3 = 0$, stąd $a = -\frac{1}{3}$. Wobec tego równanie tej paraboli to $y = -\frac{1}{3}x^2 + 3$.

Ćwiczenie 2

Funkcja g określona jest wzorem $g(x) = -2x^2 - c^2$. Można tak dobrać c , aby największa wartość tej funkcji była równa

☐ 2

☐ 1

☐ -1

☐ 0

Ćwiczenie 3

Do zbioru wartości funkcji $f(x) = x^2$ należy liczba

☐ $-\sqrt{3} + 2$

☐ $-\sqrt{3} + \sqrt{2}$

☐ $-2 + \sqrt{3}$

☐ $-3 + \sqrt{2}$

Ćwiczenie 4

Wskaż prostą, która przecina parabolę $y = -x^2$ w dokładnie dwóch punktach.

☐ $y = 2$

☐ $y = -1$

☐ $y = 0$

☐ $y = 1$

Ćwiczenie 5

Aby otrzymać wykres funkcji $f(x) = -2x^2$, należy

☐ odbić parabolę o równaniu $y = 2x^2$ symetrycznie względem osi Oy

☐ odbić parabolę o równaniu $y = 2x^2$ symetrycznie względem osi Ox

☐ przesunąć parabolę o równaniu $y = x^2$ o 2 jednostki wzdłuż osi Ox

☐ przesunąć parabolę o równaniu $y = x^2$ o 2 jednostki wzdłuż osi Oy

Ćwiczenie 6

Wskaż maksymalny przedział, w którym funkcja $f(x) = -3(x + 1)^2$ jest malejąca.

☐ $(-\infty, -1)$

☐ $(-\infty, 1)$

☐ $\langle -1, +\infty)$

☐ $\langle 1, +\infty)$

Ćwiczenie 7

Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = 17(x - 1)^2$. Wskaż prawdziwą równość.

☐ $f(-50) = f(52)$

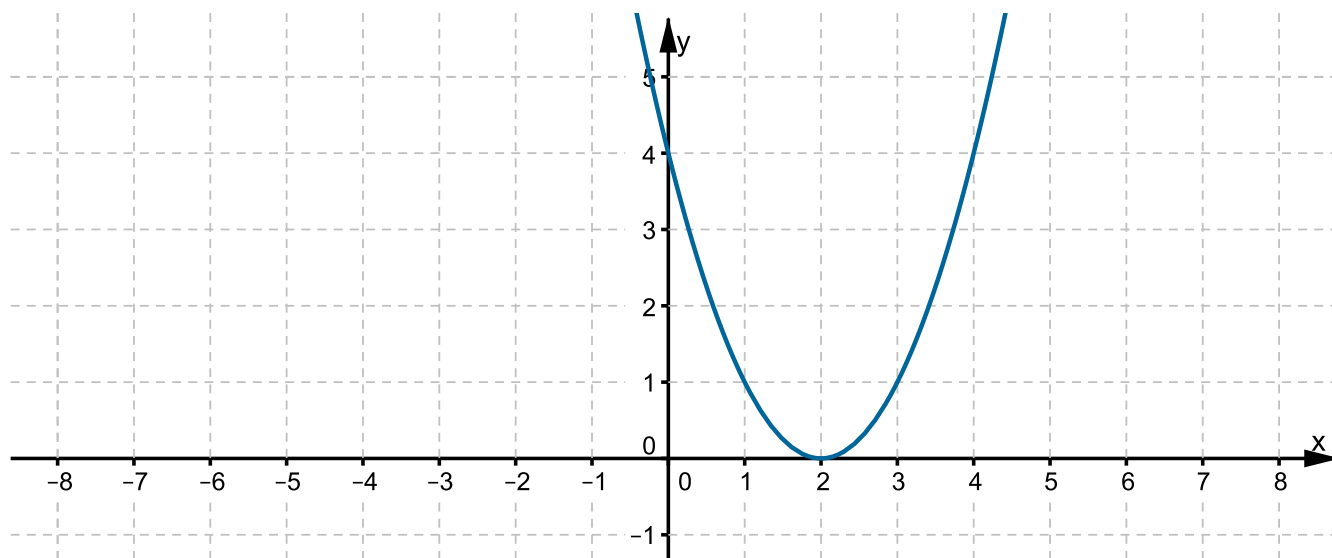
☐ $f(-50) = f(53)$

☐ $f(-50) = f(51)$

☐ $f(-50) = f(50)$

Ćwiczenie 8

Na rysunku przedstawiono parabolę, która jest wykresem funkcji f .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Funkcja f jest określona wzorem

☐ $f(x) = (x + 2)^2$

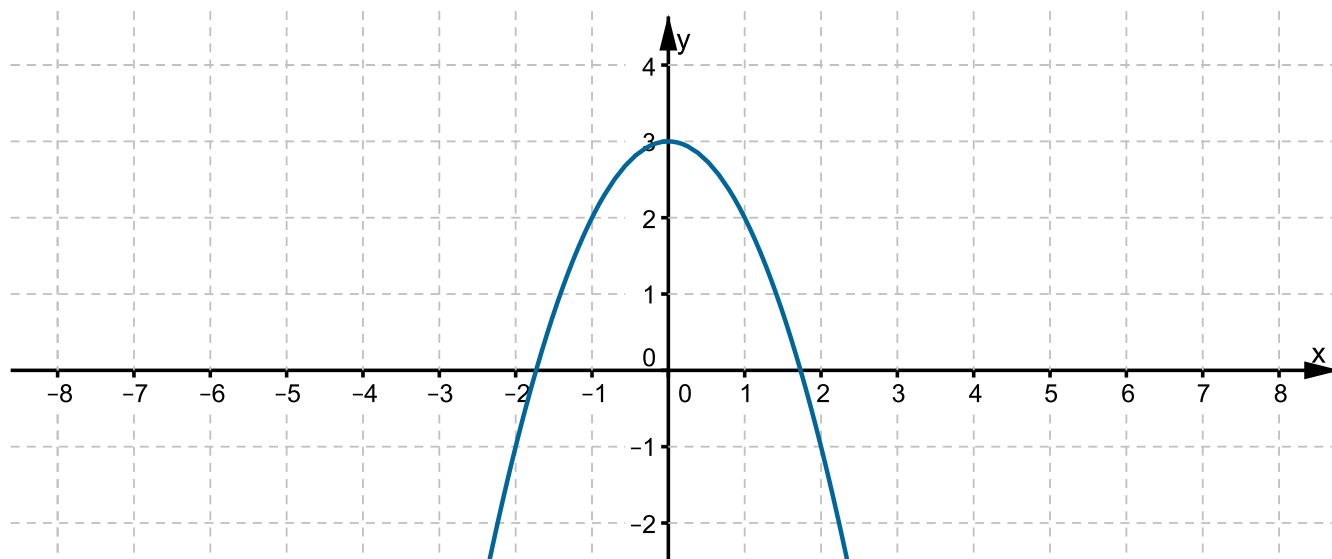
☐ $f(x) = x^2 + 2$

☐ $f(x) = x^2 - 2$

☐ $f(x) = (x - 2)^2$

Ćwiczenie 9

Na rysunku przedstawiono parabolę, która jest wykresem funkcji g .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Funkcja g jest określona wzorem

☐ $g(x) = -x^2 - 3$

☐ $g(x) = -x^2 + 3$

☐ $g(x) = -(x + 3)^2$

☐ $g(x) = -(x - 3)^2$

Ćwiczenie 10

Funkcja g określona jest wzorem $g(x) = (m^2 + 2)x^2 + m$. Można dobrać taką wartość m , żeby osią symetrii wykresu tej funkcji była prosta o równaniu

☐ $x = 2$

☐ $x = -1$

☐ $x = 0$

☐ $x = 1$

Ćwiczenie 11

Narysuj wykres funkcji f . Zaznacz wierzchołek otrzymanej paraboli i narysuj jej oś symetrii.

1. $f(x) = x^2 + 1$

2. $f(x) = 4x^2 - 1$

3. $f(x) = 2x^2 + 2$

Ćwiczenie 12

Narysuj wykres funkcji g . Zaznacz wierzchołek otrzymanej paraboli i narysuj jej oś symetrii.

1. $g(x) = -x^2 + 4$

2. $f(x) = -2x^2 - 1$

3. $f(x) = -3x^2 + 3$

4. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2$

Ćwiczenie 13

Podaj zbiór wartości funkcji f .

1. $f(x) = 3x^2 + 1$

2. $f(x) = (x + 5)^2$

3. $f(x) = 2x^2 - 3$

4. $f(x) = 4(x - 7)^2$

Ćwiczenie 14

Podaj zbiór wartości funkcji h .

1. $h(x) = -(x + 4)^2$

2. $h(x) = -9x^2 - 4$

3. $h(x) = -x^2 + 2$

4. $h(x) = -3(x - 1)^2$

Ćwiczenie 15

Podaj maksymalny przedział, w którym funkcja g maleje.

1. $g(x) = 3x^2 - 1$

2. $g(x) = -(x + 2)^2 - 1$

3. $g(x) = \frac{3}{4}(x - 1)^2 + 2$

4. $g(x) = -5x^2 + 5$

Ćwiczenie 16

Narysuj wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = -(x + 3)^2$. Na jego podstawie ustal, ile rozwiązań ma podane równanie.

1. $f(x) = 3$

2. $f(x) = 0$

3. $f(x) = -1$

4. $f(x) = -3$

Ćwiczenie 17

Narysuj wykres funkcji g określonej wzorem $g(x) = -2x^2 + 2$. Na jego podstawie ustal, ile rozwiązań ma podane równanie.

1. $g(x) = 3$

2. $g(x) = 2$

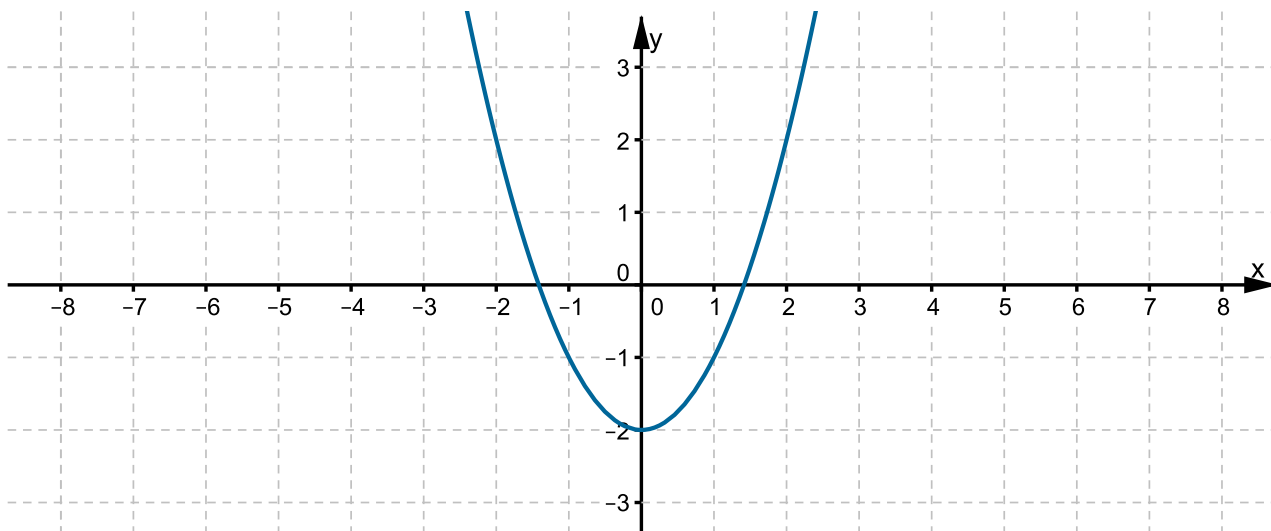
3. $g(x) = 1$

4. $g(x) = 0$

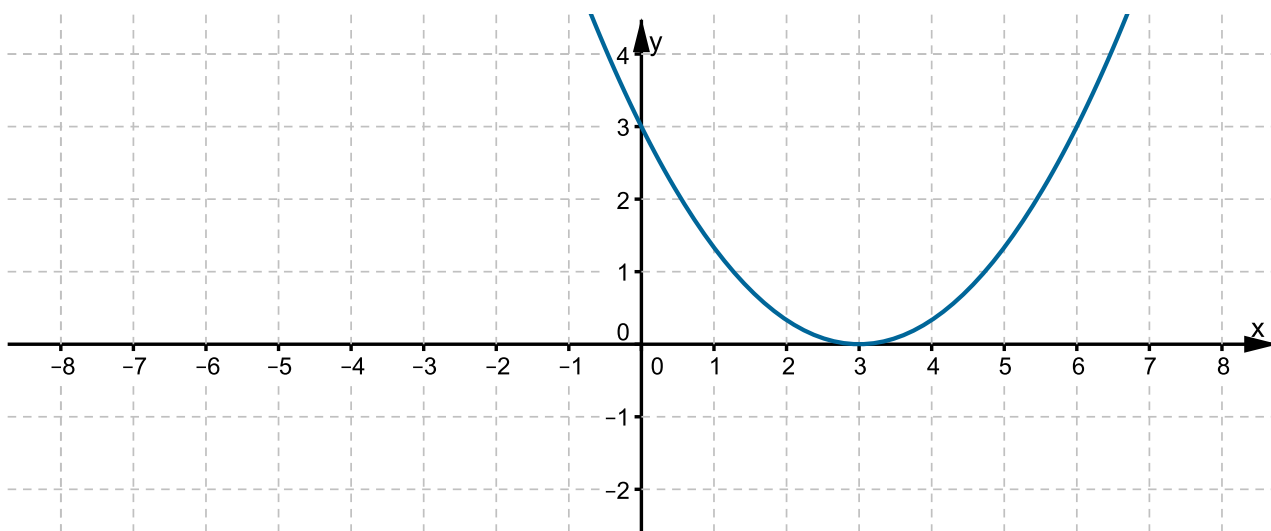
Ćwiczenie 18

Na rysunkach przedstawiono trzy parabole będące wykresami funkcji kwadratowej. Odczytaj współrzędne wierzchołka W każdej z tych parabol i znajdź wzór każdej z funkcji.

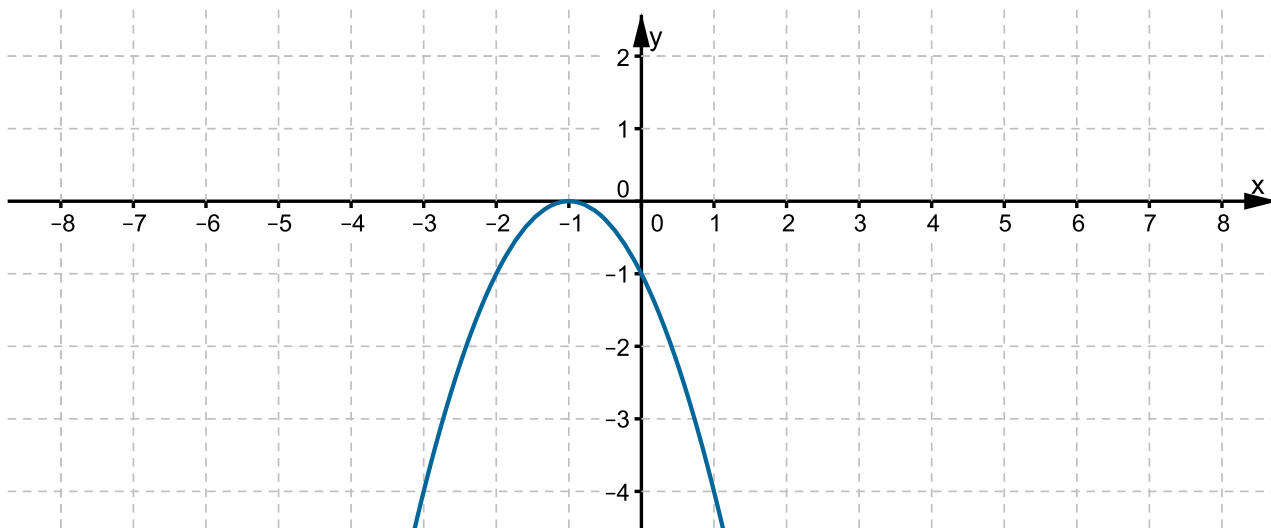
1.



2.



3.



Ćwiczenie 19

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = -2(x - 3)^2$. Uszereguj od najmniejszej do największej liczby: $m = f(103)$, $n = f(-96)$, $k = f(-100)$, $l = f(101)$.

Ćwiczenie 20

Rozpatrzmy funkcję $f(x) = 3x^2$. Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej n różnica $f(n) - f(n - 1)$ jest liczbą nieparzystą.

Wykres funkcji kwadratowej zapisanej wzorem w postaci kanonicznej. Wykres funkcji kwadratowej zapisanej wzorem w postaci ogólnej

Wykres funkcji kwadratowej zapisanej wzorem w postaci kanonicznej

Rozpatrzmy parabolę o równaniu $y = ax^2$, gdzie a jest ustaloną liczbą różną od zera. Po przesunięciu tej paraboli o $|p|$ jednostek wzdłuż osi Ox (w prawo, gdy $p > 0$ lub w lewo, gdy $p < 0$) oraz o q jednostek wzdłuż osi Oy (w górę, gdy $q > 0$ lub w dół, gdy $q < 0$), otrzymujemy parabolę o równaniu

$$y = a(x - p)^2 + q.$$

Aby uprościć zapisy, będziemy mówić, że na przykład „przesuwamy wykres o 3 wzdłuż osi Oy ”, zamiast „przesuwamy wykres o 3 jednostki w dół wzdłuż osi Oy ”.

Przykład 1

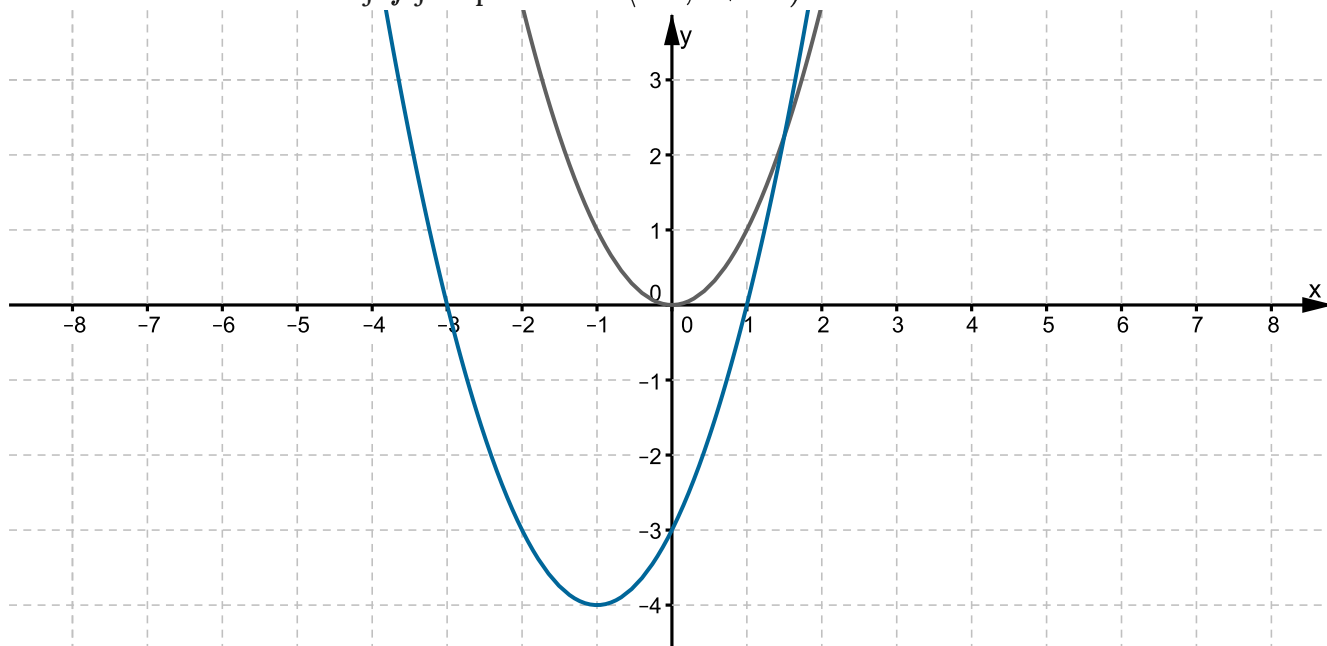
Wykresem funkcji $f(x) = (x + 1)^2 - 4$ jest parabola, której wierzchołkiem jest punkt $(-1, -4)$, a jej ramiona są skierowane w górę.

Wykres funkcji f otrzymujemy, przesuwając parabolę $y = x^2$ o -1 wzdłuż osi Ox oraz o -4 wzdłuż osi Oy .

Ośią symetrii wykresu funkcji f jest prosta o równaniu $x = -1$.

Maksymalny przedział, w którym funkcja f rośnie, to $\langle -1, +\infty \rangle$, a maksymalny przedział, w którym funkcja f maleje, to $(-\infty, -1]$.

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -4, +\infty \rangle$.



Przykład 2

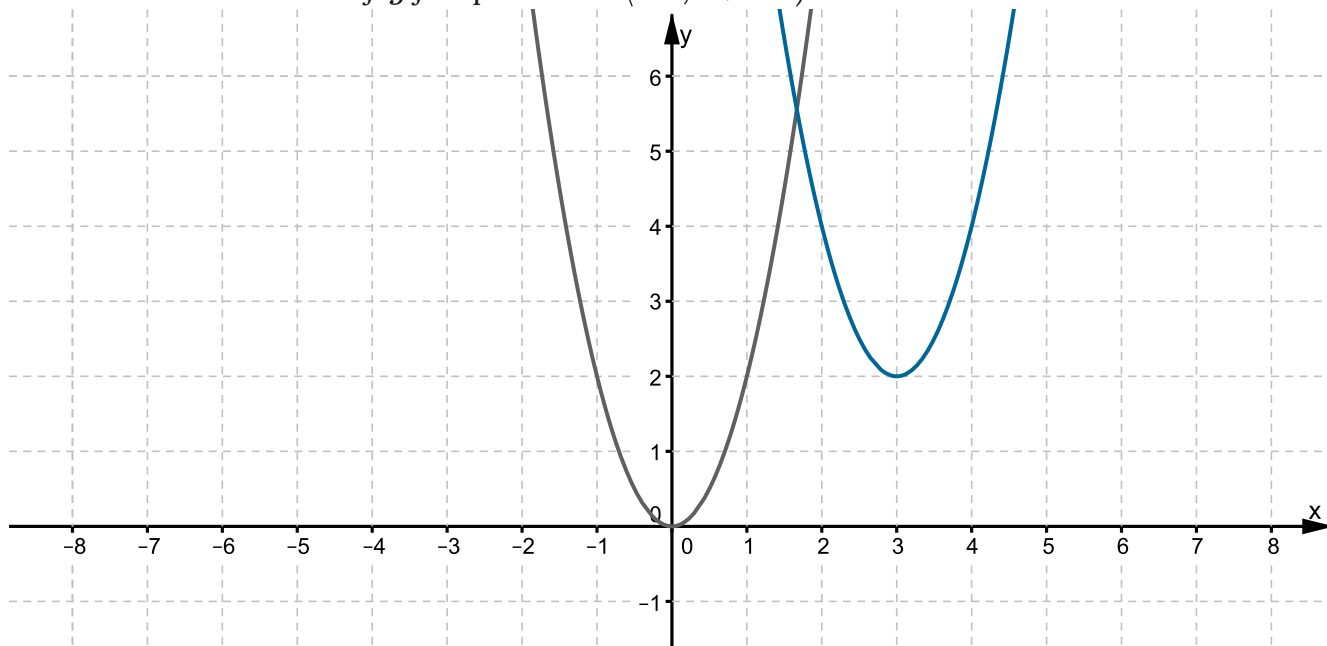
Wykresem funkcji $g(x) = 2(x - 3)^2 + 2$ jest parabola, której wierzchołkiem jest punkt $(3, 2)$, a jej ramiona skierowane są w górę.

Wykres funkcji g otrzymujemy, przesuwając parabolę o równaniu $y = 2x^2$ o 3 wzdłuż osi Ox oraz o 2 wzdłuż osi Oy .

Oś symetrii wykresu funkcji g jest prosta o równaniu $x = 3$.

Maksymalny przedział, w którym funkcja g rośnie, to $\langle 3, +\infty)$, a maksymalny przedział, w którym funkcja g maleje, to $(-\infty, 3\rangle$.

Zbiorem wartości funkcji g jest przedział $\langle -2, +\infty)$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 3

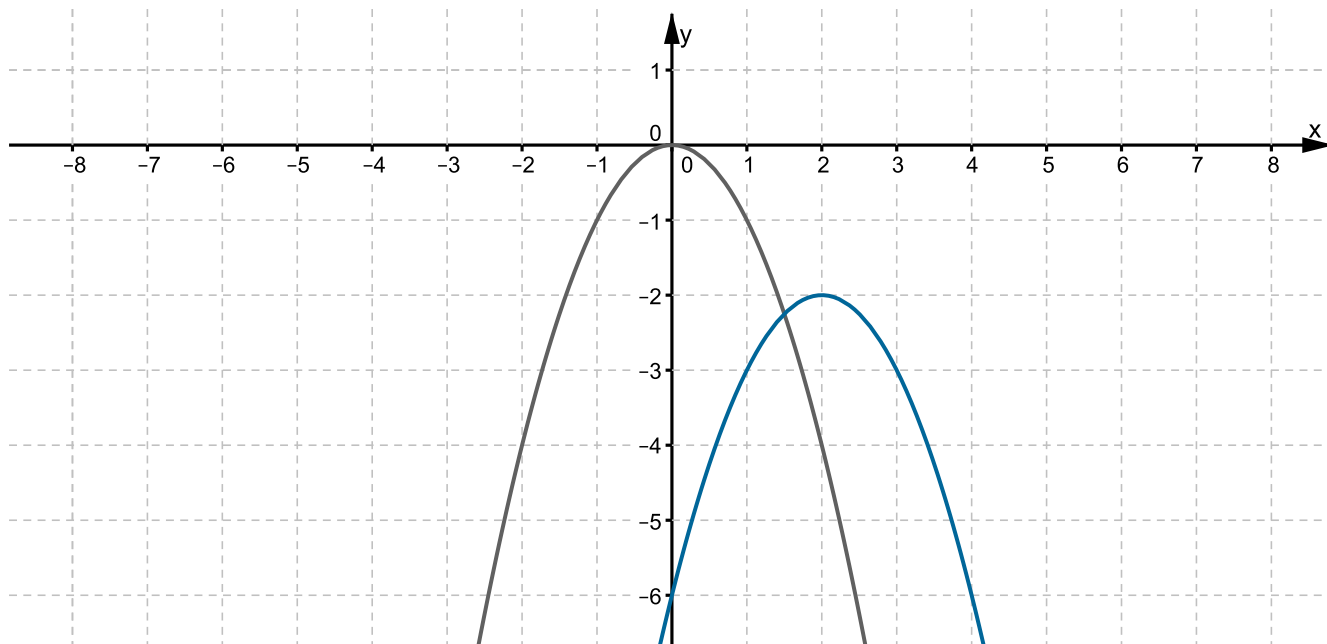
Wykresem funkcji $h(x) = -(x - 2)^2 - 2$ jest parabola, której wierzchołkiem jest punkt $(2, -2)$, a jej ramiona są skierowane w dół.

Wykres funkcji h otrzymujemy, przesuwając parabolę o równaniu $y = -x^2$ o 2 wzdłuż osi Ox oraz o -2 wzdłuż osi Oy .

Oś symetrii wykresu funkcji h jest prosta o równaniu $x = 2$.

Maksymalny przedział, w którym funkcja h rośnie, to $(-\infty, 2\rangle$, a maksymalny przedział, w którym funkcja h maleje, to $\langle 2, +\infty)$.

Zbiorem wartości funkcji h jest przedział $(-\infty, -2]$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 4

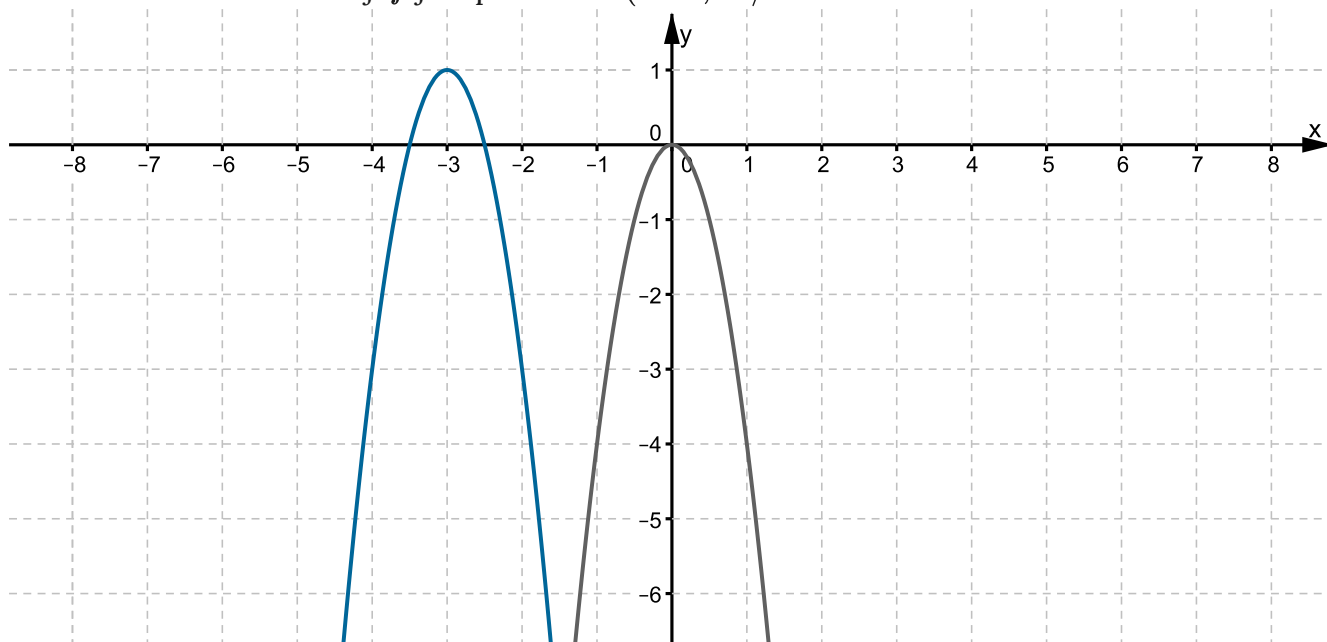
Wykresem funkcji $k(x) = -4(x + 3)^2 + 1$ jest parabola, której wierzchołkiem jest punkt $(-3, 1)$, a jej ramiona są skierowane w dół.

Wykres funkcji k otrzymujemy, przesuwając parabolę o równaniu $y = -4x^2$ o -3 wzdłuż osi Ox oraz o 1 wzdłuż osi Oy .

Ośią symetrii wykresu funkcji k jest prosta o równaniu $x = -3$.

Maksymalny przedział, w którym funkcja k rośnie, to $(-\infty, -3)$, a maksymalny przedział, w którym funkcja k maleje, to $(-3, +\infty)$.

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-\infty, 1)$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

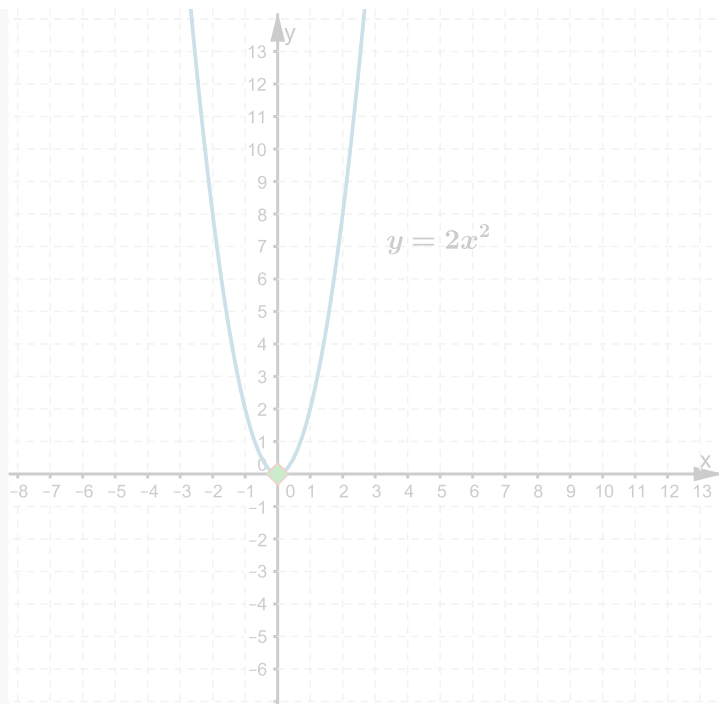
Przykład 5

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej

$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$

Przesuń parabolę tak,
aby jej wierzchołkiem był punkt

$$W = (-6, 6)$$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DPHMxXnyW>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 6

Wykres każdej z omawianych funkcji rysowaliśmy, korzystając z pomysłu przedstawionego na początku tej lekcji. Przepis ten da się zastosować do wykresu każdej funkcji kwadratowej, której wzór umiemy zapisać w postaci $y = a(x - p)^2 + q$, nazywanej postacią kanoniczną funkcji kwadratowej.

Zauważmy, że w przypadku funkcji f i k , po zastosowaniu wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy, otrzymujemy

$$f(x) = (x + 1)^2 - 4 = (x^2 + 2x + 1) - 4 = x^2 + 2x - 3$$

oraz

$$k(x) = -4(x + 3)^2 + 1 = -4(x^2 + 6x + 9) + 1 = -4x^2 - 24x - 35,$$

natomiast w przypadku funkcji g i h , po zastosowaniu wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy, otrzymujemy

$$g(x) = 2(x - 3)^2 + 2 = 2(x^2 - 6x + 9) + 2 = 2x^2 - 12x + 20,$$

a także

$$h(x) = -(x - 2)^2 - 2 = -(x^2 - 4x + 4) - 2 = -x^2 + 4x - 6.$$

Zatem każdą z funkcji f , g , h i k można zapisać w postaci $y = ax^2 + bx + c$.

Wzór $y = ax^2 + bx + c$, gdzie a , b , c są ustalone, przy czym a jest różne od 0, nazywamy postacią ogólną funkcji kwadratowej zmiennej x .

Wykres funkcji kwadratowej zapisanej wzorem w postaci ogólnej

Przykład 7

Na jednym rysunku naszkicujemy wykresy funkcji f i g określonych wzorami

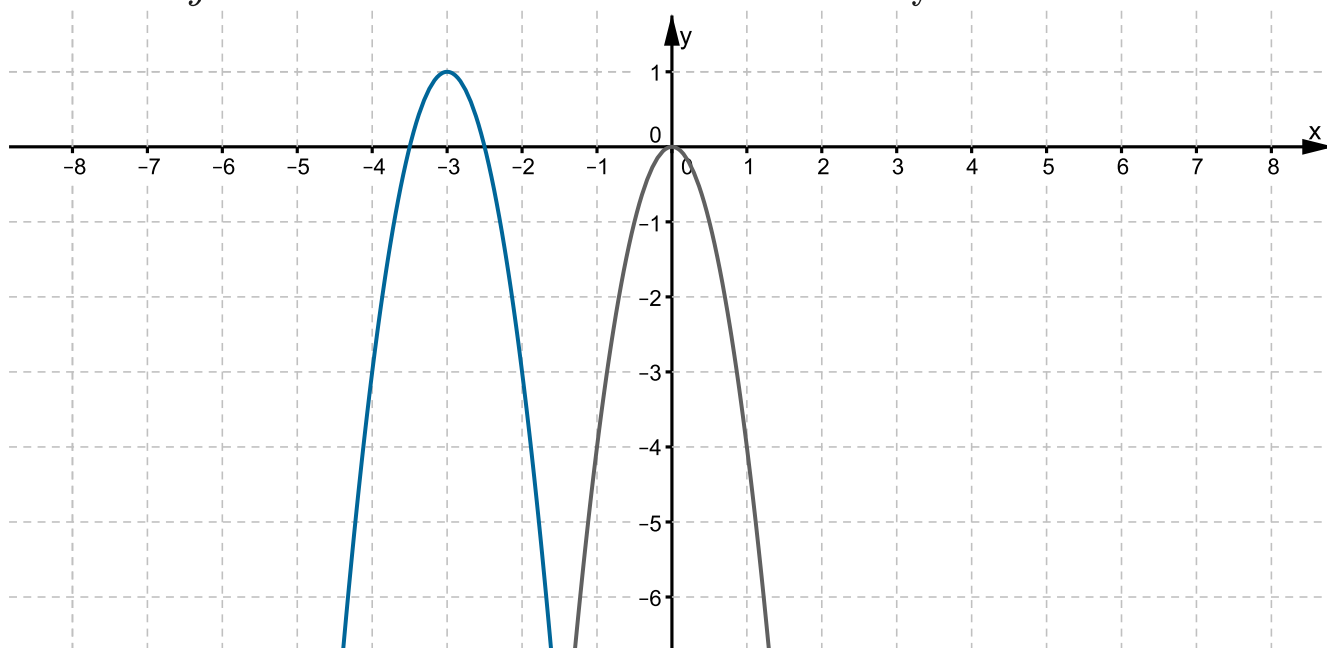
$$f(x) = (x - 2)^2 - 4 \text{ oraz } g(x) = x^2 - 4x.$$

Przekształcimy wzór funkcji f .

$$f(x) = (x - 2)^2 - 4 = x^2 - 4x + 4 - 4 = x^2 - 4x$$

Wobec tego funkcje f i g są tożsamościowo równe, czyli ich wykresem jest ta sama parabola.

Wykresem obu tych funkcji jest parabola, która powstaje w wyniku przesunięcia paraboli o równaniu $y = x^2$ o 2 wzdłuż osi Ox oraz o -4 wzdłuż osi Oy .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

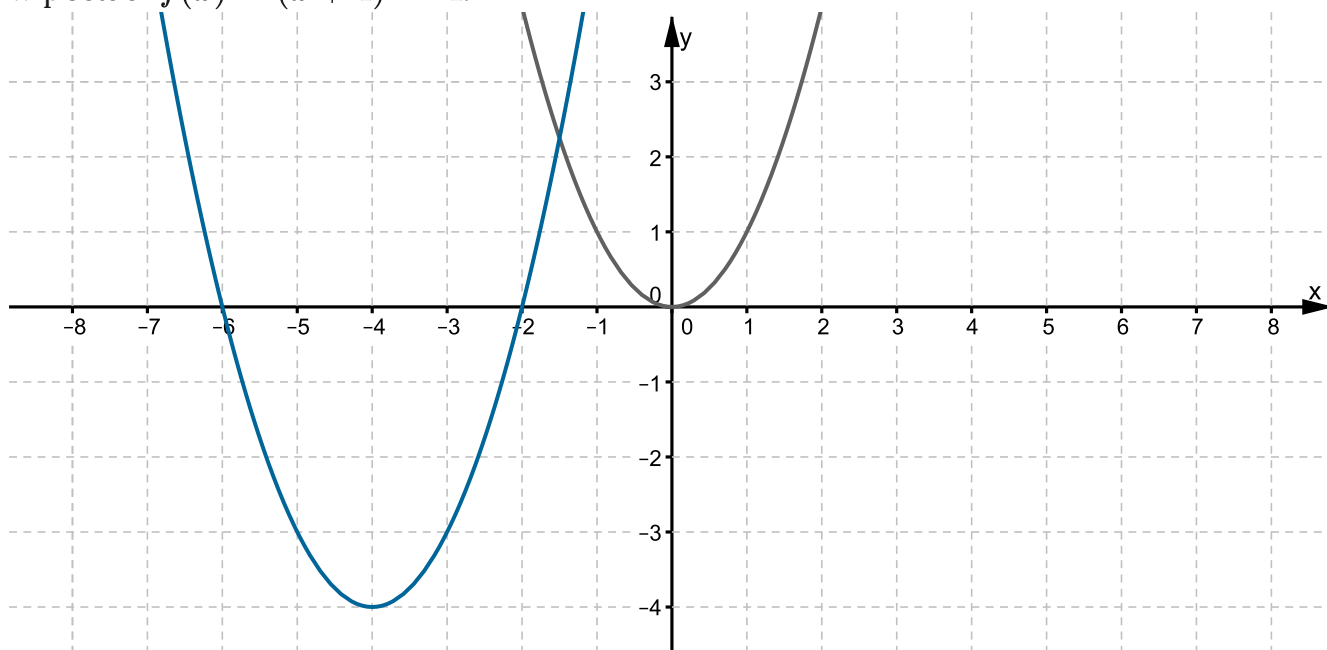
Przykład 8

Wykażemy, że przesuwając równolegle parabolę $y = x^2$, otrzymamy wykres funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = x^2 + 8x + 12.$$

Po przesunięciu paraboli $y = x^2$ o p wzdłuż osi Ox oraz o q wzdłuż osi Oy otrzymujemy parabolę o równaniu $y = (x - p)^2 + q$, które przekształcamy do postaci $y = x^2 - 2px + p^2 + q$. Zauważmy, że dla $p = -4$ równanie tej paraboli to $y = x^2 + 8x + 16 + q$. Przyjmując dodatkowo $q = -4$, dostajemy $y = x^2 + 8x + 12$.

Oznacza to, że przesuwając parabolę o równaniu $y = x^2$ o -4 wzdłuż osi Ox i o -4 wzdłuż osi Oy , otrzymujemy wykres podanej funkcji f . Wzór funkcji f można też zapisać w postaci $f(x) = (x + 4)^2 - 4$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

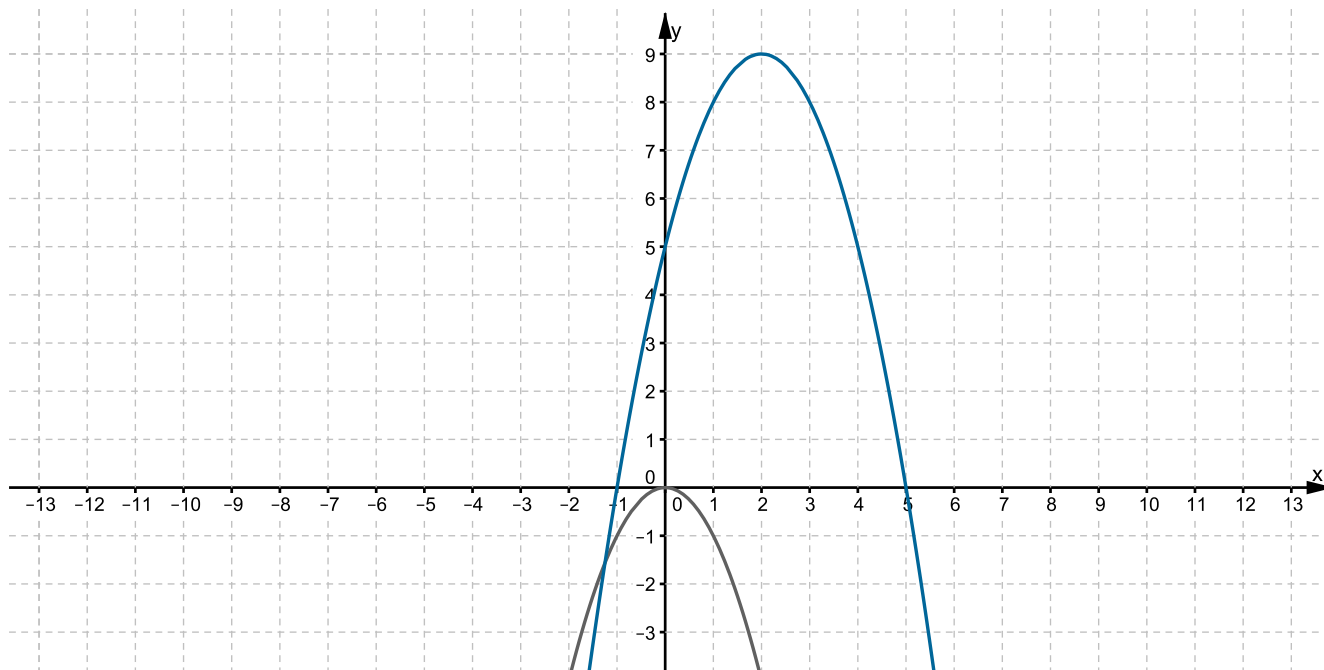
Przykład 9

Narysujemy wykres funkcji $f(x) = -x^2 + 4x + 5$.

Wykorzystamy w tym celu pomysł z poprzedniego przykładu. Spodziewamy się, że wykres funkcji f otrzymujemy, przesuwając parabolę o równaniu $y = -x^2$ o p wzdłuż osi Ox oraz o q wzdłuż osi Oy . W efekcie otrzymujemy parabolę o równaniu $y = -(x - p)^2 + q$, które przekształcamy do postaci $y = -x^2 + 2px - p^2 + q$. Jeżeli przyjmiemy $p = 2$, to $2p = 4$ i parabola ma równanie $y = -x^2 + 4x - 4 + q$. Wystarczy zatem przyjąć $q = 9$ i otrzymujemy równanie $y = -x^2 + 4x + 5$. Mamy więc

$$f(x) = -(x - 2)^2 + 9.$$

Wobec tego wykresem funkcji f określonej wzorem $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ jest parabola, którą otrzymujemy w wyniku przesunięcia paraboli o równaniu $y = -x^2$ o 2 wzdłuż osi Ox i o 9 wzdłuż osi Oy .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 10

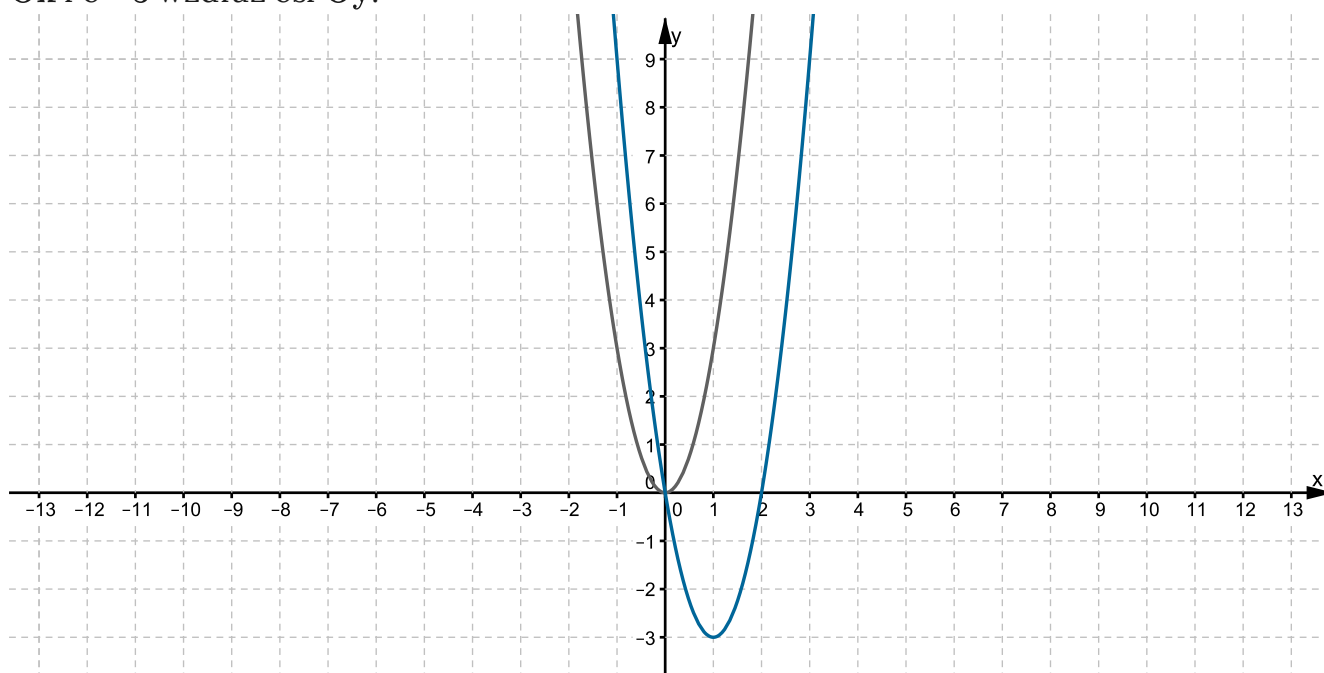
Narysujemy wykres funkcji $f(x) = 3x^2 - 6x$.

Zauważmy, że wzór funkcji f można zapisać jako $f(x) = 3(x^2 - 2x)$. Ponadto dla każdej liczby x prawdziwa jest równość $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$, a więc także równość $x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$.

Wzór funkcji f można przekształcić do postaci

$$f(x) = 3(x^2 - 2x) = 3((x - 1)^2 - 1) = 3(x - 1)^2 - 3.$$

Wynika z tego, że wykresem funkcji f opisanej wzorem $f(x) = 3x^2 - 6x$ jest parabola, którą otrzymujemy w wyniku przesunięcia paraboli o równaniu $y = 3x^2$ o 1 wzdłuż osi Ox i o -3 wzdłuż osi Oy .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 11

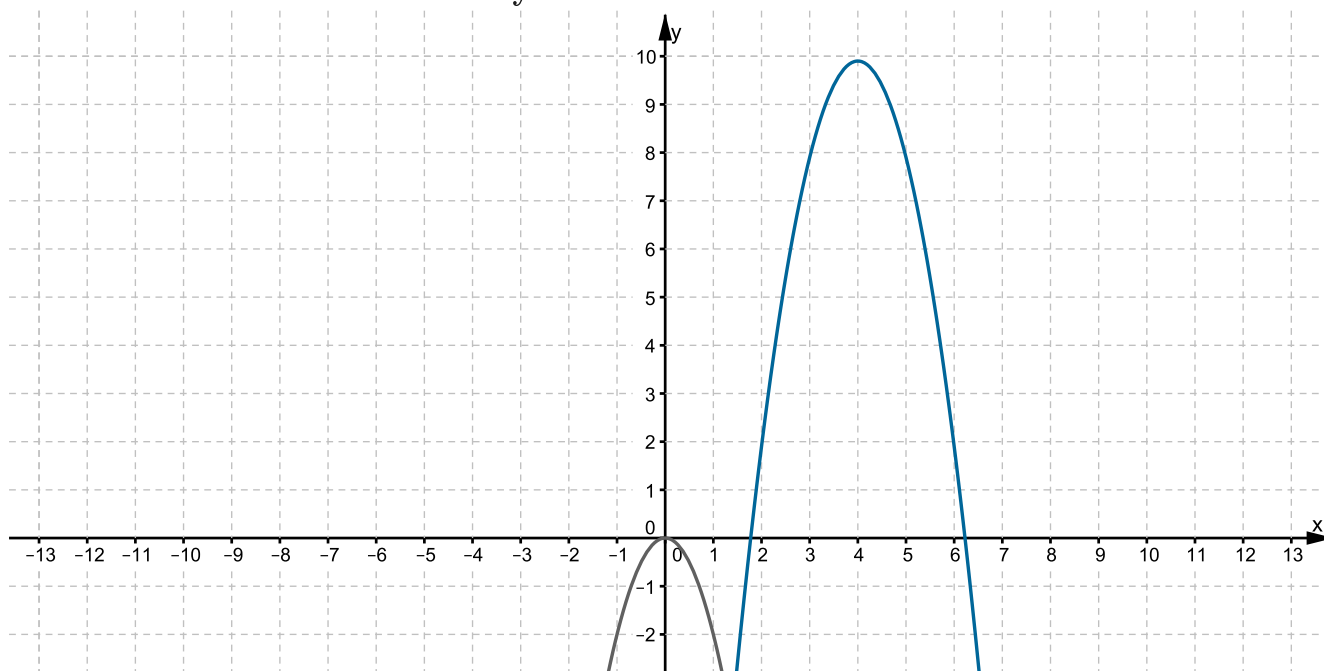
Narysujemy wykres funkcji $f(x) = -2x^2 + 16x - 22$.

Zauważmy, że wzór funkcji f można zapisać jako $f(x) = -2(x^2 - 8x) - 22$. Ponadto dla każdej liczby x prawdziwa jest równość $x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$, a więc także równość $x^2 - 8x = (x - 4)^2 - 16$.

Wzór funkcji f można zatem zapisać w postaci

$$k(x) = -2(x^2 - 8x) - 22 = -2((x - 4)^2 - 16) - 22 = -2(x - 4)^2 + 10.$$

Wynika z tego, że wykresem funkcji f określonej wzorem $f(x) = -2x^2 + 16x - 22$ jest parabola, którą otrzymujemy w wyniku przesunięcia paraboli o równaniu $y = -2x^2$ o 4 wzdłuż osi Ox i o 10 wzdłuż osi Oy .

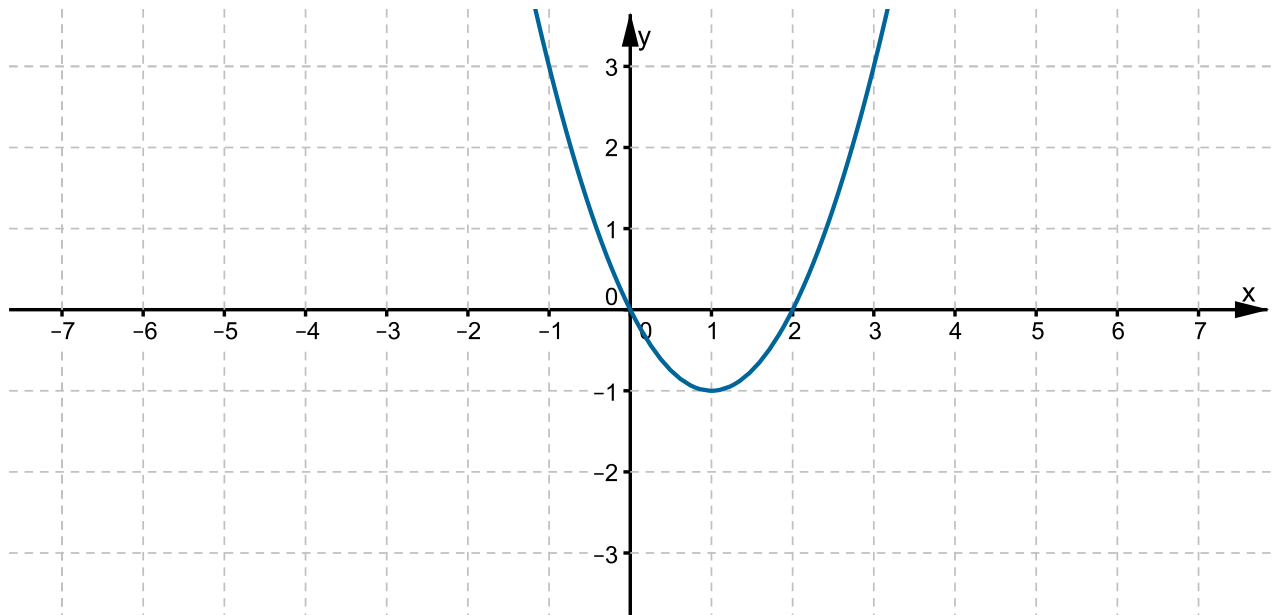


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 12

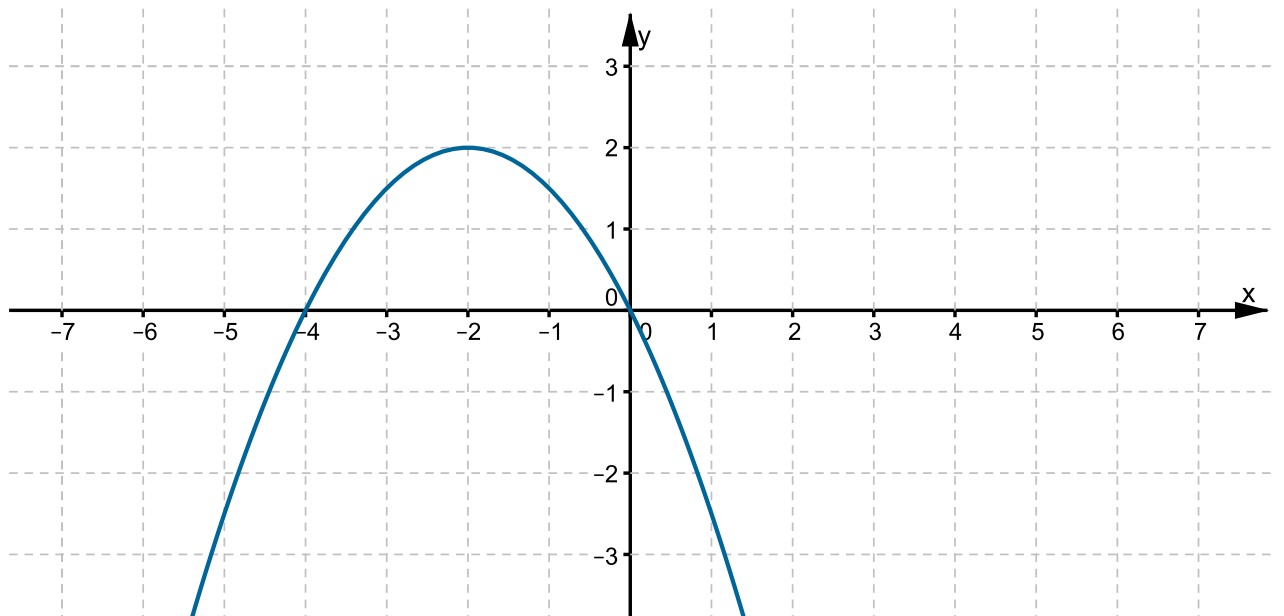
Na rysunkach przedstawiono

1. wykres funkcji kwadratowej f



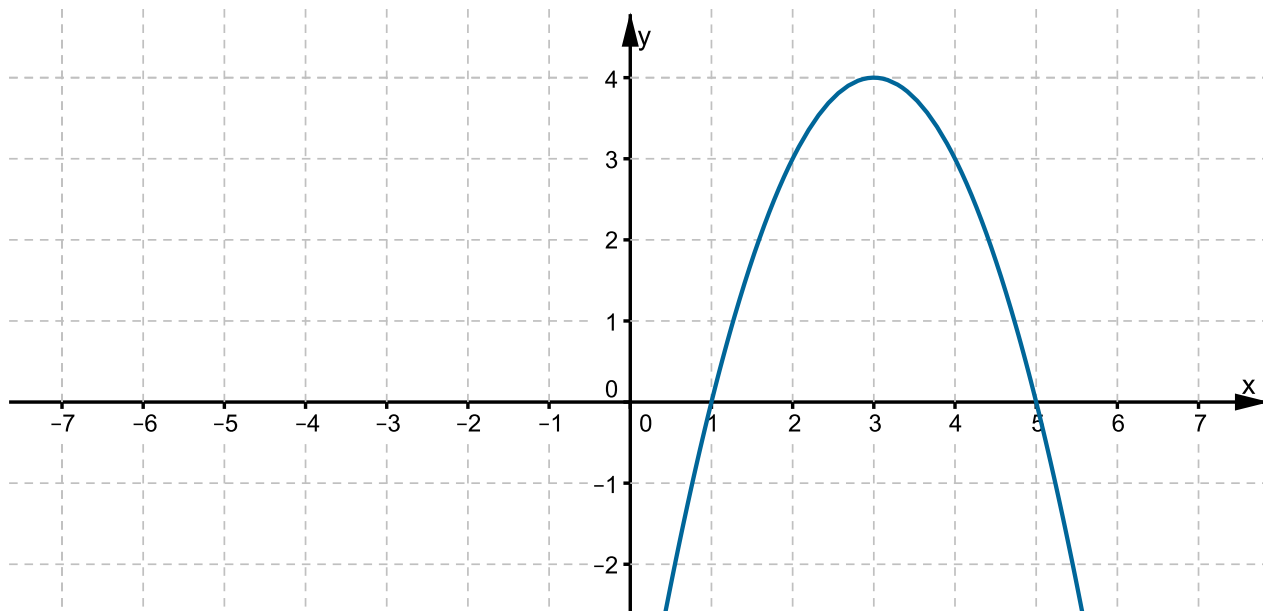
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

2. wykres funkcji kwadratowej g



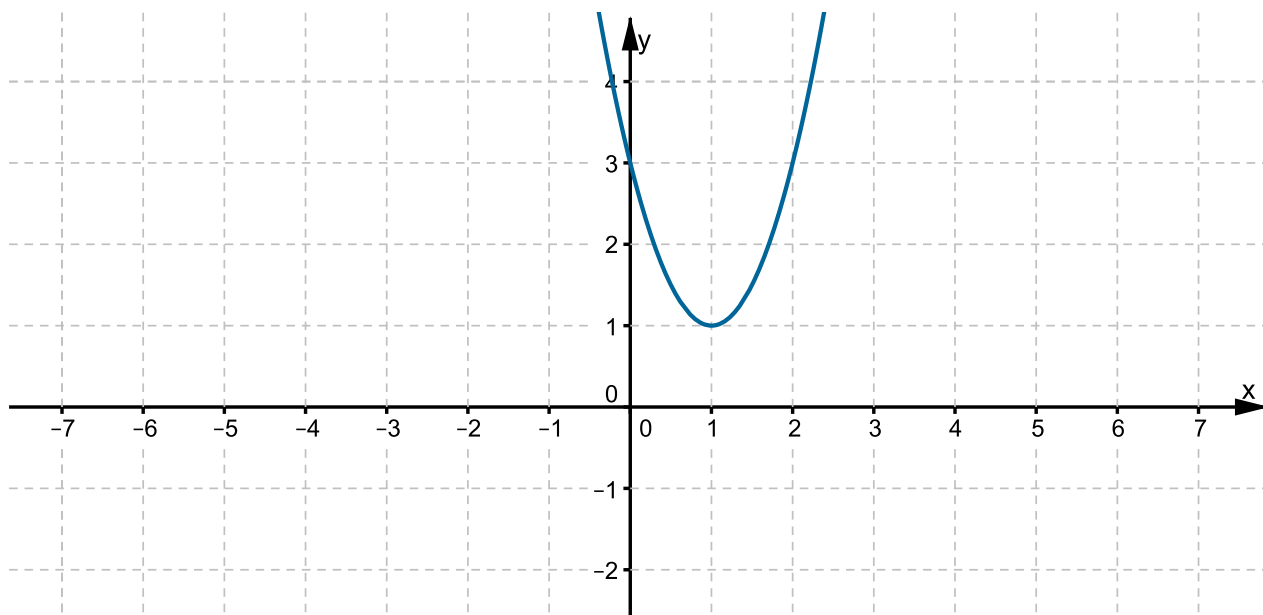
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

3. wykres funkcji kwadratowej h



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

4. wykres funkcji kwadratowej k



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zapiszemy wzór każdej z tych funkcji w postaci kanonicznej oraz w postaci ogólnej.

5. Wierzchołkiem paraboli jest punkt $(1, -1)$, więc ma ona równanie postaci $y = a(x - 1)^2 - 1$. Na tej paraboli leży też punkt $(0, 0)$, zatem $a \cdot (0 - 1)^2 - 1 = 0$, stąd $a = 1$. Wobec tego postać kanoniczna funkcji f to $f(x) = (x - 1)^2 - 1$. Przekształcamy ten wzór do postaci ogólnej: $f(x) = x^2 - 2x + 1 - 1$, stąd $f(x) = x^2 - 2x$.
6. Wierzchołkiem paraboli jest punkt $(-2, 2)$, więc ma ona równanie postaci $y = a(x + 2)^2 + 2$. Na tej paraboli leży też punkt $(0, 0)$, zatem $a \cdot (0 + 2)^2 + 2 = 0$, stąd $a = -\frac{1}{2}$. Wobec tego postać kanoniczna funkcji g to $g(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 2$. Przekształcamy ten wzór do postaci ogólnej: $g(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 4x + 4) + 2$, stąd $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$.

7. Wierzchołkiem paraboli jest punkt $(3, 4)$, więc ma ona równanie postaci $y = a(x - 3)^2 + 4$. Na tej paraboli leży też punkt $(1, 0)$, zatem $a \cdot (1 - 3)^2 + 4 = 0$, stąd $a = -1$. Wobec tego postać kanoniczna funkcji h to $h(x) = -(x - 3)^2 + 4$. Przekształcamy ten wzór do postaci ogólnej: $h(x) = -(x^2 - 6x + 9) + 4$, stąd $h(x) = -x^2 + 6x - 5$.
8. Wierzchołkiem paraboli jest punkt $(1, 1)$, więc ma ona równanie postaci $y = a(x - 1)^2 + 1$. Na tej paraboli leży też punkt $(0, 3)$, zatem $a \cdot (0 - 1)^2 + 1 = 3$, skąd $a = 2$. Wobec tego postać kanoniczna funkcji k to $k(x) = 2(x - 1)^2 + 1$. Przekształcamy ten wzór do postaci ogólnej: $k(x) = 2(x^2 - 2x + 1) + 1$, stąd $k(x) = 2x^2 - 4x + 3$.

Ćwiczenie 1

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = (x-1)^2 + 2$. Wynika z tego, że wykres funkcji f

- ☐ ma dwa punkty wspólne z prostą $y = 5$
- ☐ ma dokładnie jeden punkt wspólny z prostą $y = 1$
- ☐ przecina oś Ox
- ☐ przecina oś Oy

Ćwiczenie 4

Wskaż zdania prawdziwe.

☐ Największa wartość funkcji $k(x) = -(x + 1)^2 + 2$ to 1.

☐ Najmniejsza wartość funkcji $f(x) = 3x^2 + 1$ to 3.

☐ Najmniejsza wartość funkcji $g(x) = (x - 2)^2 - 3$ to -3.

☐ Największa wartość funkcji $h(x) = -2x^2 + 3$ to 3.

Ćwiczenie 5

Znajdź zbiór wartości funkcji.

1. $f(x) = (x + 2)^2 - 1$

2. $g(x) = -(x - 1)^2 + 3$

3. $h(x) = -3x^2 + 4$

4. $k(x) = 4(x - 1)^2 + 2$

Ćwiczenie 6

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8

Narysuj wykres funkcji kwadratowej f . Zaznacz wierzchołek otrzymanej paraboli i narysuj jej oś symetrii.

1. $f(x) = (x - 3)^2 + 1$

2. $f(x) = (x + 4)^2 - 1$

3. $f(x) = \frac{1}{2}(x + 2)^2 + 2$

4. $f(x) = 2(x - 2)^2 - 5$

Ćwiczenie 9

Narysuj wykres funkcji kwadratowej f . Zaznacz wierzchołek otrzymanej paraboli i narysuj jej oś symetrii.

1. $f(x) = -(x + 1)^2 + 4$

2. $f(x) = -(x - 2)^2 - 1$

3. $f(x) = -2(x - 1)^2 + 3$

4. $f(x) = -\frac{2}{3}(x + 3)^2 - 2$

Ćwiczenie 10

Ustal maksymalny przedział, w którym funkcja f rośnie i maksymalny przedział, w którym maleje.

1. $f(x) = 2(x + 1)^2 - 7$

2. $f(x) = -(x - 4)^2 + 9$

3. $f(x) = \frac{3}{4}(x - 5)^2 + \frac{1}{2}$

4. $f(x) = -\frac{2}{5}(x + 6)^2 - 11$

Ćwiczenie 11

Podaną funkcję kwadratową zapisz w postaci kanonicznej i ustal jej zbiór wartości.

1. $f(x) = x^2 - 2x + 7$

2. $g(x) = x^2 + 10x$

3. $h(x) = x^2 - 12x + 20$

4. $t(x) = x^2 + 4x + 9$

Ćwiczenie 12

Podaną funkcję kwadratową zapisz w postaci kanonicznej i ustal jej zbiór wartości.

1. $f(x) = -x^2 + 6x + 1$

2. $g(x) = -x^2 + 2x - 4$

3. $h(x) = -x^2 - 8x + 14$

4. $t(x) = -x^2 - 5x$

Ćwiczenie 13

Podaną funkcję kwadratową zapisz w postaci kanonicznej i podaj równanie osi symetrii jej wykresu.

1. $f(x) = 2x^2 - 6x + 3$

2. $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 12$

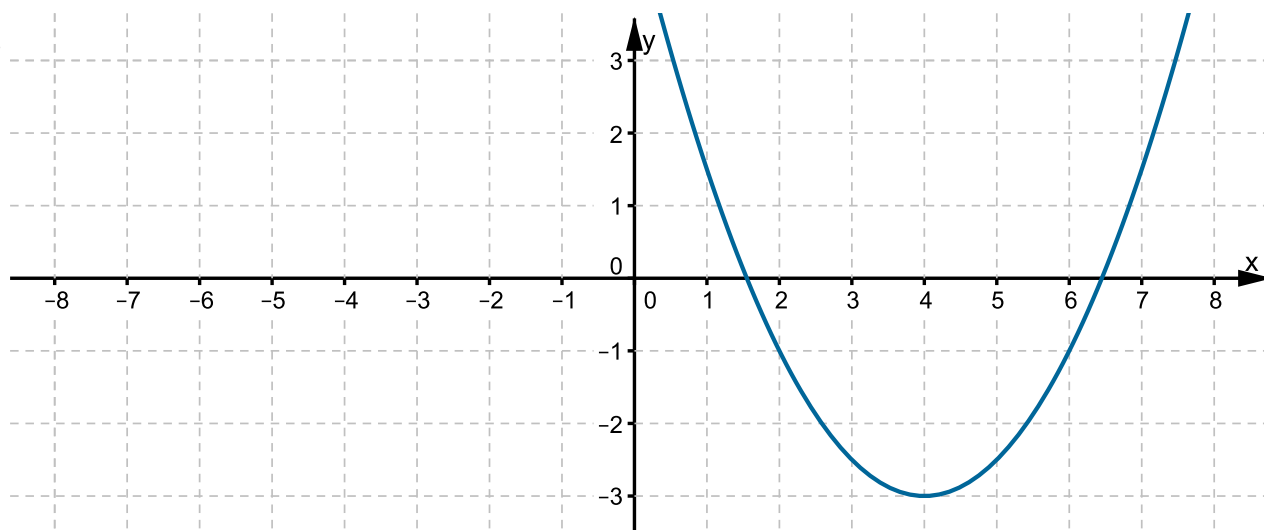
3. $h(x) = -3x^2 - 15x$

4. $t(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{2}x$

Ćwiczenie 14

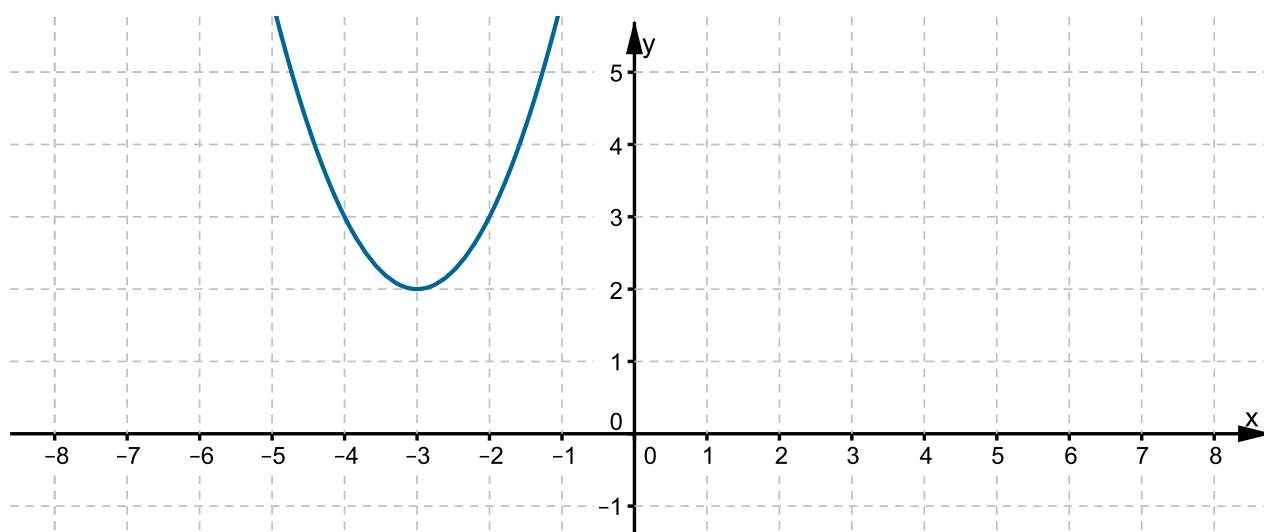
Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji kwadratowej f . Zapisz wzór tej funkcji w postaci kanonicznej oraz w postaci ogólnej.

1.



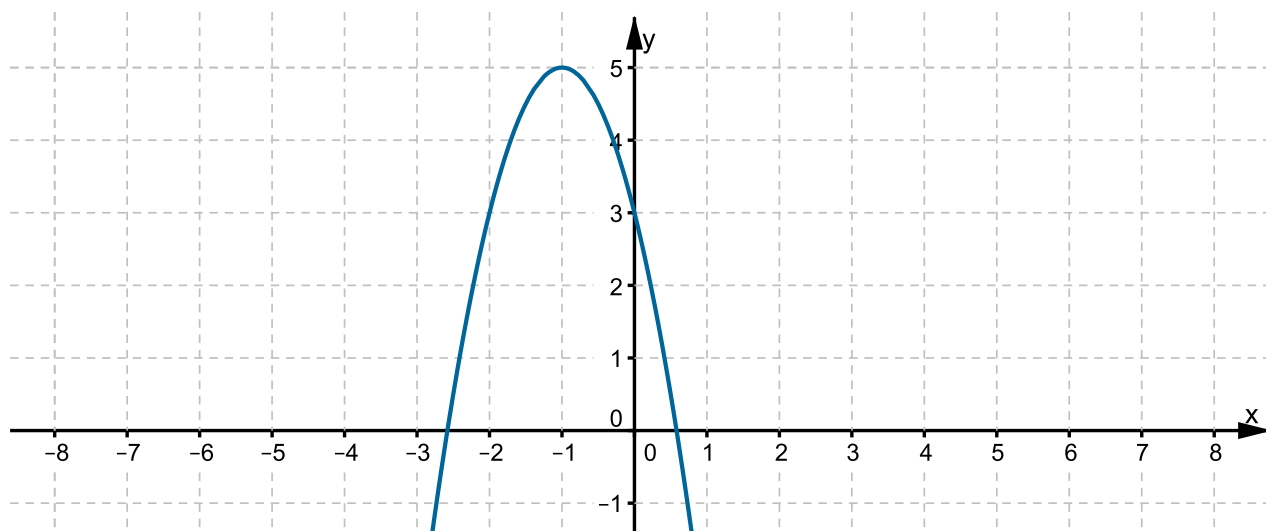
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

2.



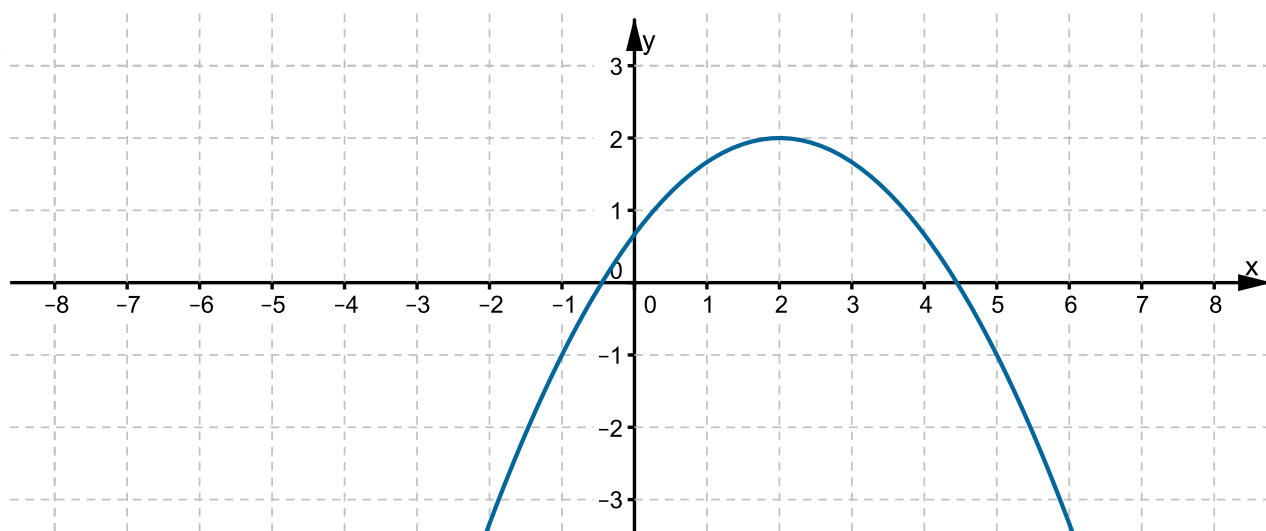
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

3.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

4.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zależności między wartościami współczynników występujących we wzorach funkcji kwadratowej zapisanej w postaci ogólnej i w postaci kanonicznej

Przypomnijmy pojęcia, które wprowadziliśmy w poprzednim rozdziale.

Definicja: Funkcja kwadratowa zmiennej x

Funkcją kwadratową zmiennej x nazywamy funkcję określoną wzorem

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

gdzie a , b oraz c to liczby rzeczywiste, przy czym liczba a jest różna od zera.

Powyższy wzór funkcji kwadratowej nazywamy jej postacią ogólną.

- Wzór funkcji kwadratowej możemy też zapisać w postaci kanonicznej

$$f(x) = a(x - p)^2 + q,$$

gdzie a , p oraz q to liczby rzeczywiste i $a \neq 0$.

Pokażemy, że istnieją ścisłe zależności między wartościami współczynników występujących we wzorach funkcji kwadratowej zapisanych w postaci ogólnej i w postaci kanonicznej.

Twierdzenie: Funkcja kwadratowa w postaci kanonicznej i ogólnej

Każdą funkcję kwadratową można zapisać w postaci ogólnej $f(x) = ax^2 + bx + c$ lub w równoważnej postaci kanonicznej $f(x) = a(x - p)^2 + q$, gdzie $p = \frac{-b}{2a}$ i $q = \frac{-\Delta}{4a}$.

Symbolem Δ (delta) oznaczyliśmy liczbę $\Delta = b^2 - 4ac$, którą nazywamy wyróżnikiem funkcji kwadratowej f .

Dowód

Zauważmy, że po rozwinięciu wyrażenia $(x - p)^2$, postać kanoniczną funkcji f możemy zapisać jako

$$f(x) = a(x^2 - 2px + p^2) + q,$$

stąd

$$f(x) = ax^2 - 2apx + ap^2 + q.$$

Aby dla każdego x zachodziła równość

$$ax^2 - 2apx + ap^2 + q = ax^2 + bx + c$$

potrzeba i wystarczy, żeby równe były współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej x . Zatem

$-2ap = b$ oraz $ap^2 + q = c$, stąd $p = \frac{-b}{2a}$ i $q = c - a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 = c - \frac{ab^2}{4a^2} = c - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$. Przyjmując oznaczenie $\Delta = b^2 - 4ac$, otrzymujemy $q = \frac{-\Delta}{4a}$.

Należy zauważyć, że do przekształcenia wzoru funkcji kwadratowej z postaci ogólnej do kanonicznej można też zastosować wzór skróconego mnożenia (tę metodę stosowaliśmy w kilku poprzednich przykładach). Przekształcamy wtedy według poniższego schematu

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}. \end{aligned}$$

Przykład 1

Zapiszemy w postaci kanonicznej funkcję

1. $f(x) = x^2 - 14x + 25$

Odczytujemy: $a = 1$, $b = -14$, $c = 25$, stąd $p = \frac{-(-14)}{2 \cdot 1} = 7$. Obliczamy wyróżnik $\Delta = (-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 96$. A więc $q = \frac{-96}{4 \cdot 1} = -24$. Zatem postacią kanoniczną tej funkcji jest $f(x) = (x - 7)^2 - 24$.

Zauważmy, że ten wynik można otrzymać, przekształcając wzór funkcji f jak poniżej

$$f(x) = x^2 - 14x + 25 = (x^2 - 14x + 49) - 49 + 25 = (x - 7)^2 - 24.$$

2. $g(x) = 2x^2 + 8x + 11$

Odczytujemy: $a = 2$, $b = 8$, $c = 11$, stąd $p = \frac{-8}{2 \cdot 2} = -2$. Obliczamy wyróżnik $\Delta = 8^2 - 4 \cdot 2 \cdot 11 = -24$. Zatem $q = \frac{-(-24)}{4 \cdot 2} = 3$. Postacią kanoniczną tej funkcji jest $g(x) = 2(x + 2)^2 + 3$.

Wynik ten można otrzymać, przekształcając wzór jak poniżej

$$g(x) = 2x^2 + 8x + 11 = 2(x^2 + 4x + 4) - 8 + 11 = 2(x + 2)^2 + 3.$$

3. $h(x) = -x^2 + 6x + 7$

Odczytujemy: $a = -1$, $b = 6$, $c = 7$, stąd $p = \frac{-6}{2 \cdot (-1)} = 3$. Obliczamy wyróżnik $\Delta = 6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 7 = 64$. Zatem $q = \frac{-64}{4 \cdot (-1)} = 16$. Postacią kanoniczną tej funkcji jest więc $h(x) = -(x - 3)^2 + 16$.

Wzór ten można otrzymać w wyniku następujących przekształceń:

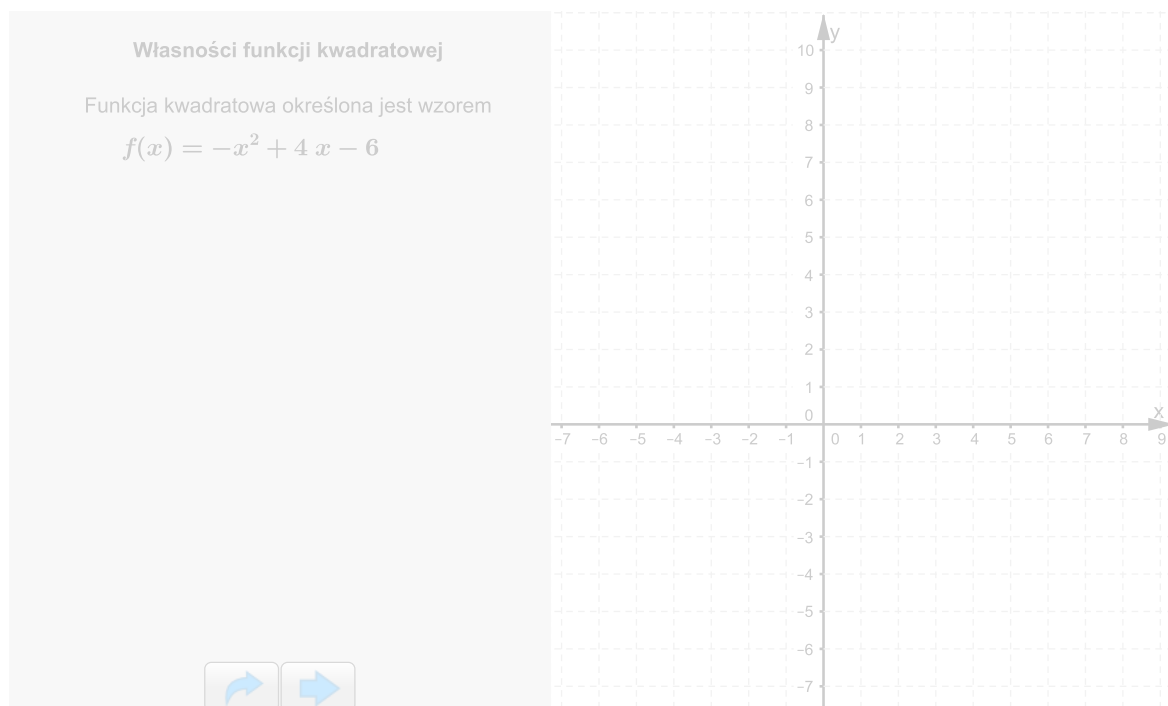
$$g(x) = -x^2 + 6x + 7 = -(x^2 - 6x + 9) + 9 + 7 = -(x - 3)^2 + 16.$$

4. $k(x) = -3x^2 + 5x - 4$

Odczytujemy: $a = -3$, $b = 5$, $c = -4$, stąd $p = \frac{-5}{2 \cdot (-3)} = \frac{5}{6}$. Obliczamy wyróżnik $\Delta = 5^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-4) = -23$. Zatem $q = \frac{-(-23)}{4 \cdot (-3)} = -\frac{23}{12}$. Postacią kanoniczną tej funkcji jest

$$k(x) = -3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{23}{12}.$$

Przykład 2



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DXrW6ve7S>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Współrzędne wierzchołka paraboli

Współrzędne wierzchołka paraboli

Ważne!

Wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ ma współrzędne (p, q) , gdzie $p = -\frac{b}{2a}$ oraz $q = -\frac{\Delta}{4a}$.

Zauważmy też, że współrzędne wierzchołka paraboli spełniają warunek $q = f(p)$.

Przykład 1

Wyznamy współrzędne wierzchołka W paraboli o równaniu

1. $y = x^2 - 2x + 10$

Odczytujemy $a = 1, b = -2, c = 10$, stąd $p = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1$, a więc $q = f(1) = 1 - 2 + 10 = 9$. Zatem $W = (1, 9)$.

2. $y = -x^2 - 4x + 1$

Odczytujemy $a = -1, b = -4, c = 1$, stąd $p = \frac{-(-4)}{2 \cdot (-1)} = -2$. Wtedy $q = f(-2) = -4 + 8 + 1 = 5$, czyli $W = (-2, 5)$.

3. $y = 2x^2 + 12x + 17$

Odczytujemy $a = 2, b = 12, c = 17$, stąd $p = \frac{-12}{2 \cdot 2} = -3$, więc $q = f(-3) = 18 - 36 + 17 = -1$, czyli $W = (-3, -1)$.

4. $f(x) = -3x^2 + 8x - 9$

Odczytujemy $a = -3, b = 8, c = -9$, stąd $p = \frac{-8}{2 \cdot (-3)} = \frac{4}{3}$. Ponadto

$$\Delta = 8^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-9) = -44, \text{ stąd } q = \frac{-(-44)}{4 \cdot (-3)} = -\frac{44}{12} = -\frac{11}{3}, \text{ czyli}$$

$$W = \left(\frac{4}{3}, -\frac{11}{3}\right).$$

Przykład 2

Wyznamy zbiór wartości funkcji

1. $f(x) = x^2 - 4x - 7$

Odczytujemy współczynnik $a = 1$. Ponieważ jest on dodatni, więc wykresem funkcji f jest parabola skierowana ramionami do góry. Wobec tego zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $\langle q, +\infty)$, gdzie q to druga współrzędna wierzchołka paraboli. W tym przypadku $q = -\frac{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}{4 \cdot 1} = -\frac{44}{4} = -11$, zatem zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -11, +\infty)$.

2. $f(x) = -x^2 + 6x - 2$

Odczytujemy, że współczynnik a jest ujemny ($a = -1$), więc wykresem funkcji f jest parabola skierowana ramionami do dołu. Wobec tego zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $(-\infty, q]$, gdzie q to druga współrzędna wierzchołka paraboli. W tym

przypadku $q = -\frac{6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2)}{4 \cdot (-1)} = -\frac{28}{-4} = 7$, zatem zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-\infty, 7)$.

3. $f(x) = 5x^2 + 15x + 1$

Ponieważ $a = 5 > 0$ oraz $q = -\frac{15^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1}{4 \cdot 5} = -\frac{41}{4}$, to zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -\frac{41}{4}, +\infty \rangle$.

4. $f(x) = -3x^2 + 21x - 16$

Ponieważ $a = -3 < 0$ oraz $q = -\frac{21^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-16)}{4 \cdot (-3)} = \frac{83}{4}$, to zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-\infty, \frac{83}{4})$.

Przykład 3

Wyznamy maksymalny przedział, w którym funkcja f jest rosnąca oraz maksymalny przedział, w którym ta funkcja jest malejąca.

1. $f(x) = x^2 - 4x - 7$

Współczynnik a jest dodatni ($a = 1$), więc wykresem funkcji f jest parabola skierowana ramionami do góry. Ponadto $p = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2$. Zatem maksymalny przedział, w którym funkcja f jest rosnąca, to $\langle 2, +\infty \rangle$, a maksymalny przedział, w którym ta funkcja jest malejąca, to $(-\infty, 2)$.

2. $f(x) = -x^2 + 6x - 2$

Współczynnik a jest ujemny ($a = -1$), więc wykresem funkcji f jest parabola skierowana ramionami do góry. Ponadto $p = \frac{-6}{2 \cdot (-1)} = 3$. Zatem maksymalny przedział, w którym funkcja f jest rosnąca, to $(-\infty, 3)$, a maksymalny przedział, w którym ta funkcja jest malejąca, to $\langle 3, +\infty \rangle$.

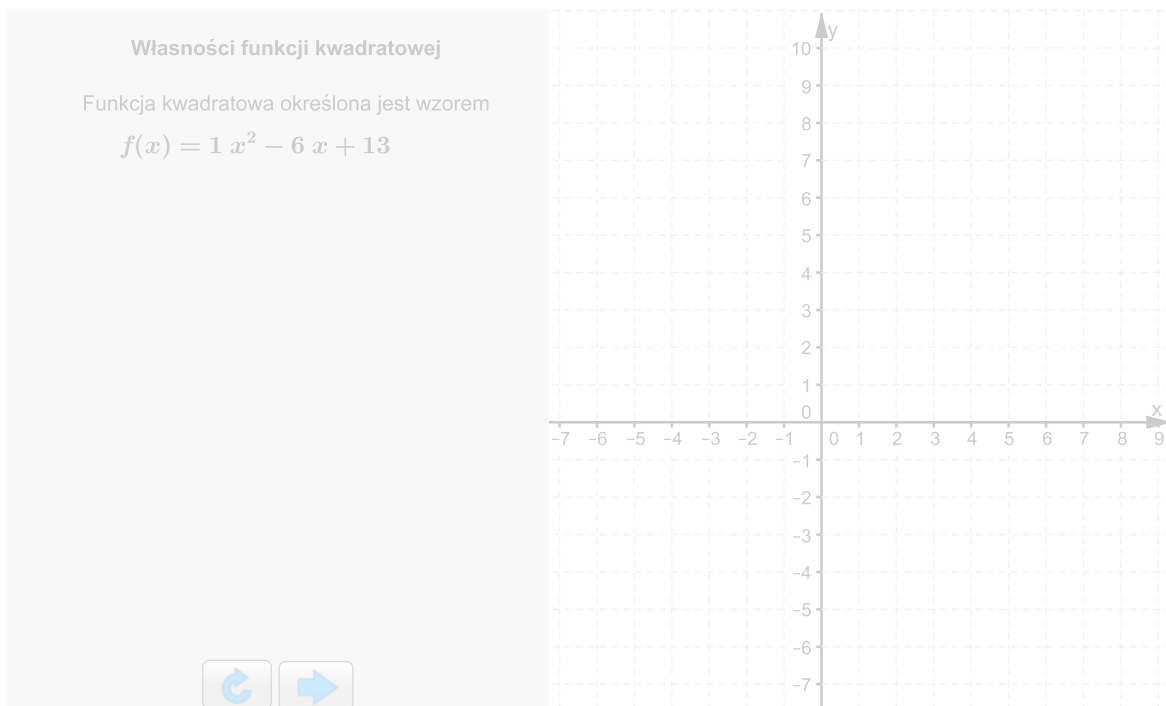
3. $f(x) = 3x^2 + 5x - 8$

Ponieważ $a = 3 > 0$ oraz $p = \frac{-5}{2 \cdot 3} = -\frac{5}{6}$, więc maksymalnym przedziałem, w którym funkcja f rośnie, jest $\langle -\frac{5}{6}, +\infty \rangle$, a maksymalnym przedziałem, w którym ta funkcja maleje, jest $(-\infty, -\frac{5}{6})$.

4. $f(x) = -4x^2 - 7x + 19$

Ponieważ $a = -4 < 0$ oraz $p = \frac{-(-7)}{2 \cdot (-4)} = -\frac{7}{8}$, więc maksymalnym przedziałem, w którym funkcja f rośnie, jest $(-\infty, -\frac{7}{8})$, a maksymalnym przedziałem, w którym ta funkcja maleje, jest $\langle -\frac{7}{8}, +\infty \rangle$.

Przykład 4

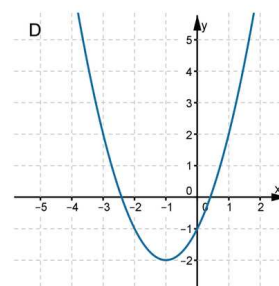
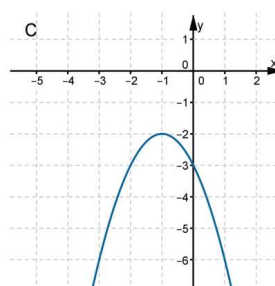
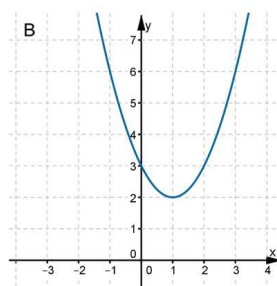
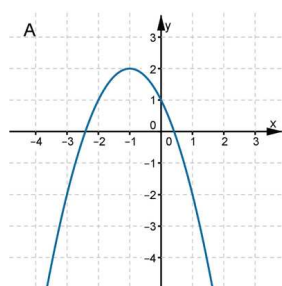


Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DZajTVh6M>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Ćwiczenie 1

Na każdym z poniższych rysunków przedstawiony jest fragment wykresu funkcji kwadratowej. Przy czym na jednym z nich jest wykres funkcji f , na innym – wykres funkcji g , a na jeszcze innym jest wykres funkcji h . Wiadomo, że zbiorem wartości funkcji f jest $\langle -2, +\infty \rangle$, wierzchołkiem wykresu funkcji g jest punkt $(-1, 2)$, a osią symetrii wykresu funkcji h jest prosta o równaniu $x = 1$. Na którym rysunku jest wykres funkcji f , na którym – wykres g , a na którym – wykres funkcji h ?



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2

Dana jest parabola o równaniu $y = x^2 + 8x - 10$. Wówczas

- ☐ wierzchołek tej paraboli leży na prostej o równaniu $x = -4$
- ☐ ta parabola nie ma punktów wspólnych z prostą o równaniu $y = -25$
- ☐ oś symetrii tej paraboli jest prosta o równaniu $x = 8$
- ☐ wierzchołek tej paraboli leży na prostej o równaniu $y = -10$

Ćwiczenie 3

Prosta o równaniu $y = -3$ ma dokładnie jeden punkt wspólny

- ☐ z wykresem funkcji $f_3(x) = -x^2 - 2x - 4$
- ☐ z wykresem funkcji $f_1(x) = x^2 + 2x - 2$
- ☐ z wykresem funkcji $f_4(x) = -x^2 + 2x - 3$
- ☐ z wykresem funkcji $f_2(x) = x^2 - 2x - 2$

Ćwiczenie 4

Oś symetrii paraboli $y = -x^2 + bx + 2$ jest prosta o równaniu $x = p$.

- ☐ Jeżeli $b = p$, to wierzchołkiem tej paraboli jest punkt $W = (0, 2)$.
- ☐ Dla $p = -2$ współczynnik b jest równy -1 .
- ☐ Jeżeli $b = 2$, to $p = 4$.
- ☐ Dla $p = 3$ współczynnik b jest równy 6 .

Ćwiczenie 5

Funkcja kwadratowa f określona jest wzorem $f(x) = x^2 + bx + c$. Oblicz wartości współczynników b i c , wiedząc, że wykresem funkcji f jest parabola, której wierzchołkiem jest punkt o współrzędnych

1. $(0, 2)$
2. $(2, 0)$
3. $(1, 1)$
4. $(-1, 2)$

Ćwiczenie 6

Połącz w pary wzór paraboli z jej wierzchołkiem.

$$y = (x + 6)^2 - 3$$

$$(1, 4)$$

$$y = -(x + 1)^2 + 4$$

$$(5, -3)$$

$$y = (x - 1)^2 + 4$$

$$(-6, -3)$$

$$y = -(x - 5)^2 - 3$$

$$(-1, 4)$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7

Połącz w pary wzór paraboli z jej wierzchołkiem.

$$y = x^2 - 2x + 6$$

$$(-2, 3)$$

$$y = x^2 + 4x$$

$$(1, 5)$$

$$y = x^2 + 4x + 7$$

$$(-2, -4)$$

$$y = -x^2 + 4x - 2$$

$$(2, 2)$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8

Wykresem funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = ax^2 + bx$ jest parabola o wierzchołku W . Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐ Jeżeli $a = -1$ i $b = 6$, to $W = (3, 9)$.

☐ Jeżeli $W = (1, 1)$, to $a = -1$ i $b = 2$.

☐ Jeżeli $W = (-3, -27)$, to $a = 3$ i $b = 18$.

☐ Jeżeli $a = 1$ i $b = 4$, to $W = (2, -2)$.

Ćwiczenie 9

Do wykresu funkcji kwadratowej f należą punkty:

$A = (-15, 35)$, $B = (-5, -20)$, $C = (5, 35)$. Wynika z tego, że

☐ $f(-6) < -30$

☐ $f(-10) = f(0)$

☐ $f(-7) + f(-9) > f(-4) + f(-2)$

☐ $f(-20) > 30$

Ćwiczenie 10

Wierzchołek paraboli $y = x^2 - 2x + 2$ leży na prostej o równaniu

☐ $x = 1$

☐ $x = -1$

☐ $x = -2$

☐ $x = 2$

Ćwiczenie 11

Wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = -x^2 + 6x$ ma dokładnie jeden punkt wspólny z prostą o równaniu

☐ $y = 6$

☐ $y = 3$

☐ $y = 0$

☐ $y = 9$

Ćwiczenie 12

Wskaż równanie paraboli, której wierzchołkiem jest punkt $W = (5, 5)$.

☐ $y = x^2 + 10x + 55$

☐ $y = x^2 + 10x + 5$

☐ $y = x^2 - 10x + 15$

☐ $y = x^2 - 10x + 30$

Ćwiczenie 13

Zbiorem wartości funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + 2x + 5$ jest

☐ $\langle 4, +\infty \rangle$

☐ $\langle 5, +\infty \rangle$

☐ $\langle 2, +\infty \rangle$

☐ $\langle -1, +\infty \rangle$

Ćwiczenie 14

Największa wartość funkcji kwadratowej $f(x) = -x^2 - 8x + 2$

☐ jest większa od 30

☐ nie istnieje

☐ jest równa 2

☐ jest równa 18

Ćwiczenie 15

Funkcja kwadratowa, której zbiorem wartości jest przedział $\langle -2, +\infty \rangle$, może być określona wzorem

☐ $y = -(x - 2)^2 + 2$

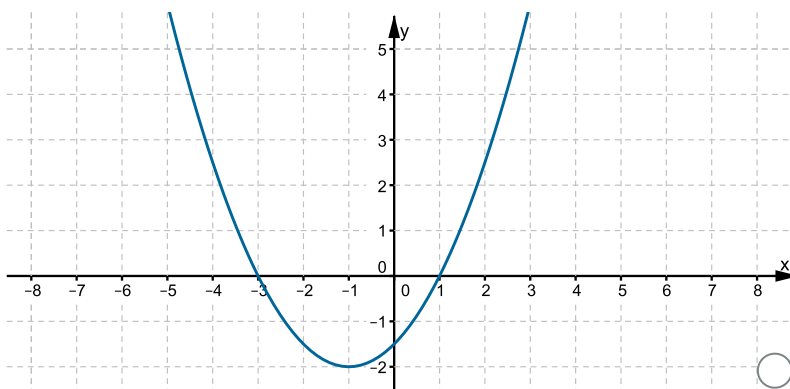
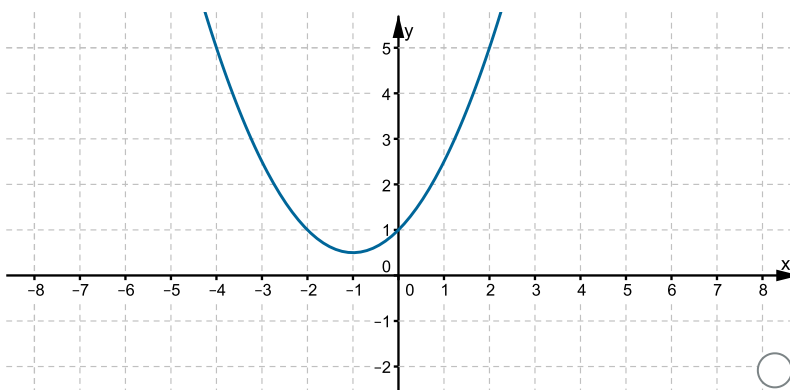
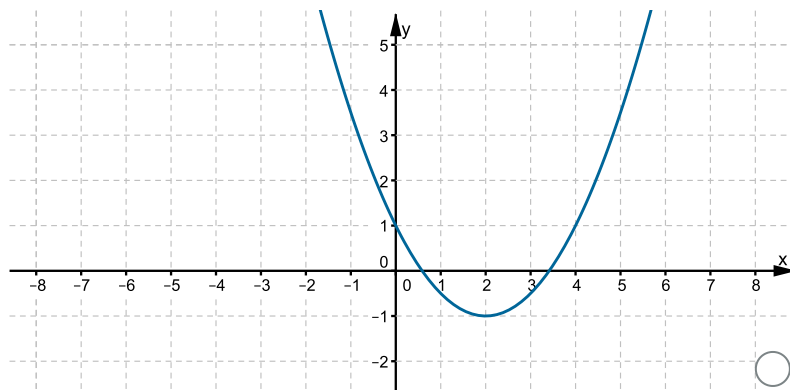
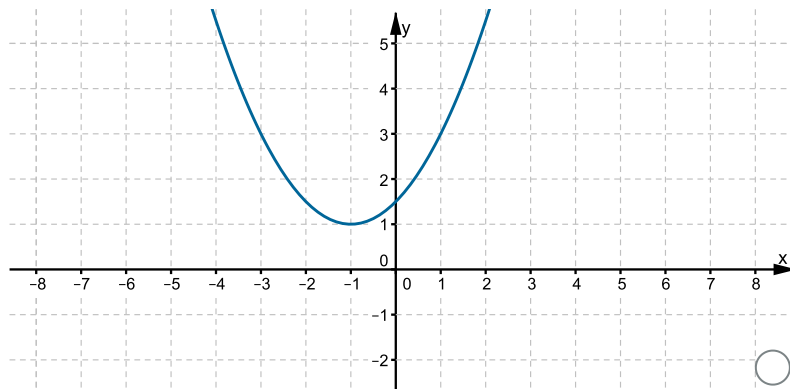
☐ $y = (x - 2)^2 + 2$

☐ $y = (x + 2)^2 - 2$

☐ $y = -(x + 2)^2 - 2$

Ćwiczenie 16

Wskaż rysunek, na którym jest przedstawiony fragment wykresu funkcji kwadratowej określonej wzorem $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.



Ćwiczenie 17

Prosta $x = 3$ jest osią symetrii wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x) = 2x^2 + bx$. Wtedy prawdziwa jest równość

☐ $f(0) = f(1)$

☐ $f(0) = f(4)$

☐ $f(0) = f(6)$

☐ $f(0) = f(-3)$

Ćwiczenie 18

Wierzchołkiem paraboli o równaniu $y = x^2 + bx + c$ jest punkt $W = (-2, 3)$. Wtedy

☐ $b = -4, c = 3$

☐ $b = 2, c = 7$

☐ $b = 4, c = 7$

☐ $b = -2, c = 3$

Ćwiczenie 19

Funkcja kwadratowa jest określona wzorem $f(x) = x^2 - 2mx + 4$. Można wskazać taką wartość m , aby zbiorem wartości tej funkcji był przedział

☐ $\langle 5, +\infty \rangle$

☐ $\langle 10, +\infty \rangle$

☐ $\langle 3, +\infty \rangle$

☐ $\langle 6, +\infty \rangle$

Ćwiczenie 20

Zapisz w postaci kanonicznej funkcję kwadratową f , określoną wzorem ogólnym

1. $f(x) = 2x^2 - 5$

2. $f(x) = -3x^2 + 4$

3. $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{4}$

4. $f(x) = -2x^2 + 5x - 3\frac{1}{8}$

Ćwiczenie 21

Zapisz w postaci kanonicznej funkcję kwadratową f , określoną wzorem ogólnym

1. $f(x) = 5x^2 + 30x + 31$

2. $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$

3. $f(x) = -3x^2 - x + 6$

4. $f(x) = -4x^2 + 14x - 7$

Ćwiczenie 22

Zapisz w postaci kanonicznej wzór funkcji kwadratowej f , której wykresem jest parabola o wierzchołku W , przecinająca oś Oy w punkcie P .

1. $W = (2, 0), P = (0, 5)$

2. $W = (-1, 1), P = (0, -2)$

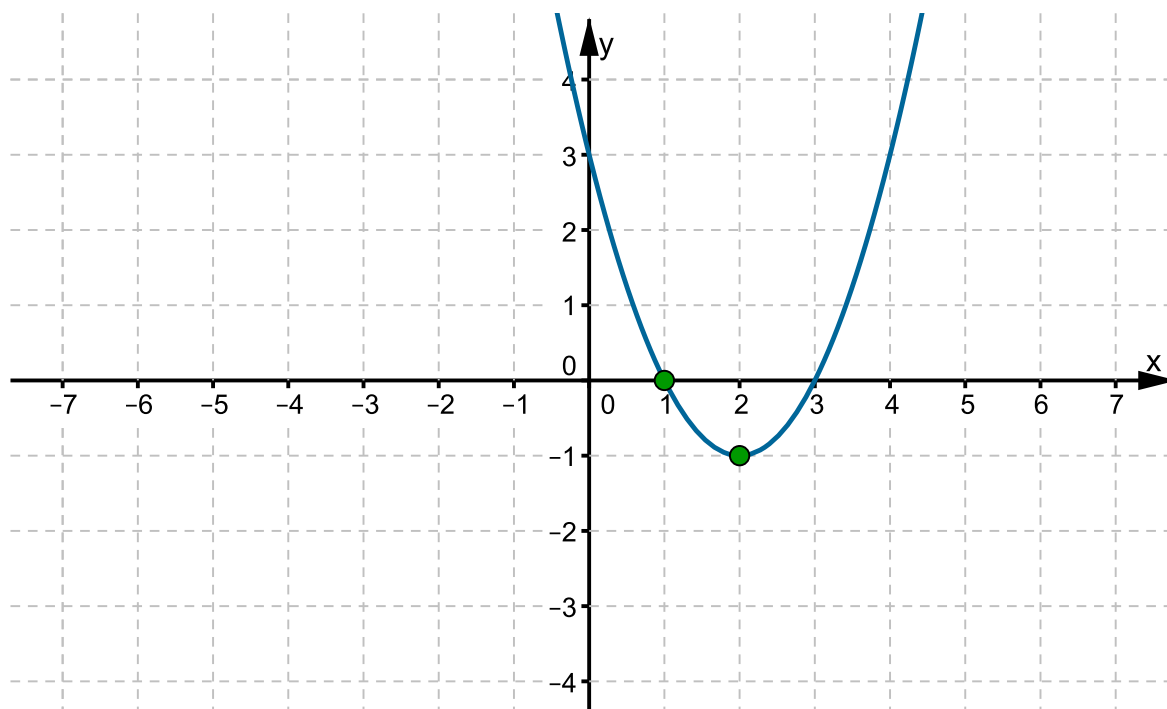
3. $W = (-2, -3), P = (0, 1)$

4. $W = (4, 6), P = (0, -2)$

Ćwiczenie 23

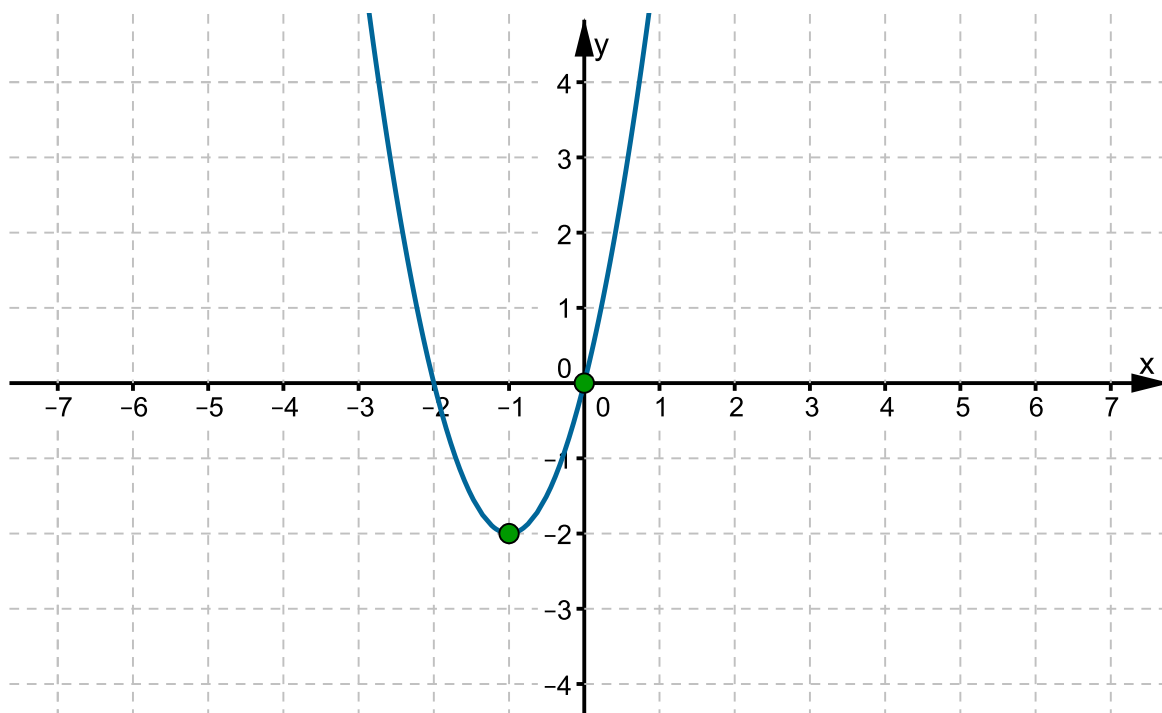
W układzie współrzędnych narysowano część paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej. Zapisz wzór tej funkcji w postaci kanonicznej.

1.



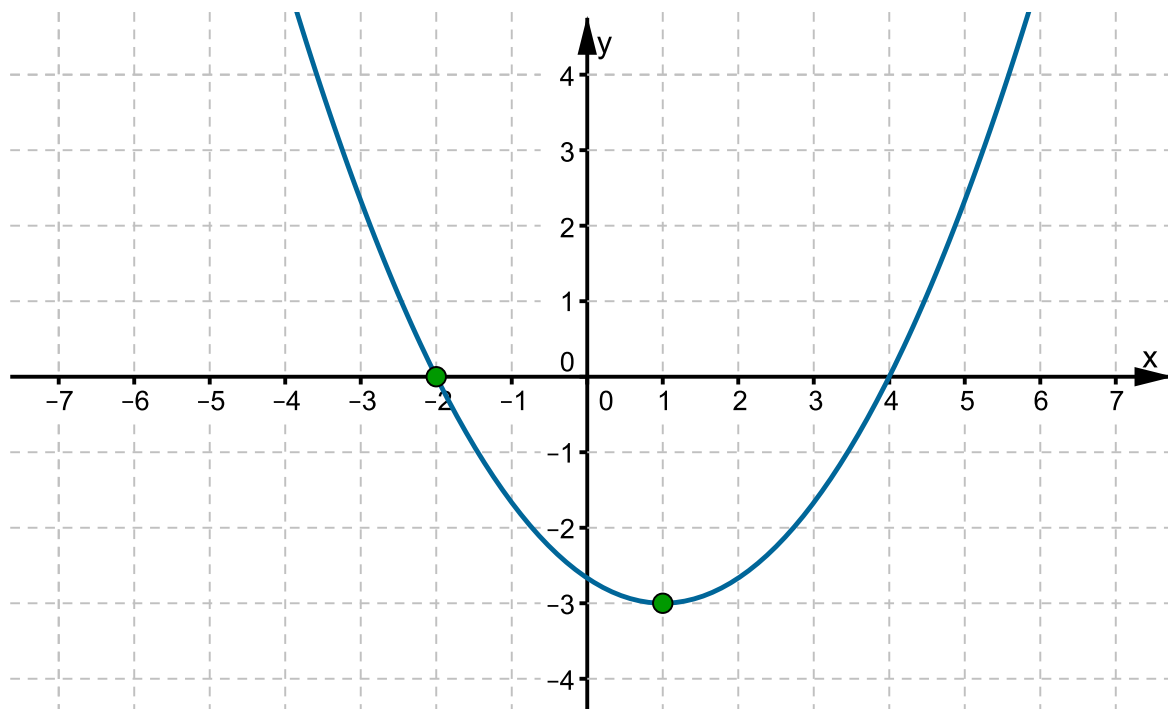
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

2.



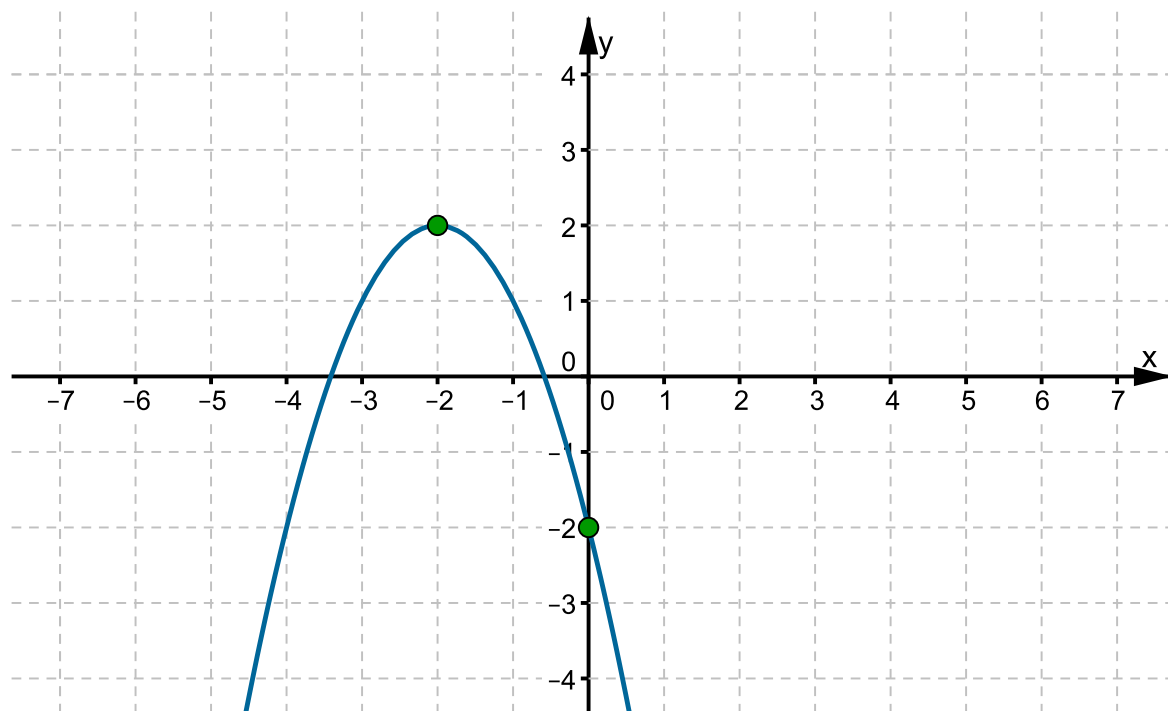
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

3.



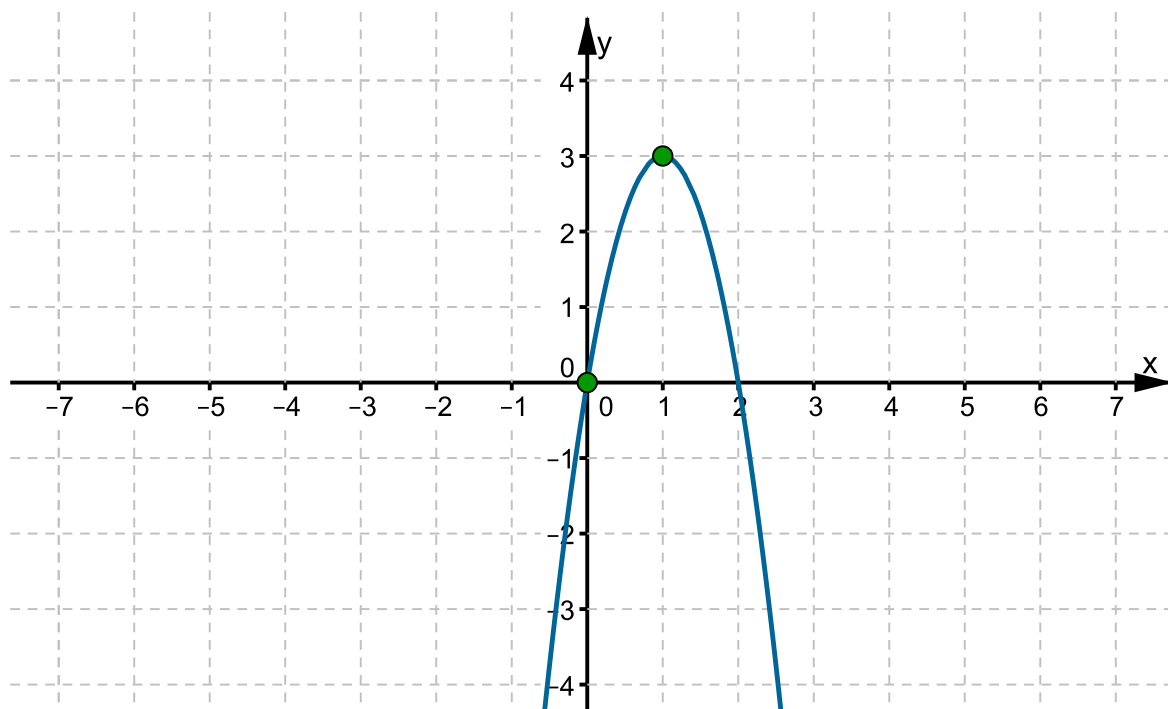
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

4.



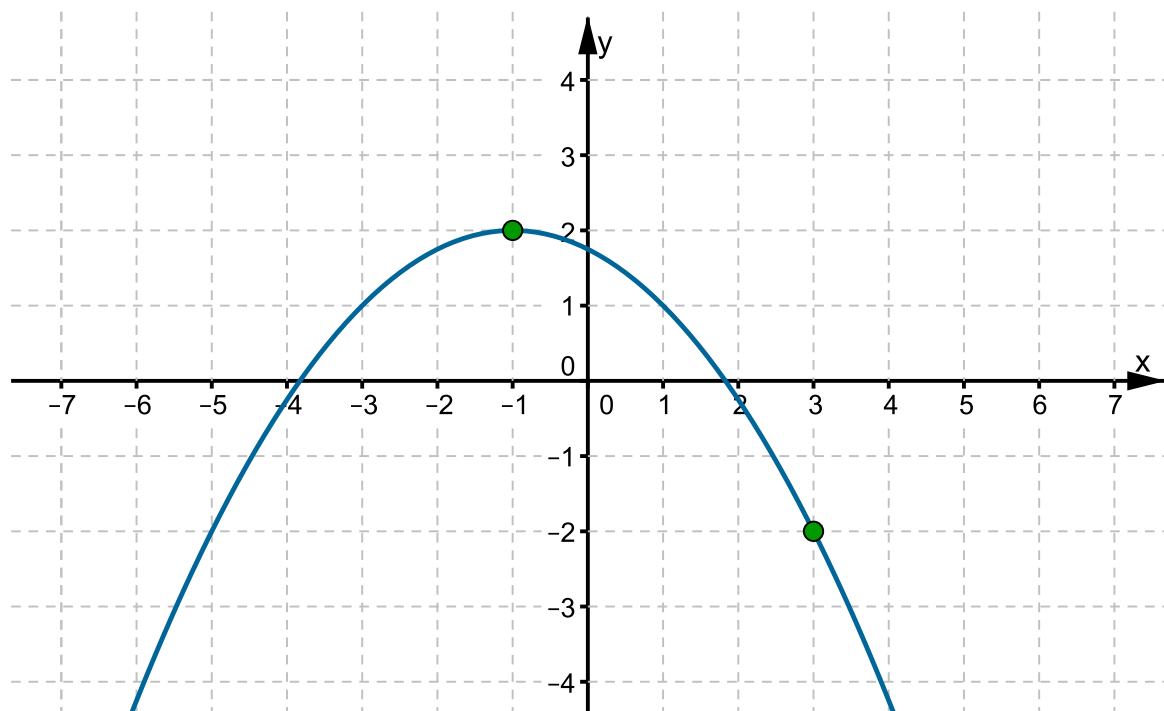
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

5.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

6.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 24

Zapisz w postaci kanonicznej wzór funkcji kwadratowej f , wiedząc, że na jej wykresie leżą punkty A , B , C .

1. $A = (-1, 3), B = (0, 1)$ i $C = (1, 3)$

2. $A = (0, -5), B = (-3, 4)$ i $C = (-6, -5)$

Ćwiczenie 25

Podaj zbiór wartości funkcji określonej wzorem

1. $f(x) = 2 + (1 - x)^2$

2. $f(x) = 5 - (-3 + x)^2$

3. $f(x) = (3x - 1)^2 - 9$

4. $f(x) = -(2x + 5)^2 + 7$

Ćwiczenie 26

Wyznacz zbiór wartości funkcji kwadratowej f .

1. $f(x) = x^2 + 12x$

2. $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$

3. $f(x) = -x^2 + 2x - 5$

4. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$

Ćwiczenie 27

Podaj maksymalny przedział, w którym funkcja f rośnie.

1. $f(x) = 3 - (x - 2)^2$

2. $f(x) = 11 + (1 - x)^2$

3. $f(x) = (2x - 6)^2 - 7$

4. $f(x) = -(3x + 15)^2 + 8$

Ćwiczenie 28

Wyznacz maksymalny przedział, w którym funkcja f maleje.

1. $f(x) = x^2 - 5x$

2. $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$

3. $f(x) = -x^2 - 4x + 7$

4. $f(x) = -3x^2 + 8x - 1$

Ćwiczenie 29

Wykres $y = x^2 - 2x + 3$ funkcji kwadratowej ma dokładnie jeden punkt wspólny z prostą o równaniu $y = m$. Oblicz m .

Ćwiczenie 30

Funkcja kwadratowa określona jest wzorem $f(x) = -x^2 - 6x + c$. Wyznacz wartość c , tak aby parabola będąca wykresem tej funkcji miała dokładnie jeden punkt wspólny z prostą o równaniu $y = -5$.

Ćwiczenie 31

Prosta $x = -3$ jest osią symetrii paraboli będącej wykresem funkcji

$f(x) = x^2 + 6kx + k - 4$. Ustal wartość k i wyznacz współrzędne wierzchołka W tej paraboli.

Ćwiczenie 32

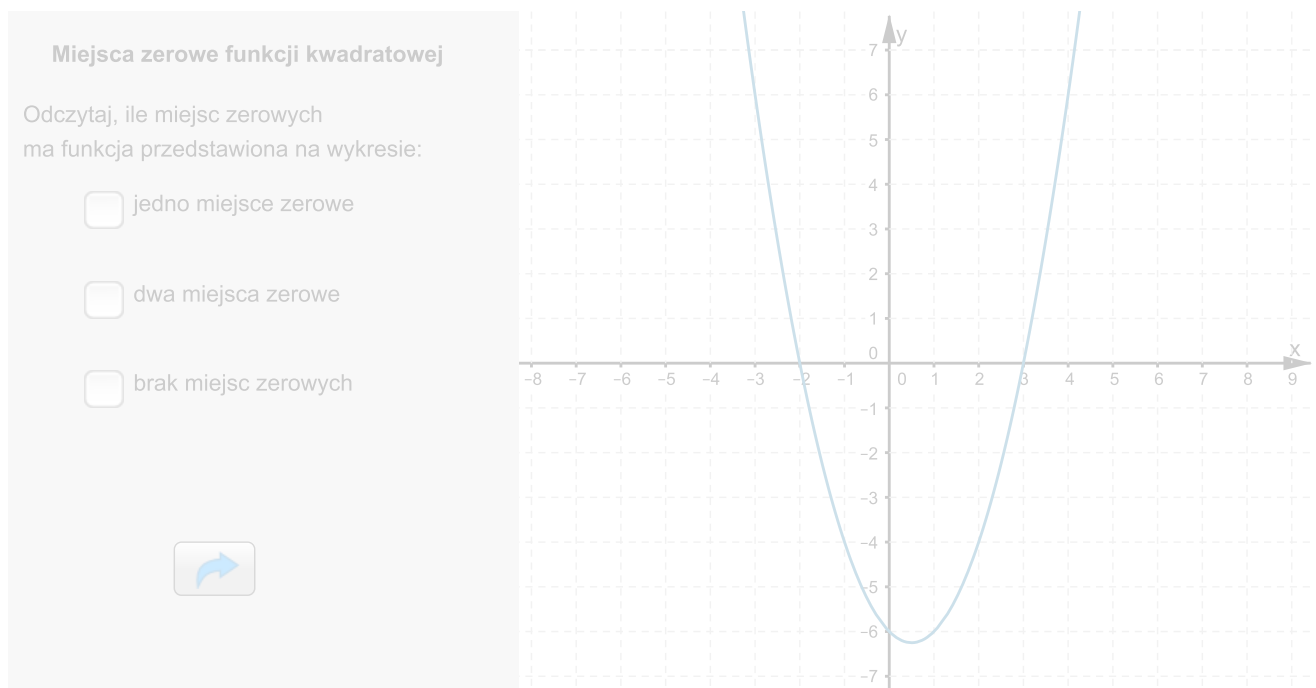
Zbiorem wartości funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = -x^2 + 4x + c$ jest przedział $(-\infty, 5)$. Wyznacz wartość c .

Miejsca zerowe funkcji kwadratowej. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej

Miejsca zerowe funkcji kwadratowej

Przypomnijmy, że miejsca zerowe funkcji to taki jej argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość 0.

Przykład 1



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D13yvTeOq>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 2

Znajdziemy miejsca zerowe funkcji

1. $f(x) = (x - 3)(x + 2)$
2. $f(x) = (2x + 1)(3x - 12)$
3. $f(x) = -11(x + 6)(8 - x)$
4. $f(x) = 2(5 - x)(4x + 7)$

Rozwiązanie

Iloczyn a i b jest równy 0 wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jeden z czynników jest równy 0.

$a \bullet b = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$ lub $b = 0$.

1. $(x - 3)(x + 2) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x - 3 = 0$ lub $x + 2 = 0$. Stąd $x = 3$ lub $x = -2$.

Funkcja $f(x) = (x - 3)(x + 2)$ ma 2 miejsca zerowe 3 i -2 .

2. $(2x + 1)(3x - 12) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(2x + 1) = 0$ lub $(3x - 12) = 0$. Stąd $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = 4$. Funkcja $f(x) = (2x + 1)(3x - 12)$ ma 2 miejsca zerowe $-\frac{1}{2}$ i 4.
3. $-11(x + 6)(8 - x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x + 6 = 0$ lub $8 - x = 0$. Stąd $x = -6$ lub $x = 8$.

Funkcja $f(x) = -11(x + 6)(8 - x)$ ma 2 miejsca zerowe -6 i 8.

4. $2(5 - x)(4x + 7) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $5 - x = 0$ lub $4x + 7 = 0$. Stąd $x = 5$ lub $x = -\frac{7}{4}$.

Funkcja $f(x) = 2(5 - x)(4x + 7)$ ma 2 miejsca zerowe 5 i $-\frac{7}{4}$.

Przykład 3

Szkicując wykres funkcji f w układzie współrzędnych, znajdujemy takie punkty (x, y) , w których x jest argumentem i $y = f(x)$. Wobec tego do opisu funkcji f stosujemy często zapis $y = f(x)$, gdzie $f(x)$ jest wzorem określającym funkcję f . Na przykład możemy pisać $f(x) = 2x^2 + 1$, a także $y = 2x^2 + 1$.

Przykład 4

Znajdziemy miejsca zerowe funkcji kwadratowej

1. $y = x^2 - 7x$
2. $y = x^2 - 25$
3. $y = x^2 + 2x + 1$
4. $y = x^2 + 2x + 4$

Rozwiązanie

1. Wzór funkcji $y = x^2 - 7x$ przekształcamy do postaci $y = x(x - 7)$. Wynika z tego, że $y = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x(x - 7) = 0$. Zatem $x = 0$ lub $x - 7 = 0$, stąd $x = 0$ lub $x = 7$.
Funkcja $y = x^2 - 7x$ ma więc dwa miejsca zerowe 0 oraz 7.
2. Wzór funkcji $y = x^2 - 25$ przekształcamy do postaci $y = (x + 5)(x - 5)$. Zatem $y = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(x - 5)(x + 5) = 0$. Wobec tego $x - 5 = 0$ lub $x + 5 = 0$, stąd $x = 5$ lub $x = -5$.
Funkcja $y = x^2 - 25$ ma więc dwa miejsca zerowe 5 oraz -5 .
3. Wzór funkcji $y = x^2 + 2x + 1$ przekształcamy do postaci $y = (x + 1)^2$. Wobec tego $y = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(x + 1)^2 = 0$. Zatem $x + 1 = 0$, stąd $x = -1$.
Funkcja $y = x^2 + 2x + 1$ ma więc jedno miejsce zerowe -1 .
4. Wzór funkcji $y = x^2 + 2x + 4$ przekształcamy do postaci $y = (x + 1)^2 + 3$. Zauważmy, że zbiorem wartości funkcji $y = (x + 1)^2 + 3$ jest $\langle 3, +\infty \rangle$, więc nie ma takiej liczby rzeczywistej x , dla której ta funkcja przyjmuje wartość 0. Oznacza to, że funkcja $y = x^2 + 2x + 4$ nie ma miejsc zerowych.

Zauważmy, że wzór każdej z funkcji

$$y = x^2 - 7x, y = x^2 - 25, y = x^2 + 2x + 1$$

można było zapisać jako iloczyn dwóch czynników liniowych

$$y = x^2 - 7x = x(x - 7), y = x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5), y = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2,$$

co pozwoliło na wyznaczenie wszystkich miejsc zerowych każdej z nich.

Gdyby wzór funkcji $y = x^2 + 2x + 4$ można było również zapisać w postaci iloczynu czynników liniowych, to funkcja ta miałaby miejsca zerowe. Jednak ta funkcja nie ma miejsc zerowych, co stwierdziliśmy, zapisując ją w postaci kanonicznej $y = (x + 1)^2 + 3$ i odczytując jej zbiór wartości. Zatem jej wzoru nie da się zapisać w postaci iloczynu czynników liniowych.

Przykład 5

Znajdziemy miejsca zerowe funkcji kwadratowej $y = x^2 + 8x - 9$.

Rozwiązanie

- sposób I

Zauważmy, że dla $x = 1$ otrzymujemy $y = 1^2 + 8 \cdot 1 - 9 = 0$, więc liczba 1 jest miejscem zerowym danej funkcji.

Jeśli ta funkcja ma jeszcze inne miejsce zerowe, to jest ono również rozwiązaniem równania $x^2 + 8x - 9 = 0$.

Korzystając z tego, że $1^2 + 8 \cdot 1 - 9 = 0$, zapiszemy to równanie w postaci

$$x^2 + 8x - 9 = 1^2 + 8 \cdot 1 - 9$$

i przekształcimy równoważnie

$$x^2 - 1^2 + 8x - 8 \cdot 1 - 9 + 9 = 0$$

$$(x - 1)(x + 1) + 8(x - 1) = 0$$

$$(x - 1)((x + 1) + 8) = 0$$

$$(x - 1)(x + 9) = 0.$$

Wobec tego $x - 1 = 0$ lub $x + 9 = 0$, stąd $x = 1$ lub $x = -9$.

Zatem funkcja $y = x^2 + 8x - 9$ ma dwa miejsca zerowe 1 oraz -9 .

- Sposób II

Wzór funkcji $y = x^2 + 8x - 9$ zapisujemy w postaci kanonicznej

$$y = (x + 4)^2 - 25$$

i przekształcamy równoważnie

$$y = (x + 4)^2 - 5^2$$

$$y = ((x + 4) - 5)((x + 4) + 5)$$

$$y = (x - 1)(x + 9).$$

Funkcję $y = x^2 + 8x - 9$ można zatem zapisać w postaci iloczynu dwóch czynników liniowych $y = (x - 1)(x + 9)$, więc ma ona dwa miejsca zerowe 1 oraz -9 .

Przykład 6

Pokażemy, że -1 jest miejscem zerowym funkcji kwadratowej $y = 3x^2 + 14x + 11$ i znajdziemy drugie miejsce zerowe tej funkcji.

Sprawdzamy, że dla $x = -1$ jest $y = 3 \cdot (-1)^2 + 14 \cdot (-1) + 11 = 3 - 14 + 11 = 0$, więc -1 jest miejscem zerowym funkcji $y = 3x^2 + 14x + 11$.

Podamy teraz dwa sposoby poszukiwania drugiego miejsca zerowego.

- sposób I

Przekształcamy wzór funkcji

$$y = 3x^2 + 14x + 11 = 3x^2 + 3x + 11x + 11$$

skąd

$$y = 3x(x + 1) + 11(x + 1)$$

czyli

$$y = (x + 1)(3x + 11)$$

Zatem drugim miejscem zerowym jest $-\frac{11}{3}$.

- sposób II

Wykorzystamy spostrzeżenie, że gdyby wzór funkcji $y = 3x^2 + 14x + 11$ można było zapisać w postaci iloczynu dwóch czynników liniowych, to jednym z nich musiałby być czynnik liniowy, którego miejscem zerowym jest -1 .

Założmy, że jest nim czynnik $x + 1$.

Powinniśmy więc znaleźć takie wartości współczynników a i b , aby dla każdej liczby rzeczywistej x zachodziła ta równość

$$y = 3x^2 + 14x + 11 = (x + 1)(ax + b).$$

Ale

$$(x + 1)(ax + b) = ax^2 + ax + bx + b = ax^2 + (a + b)x + b$$

Równość

$$y = 3x^2 + 14x + 11 = ax^2 + (a + b)x + b$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 3$ i $b = 11$.

Wobec tego wzór funkcji kwadratowej $y = 3x^2 + 14x + 11$ można zapisać równoważnie w postaci iloczynu dwóch czynników liniowych $y = (x + 1)(3x + 11)$. Stąd wynika, że dana funkcja ma dwa miejsca zerowe -1 oraz $-\frac{11}{3}$.

Zauważmy jeszcze, że po wyłączeniu liczby 3 przed nawias można wzór danej funkcji zapisać jako

$$y = 3(x + 1)\left(x + \frac{11}{3}\right).$$

Przykład 7

Wykażemy, że funkcja $y = 5x^2 - 10x + 11$ nie ma miejsc zerowych.

Przekształcając wzór funkcji do postaci kanonicznej, otrzymujemy

$$y = 5x^2 - 10x + 11 = 5(x - 1)^2 + 6.$$

Ponieważ dana funkcja nie przyjmuje wartości mniejszych od 6, więc nie ma miejsc zerowych.

Przykład 8

Znajdziemy, o ile istnieją, miejsca zerowe funkcji $y = x^2 - 8x + 5$.

Wzór tej funkcji również zapiszemy w postaci kanonicznej.

Mamy wtedy

$$y = x^2 - 8x + 5 = (x - 4)^2 - 11.$$

Wobec tego funkcja $y = x^2 - 8x + 5$ każdą z wartości większych od -11 przyjmuje dla dwóch różnych argumentów, ma więc dwa różne miejsca zerowe.

Wyznamy te miejsca zerowe, zapisując wzór funkcji w postaci iloczynu dwóch czynników liniowych. Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów.

$$y = (x - 4)^2 - 11$$

$$y = (x - 4)^2 - \sqrt{11}^2$$

$$y = (x - 4 + \sqrt{11})(x - 4 - \sqrt{11})$$

Wynika z tego, że funkcja $y = x^2 - 8x + 5$ ma dwa różne miejsca zerowe $4 - \sqrt{11}$ oraz $4 + \sqrt{11}$.

Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej

Każdą funkcję kwadratową, daną w postaci ogólnej wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$, można zapisać w postaci kanonicznej $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$. Stąd mamy

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right).$$

Wynika z tego, że

- jeżeli wyróżnik jest ujemny, to wyrażenie $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ jest dodatnie, więc w tym przypadku funkcja f nie ma miejsc zerowych,
- jeżeli $\Delta = 0$, to $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. Jedynym miejscem zerowym funkcji f jest $-\frac{b}{2a}$,
- jeżeli $\Delta > 0$, to wzór funkcji f można przekształcić następująco

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right) = a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

w tym przypadku funkcja f ma więc dwa różne miejsca zerowe $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ oraz $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Istnienie i liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej zależy zatem od znaku jej wyróżnika.

Twierdzenie: Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej

Funkcja kwadratowa f określona wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$)

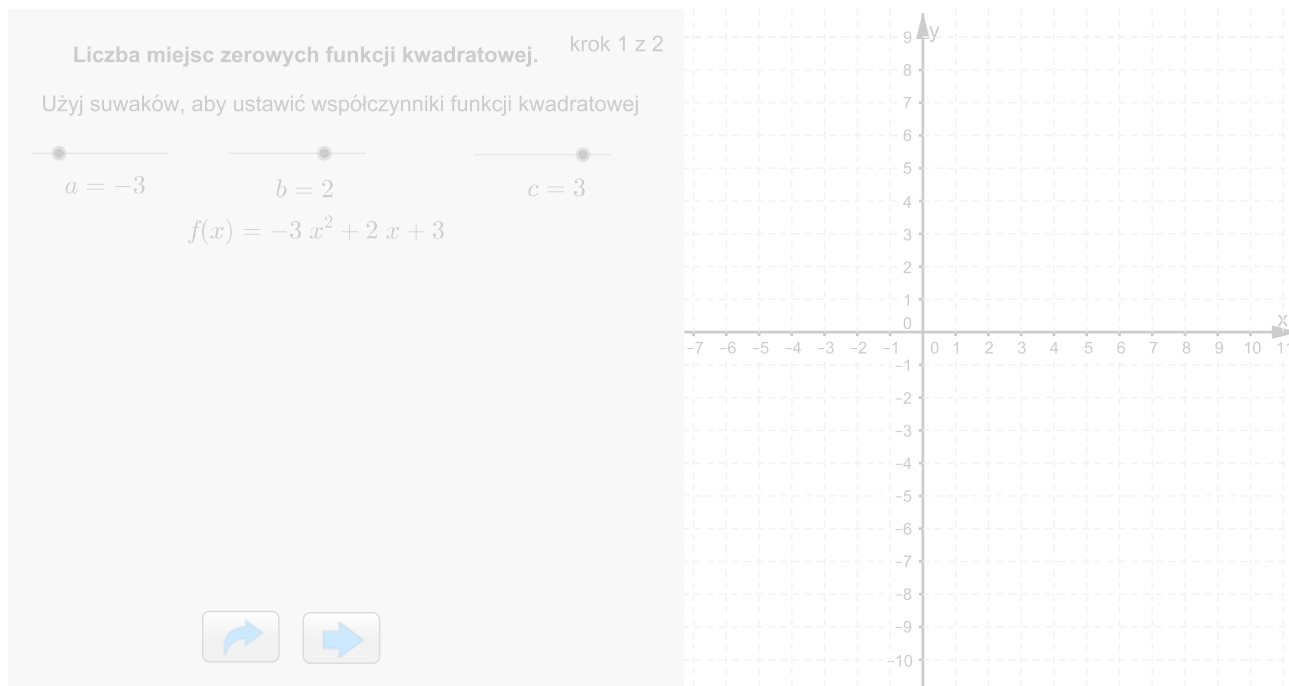
- ma dwa różne miejsca zerowe rzeczywiste x_1 i x_2 wtedy i tylko wtedy, gdy jej wyróżnik Δ jest dodatni.

Wówczas wzór funkcji f można zapisać w postaci iloczynowej

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2),$$

$$\text{gdzie } x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ oraz } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- ma dokładnie jedno miejsce zerowe x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta = 0$. W tym przypadku wzór funkcji f można zapisać w postaci iloczynowej $f(x) = a(x - x_0)^2$, gdzie $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- nie ma pierwiastków rzeczywistych wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta < 0$. Wtedy wzoru funkcji f nie można zapisać w postaci iloczynowej.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D13yvTeOq>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 1

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2

Funkcje f , g i h dane są wzorami

$$f(x) = (x - 1)(2x + 2)$$

$$g(x) = 3(x + 1)(x - 5)$$

$$h(x) = -2(x + 4)(x - 3)$$

Wówczas

☐ funkcje f i g mają wspólne miejsce zerowe

☐ miejscami zerowymi funkcji g są 1 oraz -5

☐ miejscami zerowymi funkcji f są 1 oraz -2

☐ -2 jest miejscem zerowym funkcji h

Ćwiczenie 3

Na każdym z poniższych rysunków przedstawiony jest fragment wykresu funkcji kwadratowej, przy czym na jednym z nich jest wykres funkcji f , na innym – wykres funkcji g , a na jeszcze innym – wykres funkcji h .

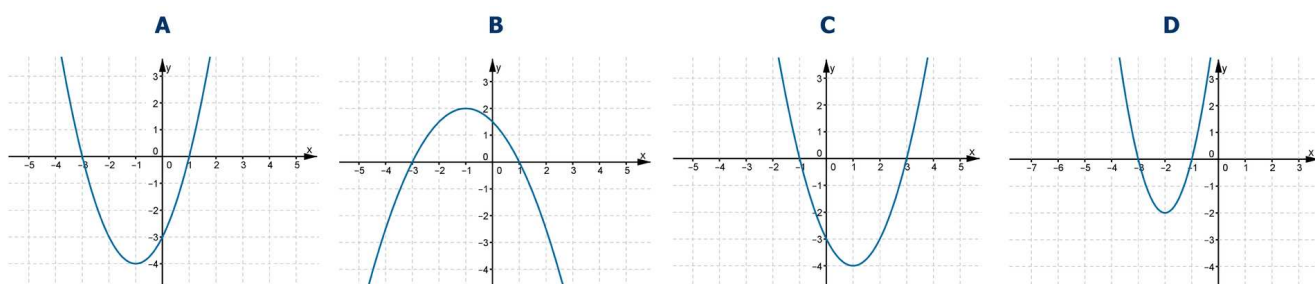
Funkcje te określone są wzorami:

$$f(x) = (x + 1)(x - 3),$$

$$g(x) = 2(x + 1)(x + 3),$$

$$h(x) = -\frac{1}{2}(x + 3)(x - 1).$$

Na którym rysunku jest wykres funkcji f , na którym wykres funkcji g , a na którym – wykres funkcji h ?



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐ Funkcję kwadratową określoną wzorem $y = -x^2 + 3x + 10$ można zapisać w postaci iloczynowej wzorem $y = -(x + 2)(x - 5)$.

☐ Funkcję kwadratową określoną wzorem $y = x^2 - 7x + 6$ można zapisać w postaci iloczynowej wzorem $y = (x - 1)(x - 6)$.

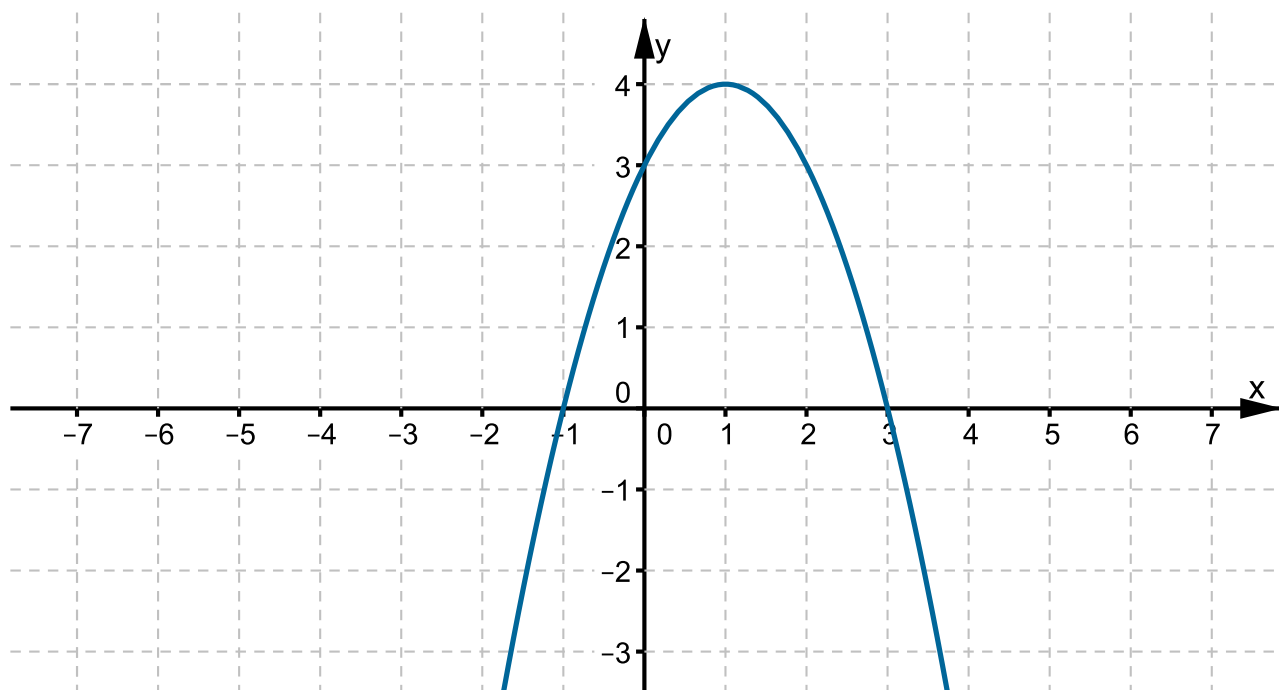
☐ Funkcję kwadratową określoną wzorem $y = 2x^2 + 3x - 5$ można zapisać w postaci iloczynowej wzorem $y = 2(x + 1)(x - \frac{5}{2})$.

☐ Funkcji kwadratowej określonej wzorem $y = -x^2 - 2x$ nie da się zapisać w postaci iloczynowej.

Ćwiczenie 5

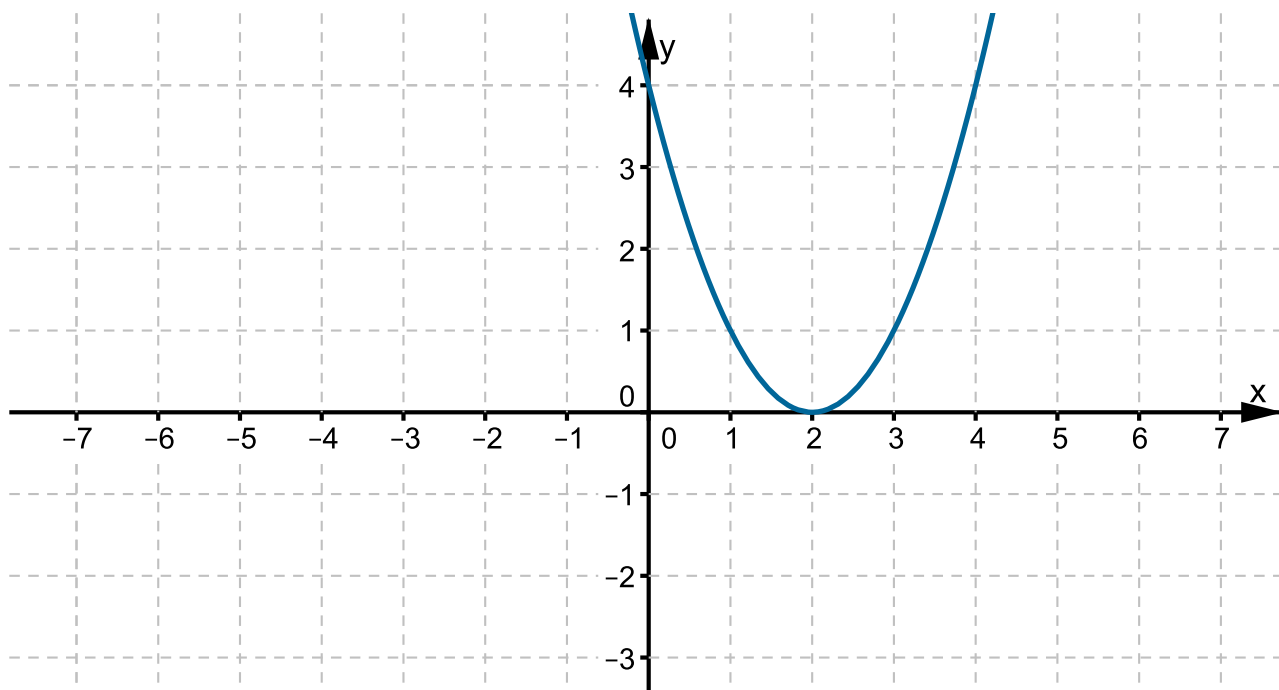
Na każdym z poniższych rysunków przedstawiony jest fragment wykresu funkcji kwadratowej

1.



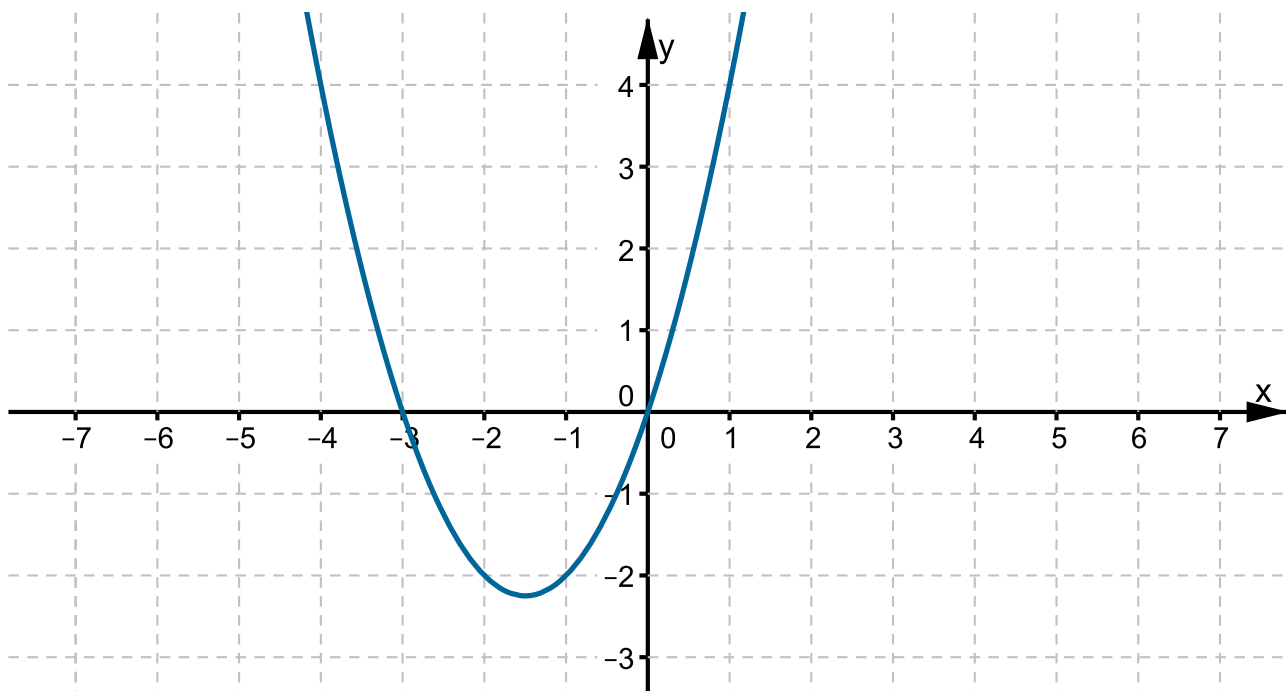
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

2.



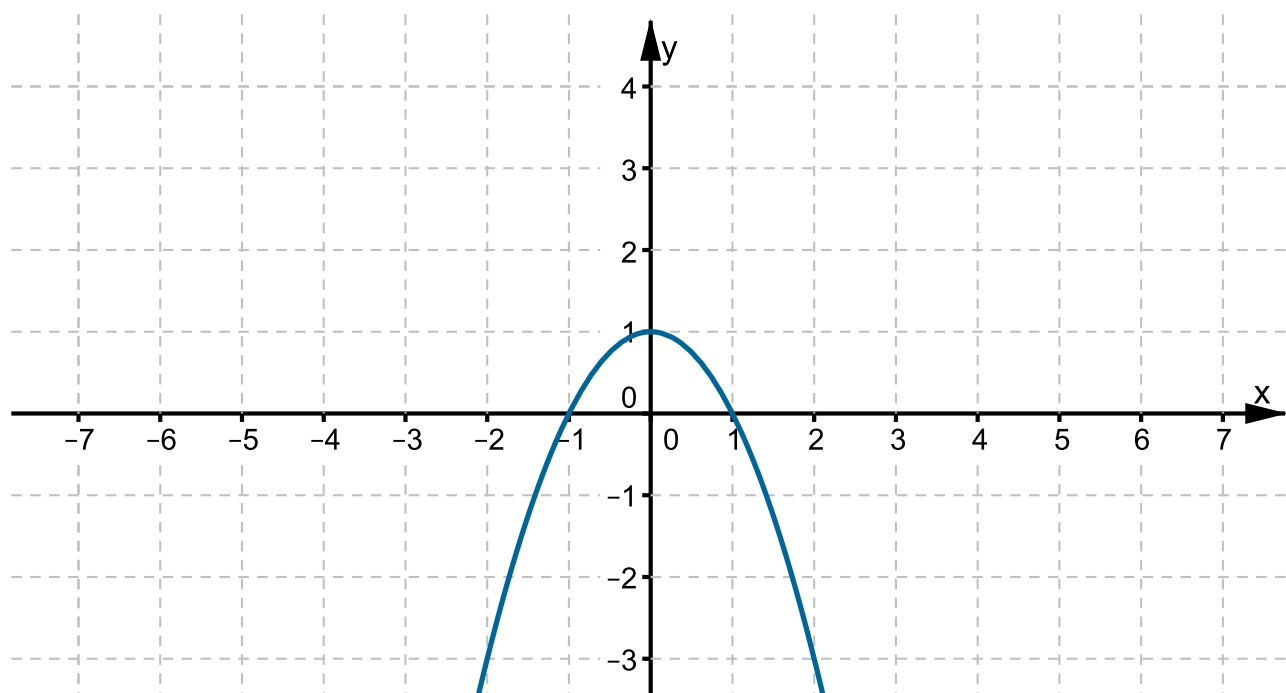
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

3.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

4.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Rozpatrzmy funkcje określone wzorami: $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x^2 + 3x$, $h(x) = x^2 + 4x + 4$, $k(x) = -x^2 + 2x + 3$. Wówczas

☐ wykres funkcji g przedstawiony jest na rysunku c)

☐ na jednym z tych rysunków przedstawiony jest wykres funkcji k

☐ wykres funkcji f przedstawiony jest na rysunku d)

☐ żaden z tych rysunków nie przedstawia wykresu funkcji h

Ćwiczenie 6

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐ Funkcja kwadratowa $y = x^2 - 6x + 9$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe.

☐ Funkcja kwadratowa $y = -x^2 + 3$ nie ma miejsc zerowych.

☐ Funkcja kwadratowa $y = x^2 - 10$ ma dwa różne miejsca zerowe.

☐ Funkcja kwadratowa $y = 2x^2 + x$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe.

Ćwiczenie 7

Funkcja kwadratowa f określona jest wzorem $f(x) = x^2 + 4x + c$. Wówczas

☐ dla $c = 5$ funkcja f ma dokładnie jedno miejsce zerowe

☐ jeśli jednym z miejsc zerowych tej funkcji jest 1, to $c = 5$

☐ jeśli jednym z miejsc zerowych tej funkcji jest -1 , to $c = 3$

☐ dla $c = 0$ funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe

Ćwiczenie 8

Połącz w pary wzór paraboli z jej miejscami zerowymi.

$$2x^2 - 2x - 24$$

$$x = -\frac{1}{2}, x = 4\frac{1}{2}$$

$$2x^2 - 8x - \frac{9}{2}$$

$$x = -3, x = 4$$

$$y = x^2 + x - 2$$

$$x = \frac{1}{2}, x = 3$$

$$y = 3x^2 - \frac{21}{2}x + \frac{9}{2}$$

$$x = -2, x = 1$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐ Jedno z miejsc zerowych funkcji kwadratowej $y = 2x^2 + 9x + 7$ jest liczbą dodatnią.

☐ Iloczyn miejsc zerowych funkcji kwadratowej $y = 3x^2 - 11x + 3$ jest równy 1.

☐ Funkcja kwadratowa $y = x^2 - 12x + 11$ ma dwa różne miejsca zerowe, które są liczbami całkowitymi.

☐ Każde z miejsc zerowych funkcji kwadratowej $y = x^2 - 2x - 10$ należy do przedziału $\langle -2, 4 \rangle$.

Ćwiczenie 10

Miejsca zerowe funkcji kwadratowej $y = 2(x + 3)(x - 5)$ to

☐ $x_1 = -3, x_2 = 5$

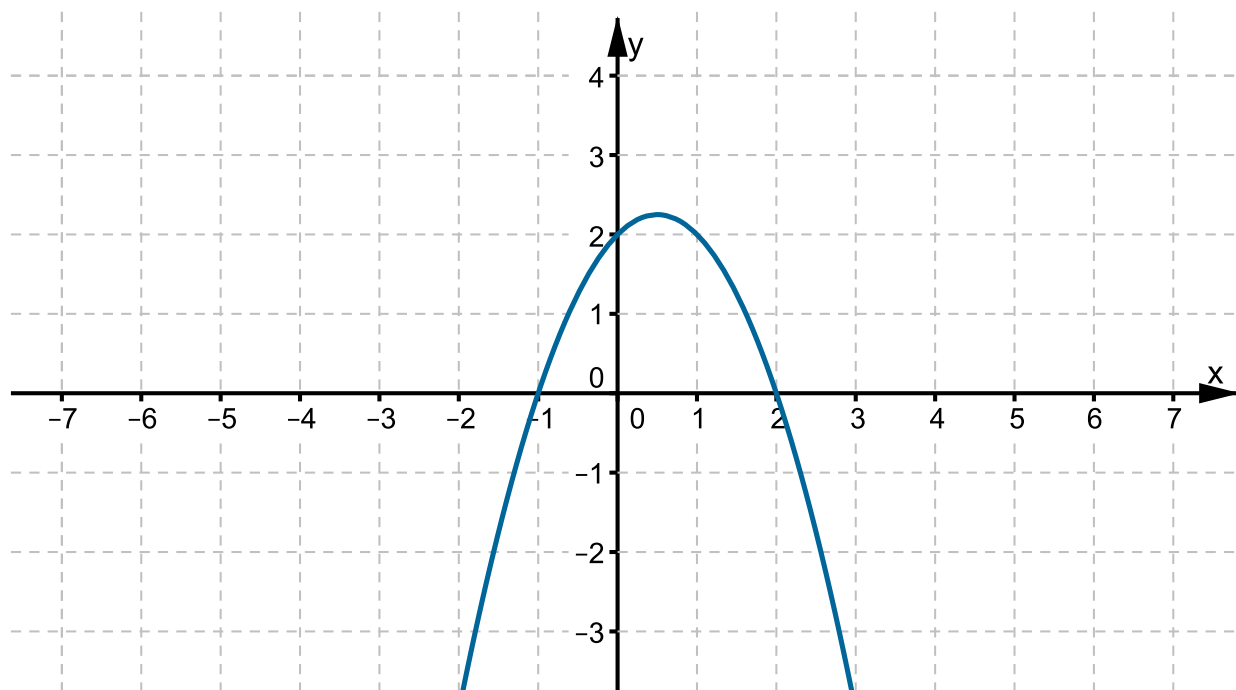
☐ $x_1 = 3, x_2 = 5$

☐ $x_1 = 3, x_2 = -5$

☐ $x_1 = -3, x_2 = -5$

Ćwiczenie 11

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji kwadratowej f .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Funkcja f jest określona wzorem

☐ $f(x) = -(x - 2)(x + 1)$

☐ $f(x) = -(x - 1)(x + 2)$

☐ $f(x) = (x - 1)(x + 2)$

☐ $f(x) = (x - 2)(x + 1)$

Ćwiczenie 12

Wskaż wzór funkcji kwadratowej, której miejsca zerowe są liczbami o przeciwnych znakach.

☐ $y = -5(x + 2)(x + 4)$

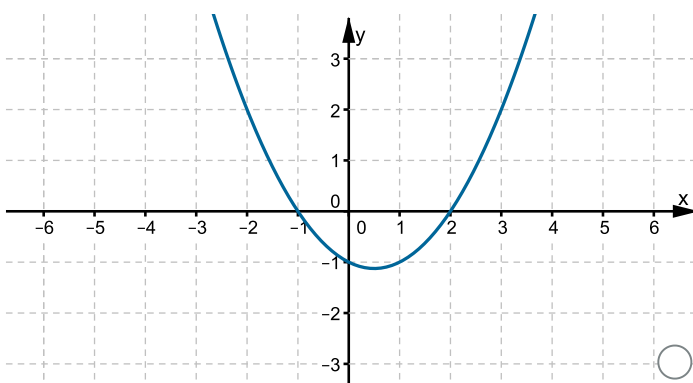
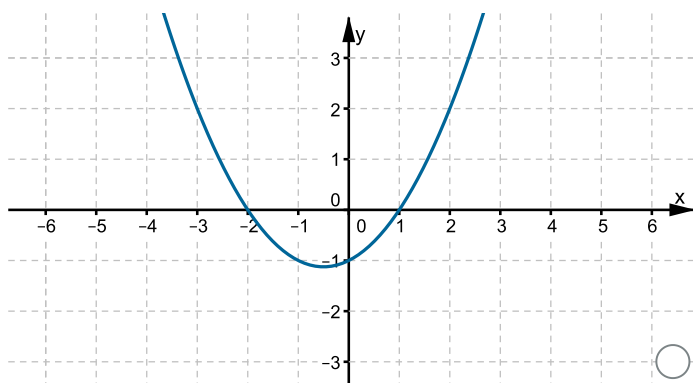
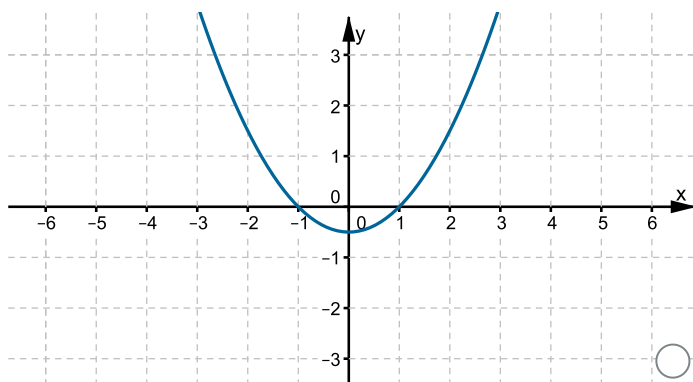
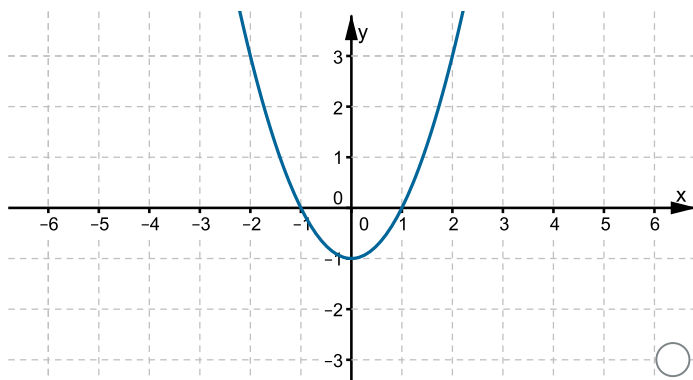
☐ $y = 2(x - 3)(x - 4)$

☐ $y = 3(x + 1)(x + 2)$

☐ $y = -4(x + 1)(x - 1)$

Ćwiczenie 13

Funkcje liniowe f i g są określone wzorami $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ oraz $g(x) = x + 1$. Wskaż rysunek, na którym przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x) \cdot g(x)$.



Ćwiczenie 14

Miejsca zerowe funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = -x^2 - 6x - 5$ to

☐ $x_1 = -1, x_2 = 5$

☐ $x_1 = 1, x_2 = 5$

☐ $x_1 = 1, x_2 = -5$

☐ $x_1 = -1, x_2 = -5$

Ćwiczenie 15

Wskaż wzór funkcji kwadratowej, której miejscami zerowymi są liczby -2 oraz $\frac{1}{2}$.

☐ $y = x^2 + \frac{1}{2}x - 3$

☐ $y = 2x^2 + 3x - 2$

☐ $y = \frac{1}{2}x^2 + x$

☐ $y = x^2 + 3x + 2$

Ćwiczenie 16

Do wykresu funkcji kwadratowej $y = 3x^2 - 28x - 31$ należy punkt

☐ $(3, 0)$

☐ $(0, 0)$

☐ $(-1, 0)$

☐ $(-2, 0)$

Ćwiczenie 17

Jednym z miejsc zerowych funkcji f określonej wzorem $f(x) = -x^2 + bx + 10$ jest liczba -2 . Wówczas liczba b jest równa

☐ 7

☐ -3

☐ -7

☐ 3

Ćwiczenie 18

Funkcja f określona wzorem $f(x) = -x^2 + 4x + c$ nie ma miejsc zerowych wtedy i tylko wtedy, gdy

☐ $c = 4$

☐ $c < -4$

☐ $c > 4$

☐ $c = -4$

Ćwiczenie 19

Wyznacz miejsca zerowe funkcji.

1. $y = -6x(x + 2)$

2. $y = (7 - x)(x + 11)$

3. $y = (3x + 8)(4x - 1)$

4. $y = (15 - 5x)(16x + 10)$

Ćwiczenie 20

Podana funkcja ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2 . Zapisz jej wzór w postaci iloczynowej $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.

1. $y = 2x^2 - 22x$

2. $y = -3x^2 + 48$

3. $y = 9x^2 - 49$

4. $y = 25x^2 + 15x$

Ćwiczenie 21

Wykaż, że podana funkcja ma dokładnie jedno miejsce zerowe. Wyznacz to miejsce zerowe.

1. $y = x^2 + 4x + 4$

2. $y = -x^2 + 2x - 1$

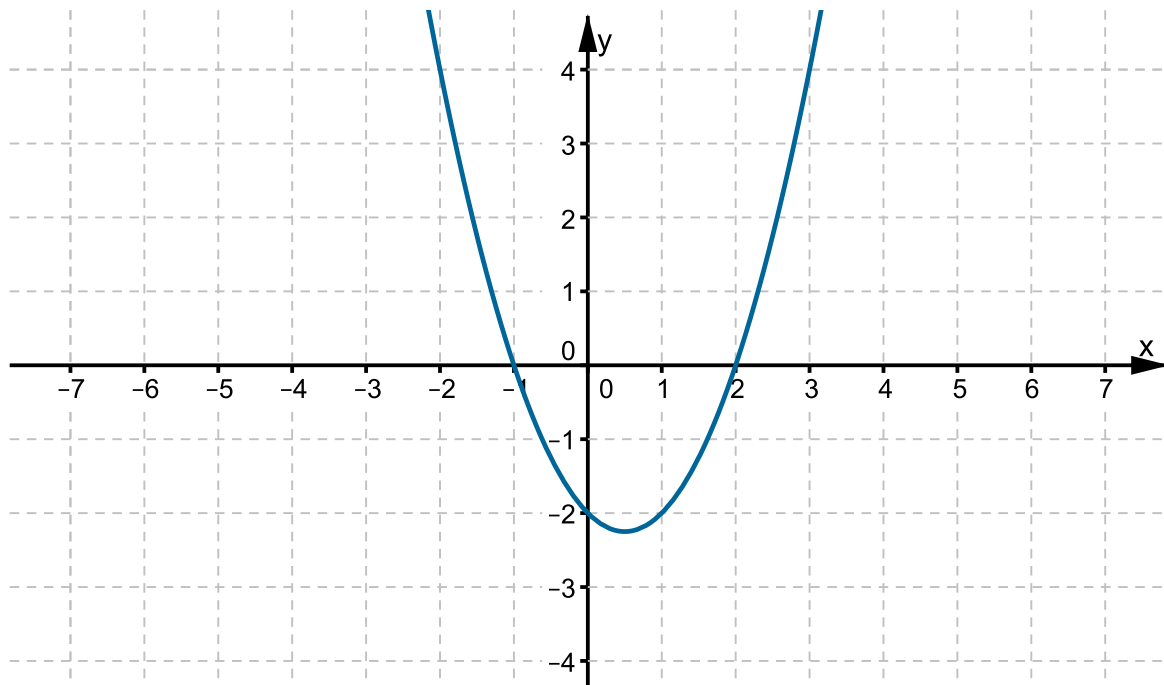
3. $y = 3x^2 + 30x + 75$

4. $y = -2x^2 + 12x - 18$

Ćwiczenie 22

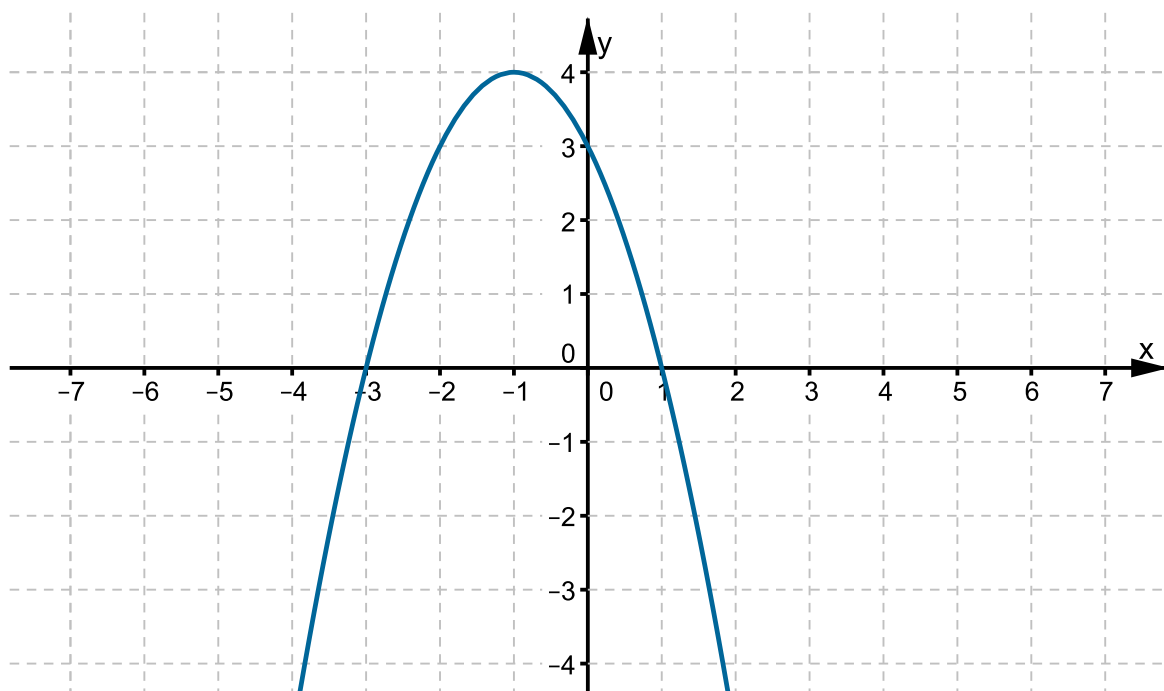
Na każdym z poniższych rysunków przedstawiony jest fragment wykresu funkcji kwadratowej mającej dwa różne miejsca zerowe x_1, x_2 . Zapisz wzór każdej z tych funkcji w postaci iloczynowej $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.

1.



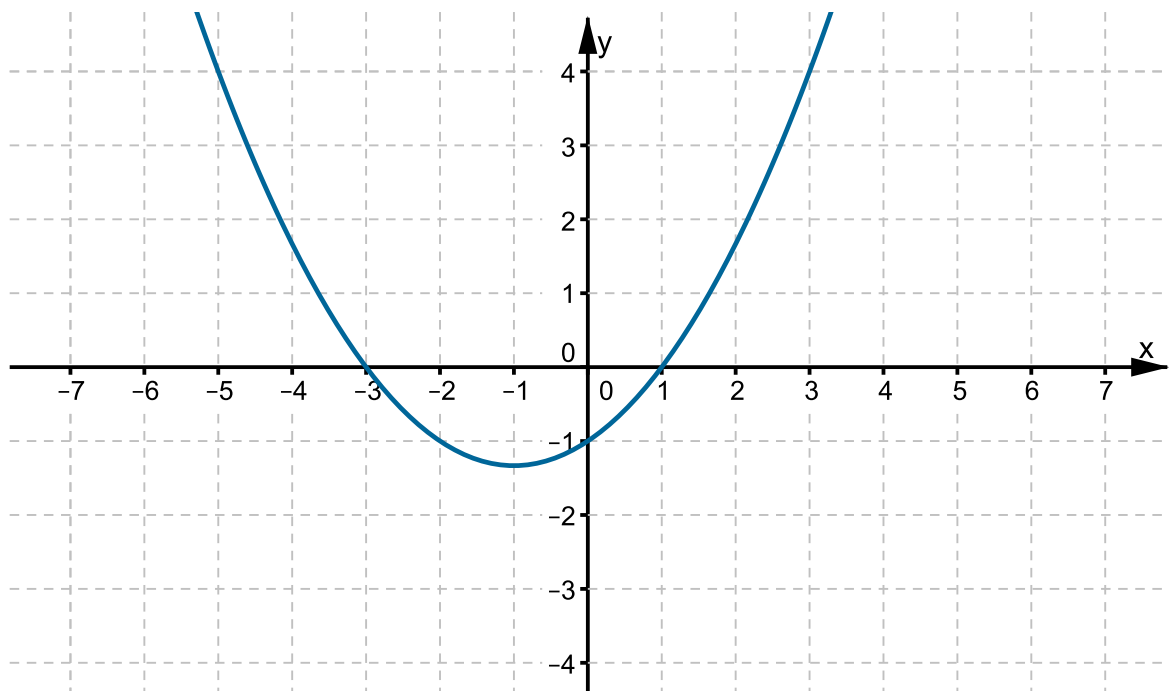
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

2.



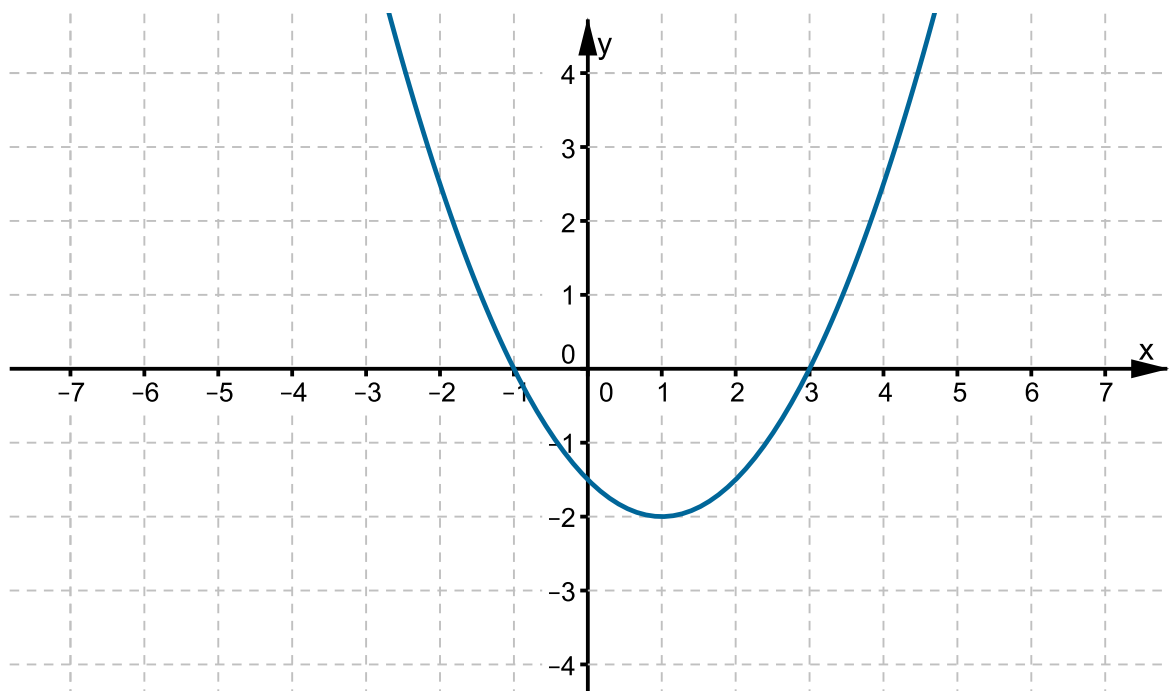
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

3.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

4.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 23

Wykaż, że funkcja nie ma miejsc zerowych.

1. $y = x^2 + x + 2$

2. $y = x^2 - 3x + 3$

3. $y = 2x^2 - x + 5$

4. $y = -x^2 + 5x - 8$

Ćwiczenie 24

Wyznacz miejsca zerowe funkcji.

1. $y = 2x^2 + 3x - 5$

2. $y = 4x^2 - 15x - 19$

3. $y = -3x^2 - 14x - 8$

4. $y = -5x^2 + 11x - 2$

Ćwiczenie 25

Funkcja f określona wzorem $f(x) = 6x^2 + x - 1$ ma dwa różne miejsca zerowe. Wykaż, że żadne z nich nie jest liczbą całkowitą.

Ćwiczenie 26

Liczby x_1 oraz x_2 są miejscami zerowymi funkcji $y = 24x^2 - 2x - 15$, przy czym $x_1 < x_2$. Oblicz $4x_1 + 6x_2$.

Ćwiczenie 27

Wyznacz miejsca zerowe funkcji.

1. $y = x^2 - 4x - 6$

2. $y = x^2 + 2x - 5$

3. $y = -x^2 + 6x + 11$

4. $y = -x^2 - 8x + 7$

Ćwiczenie 28

Funkcja f określona wzorem $f(x) = 2x^2 + 4x - 7$ ma dwa różne miejsca zerowe x_1, x_2 . Oblicz sumę $x_1 + x_2$ oraz iloczyn x_1x_2 .

Ćwiczenie 29

Funkcja kwadratowa $f(x) = 3x^2 - 6x - 1$ ma dwa różne miejsca zerowe. Wykaż, że każde z nich należy do przedziału $(-1, 3)$.

Ćwiczenie 30

Wykaż, że niezależnie od wartości współczynnika b funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 + bx + b - 1$ ma miejsce zerowe równe -1 . Dla jakiej wartości b jest to jedyne miejsce zerowe tej funkcji?

Ćwiczenie 31

Jednym z miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = -10x^2 + bx + 1$ jest liczba $-\frac{1}{2}$. Oblicz b oraz drugie miejsce zerowe funkcji f .

Ćwiczenie 32

Funkcja $g(x) = (x - 3)(x + 4)$ ma te same miejsca zerowe co funkcja f określona wzorem $f(x) = -2x^2 + bx + c$. Wyznacz b i c .

Ćwiczenie 33

Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = x^2 + 6x + c$. Ustal liczbę miejsc zerowych funkcji f w zależności od wartości współczynnika c .

Wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie

Przypomnijmy, że każdą funkcję kwadratową f określoną wzorem

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

gdzie a , b oraz c to liczby rzeczywiste, przy czym liczba a jest różna od zera, możemy zapisać w postaci kanonicznej

$$f(x) = a(x - p)^2 + q,$$

gdzie $p = \frac{-b}{2a}$ i $q = \frac{-\Delta}{4a}$.

Ponadto każdą taką funkcję kwadratową, której wyróżnik jest nieujemny, możemy też zapisać w postaci iloczynowej

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2),$$

gdzie $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ i $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ to miejsca zerowe tej funkcji.

W poniższych przykładach pokażemy, w jaki sposób można wyznaczyć wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.

Przykład 1

Funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 + 4x + c$ osiąga wartość najmniejszą równą -7 .

Wyznamy wartość współczynnika c .

Rozwiązanie

Z treści zadania wynika, że współrzędna q wierzchołka wykresu funkcji f jest równa -7 .

Możemy z tego skorzystać w jeden z następujących sposobów.

- sposób I

Obliczamy wyróżnik funkcji f

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 16 - 4c$$

Podstawiamy do wzoru $q = \frac{-\Delta}{4a}$.

$$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(16-4c)}{4 \cdot 1} = -7.$$

Stąd $4c - 16 = -28$, $4c = -12$, $c = -3$.

- sposób II

Ze wzoru odczytujemy pierwszą współrzędną wierzchołka wykresu funkcji $p = \frac{-4}{2 \cdot 1} = -2$. Wobec tego

$$f(-2) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + c = -7$$

stąd $c = -3$.

- sposób III

Ze wzoru odczytujemy pierwszą współrzędną wierzchołka: $p = \frac{-4}{2 \cdot 1} = -2$ i $f(-2) = -7$. Wobec tego funkcję f można zapisać wzorem w postaci kanonicznej $f(x) = (x + 2)^2 - 7$, stąd

$$f(x) = x^2 + 4x + 4 - 7 = x^2 + 4x - 3,$$

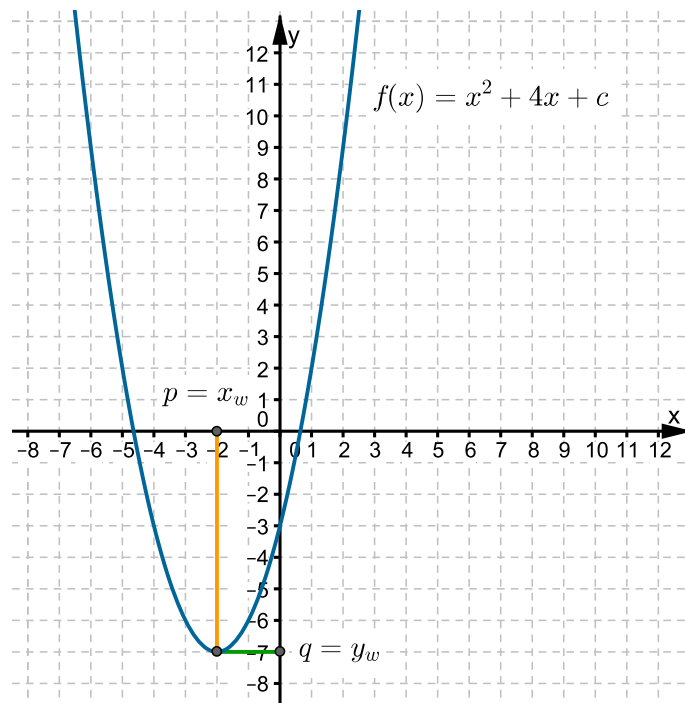
czyli $c = -3$.

- sposób IV

Przekształcamy wzór funkcji f do postaci kanonicznej

$$f(x) = x^2 + 4x + c = (x^2 + 4x + 4) - 4 + c = (x + 2)^2 + c - 4.$$

Zatem funkcja f osiąga wartość najmniejszą $c - 4$ dla $x = -2$. Ponieważ $f(-2) = -7$, to $c - 4 = -7$, czyli $c = -3$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Sposób 1

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 16 - 4c$$

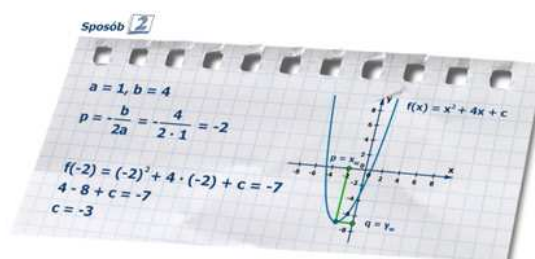
$$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(16 - 4c)}{4}$$

$$y_0 = q = -7, \text{ czyli } \frac{-16 + 4c}{4} = -7$$

$$\text{stąd: } 4c - 16 = -28$$

$$4c = -12$$

$$c = -3$$



Sposób 3

$$a = 1, b = 4$$

$$p = \frac{b}{2a} = \frac{4}{2 \cdot 1} = -2$$

Najmniejsza wartość funkcji $q = -7$

$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$

$$f(x) = (x + 2)^2 - 7$$

$$f(x) = x^2 + 4x + 4 - 7 = x^2 + 4x - 3$$

$$c = -3$$

Sposób 4

$$f(x) = x^2 + 4x + c = (x^2 + 4x + 4) - 4 + c =$$

$$= (x + 2)^2 + c - 4$$

$$q = c - 4$$

$$c - 4 = -7$$

$$c = -3$$

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

E-podręczniki z matematyki

Przykład 2

Jednym z miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = -3x^2 + bx - 14$ jest 7. Wyznamy wartość współczynnika b .

Rozwiązanie

- sposób I

Z treści zadania wynika, że

$$f(7) = -3 \cdot 7^2 + b \cdot 7 - 14 = 0.$$

Zatem $-147 + 7b - 14 = 0$, stąd $7b = 161$, czyli $b = 23$.

- sposób II

Z treści zadania wynika, że funkcję $f(x) = -3x^2 + bx - 14$ można zapisać w postaci iloczynowej

$$f(x) = -3(x - 7)(x - x_2),$$

gdzie x_2 to drugie miejsce zerowe funkcji f .

Postać iloczynową przekształcamy do postaci ogólnej, stąd

$$f(x) = -3(x^2 - 7x - x_2x + 7x_2) = -3x^2 + (21 + 3x_2)x - 21x_2.$$

Porównując współczynniki, stwierdzamy, że $-21x_2 = -14$ oraz $b = 21 + 3x_2$. Zatem drugim pierwiastkiem jest $x_2 = \frac{2}{3}$, więc $b = 21 + 3 \cdot \frac{2}{3} = 23$.

- sposób III

Z treści zadania wynika, że funkcję $f(x) = -3x^2 + bx - 14$ można zapisać w postaci iloczynowej

$$f(x) = -3(x - 7)(x - x_2),$$

gdzie x_2 to drugie miejsce zerowe funkcji f .

Jedynym wyrazem niezależnym od x w tym wzorze jest $-3 \cdot (-7) \cdot x_2$, zatem

$$-3 \cdot (-7) \cdot x_2 = -14, \text{ a stąd}$$

$x_2 = \frac{2}{3}$. Liczba $\frac{2}{3}$ jest więc miejscem zerowym funkcji f , zatem

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = -3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + b \cdot \frac{2}{3} - 14 = 0.$$

Wobec tego $-\frac{4}{3} + \frac{2}{3}b - 14 = 0$, $\frac{2}{3}b = 14\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}b = \frac{46}{3}$, czyli $b = 23$.

Przykład 3

Wyznamy współrzędne wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej

$$f(x) = -(x + 1)(x - 3).$$

Rozwiązanie

- sposób I

Przekształcamy wzór funkcji f do postaci ogólnej

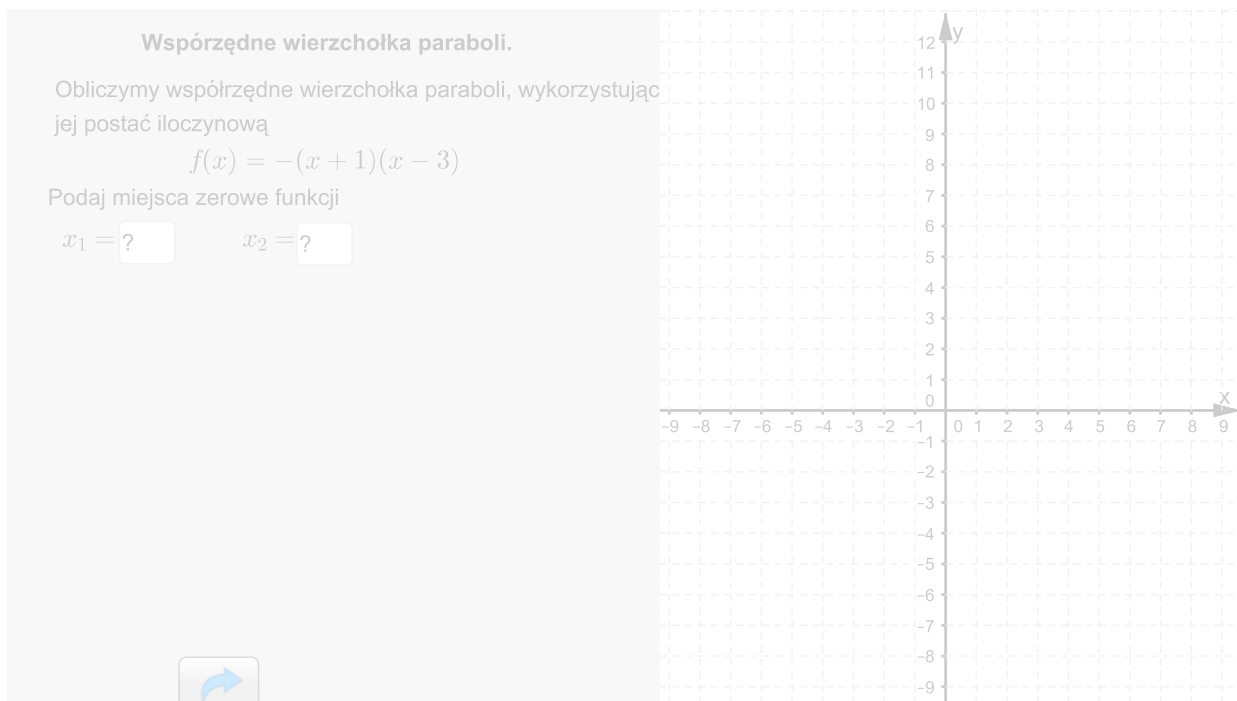
$$f(x) = -(x + 1)(x - 3) = -(x^2 + x - 3x - 3) = -x^2 + 2x + 3.$$

Wobec tego współrzędne wierzchołka tej paraboli to: $p = \frac{-2}{2 \cdot (-1)} = 1$,

$q = f(1) = -1^2 + 2 + 3 = 4$. Zatem wierzchołkiem tej paraboli jest punkt $W = (1, 4)$.

- sposób II

Ponieważ $f(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = -1$ lub $x = 3$, to funkcja f ma dwa miejsca zerowe -1 oraz 3 . Oś symetrii paraboli, która jest wykresem funkcji f to jednocześnie symetralna odcinka, którego końcami są punkty $(-1, 0)$ i $(3, 0)$. Korzystając ze wzoru na współrzędne środka odcinka, stwierdzamy, że ta symetralna przechodzi przez punkt o współrzędnych $\left(\frac{-1+3}{2}, 0\right)$, więc jest to prosta o równaniu $x = 1$. Stąd $p = 1$ oraz $q = f(1) = -(1 + 1)(1 - 3) = 4$. Wierzchołkiem tej paraboli jest punkt $W = (1, 4)$.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DJrgQocTC>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Twierdzenie: Oś symetrii funkcji kwadratowej

Jeżeli funkcja kwadratowa

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

ma dwa miejsca zerowe x_1 i x_2 , to oś symetrii paraboli będącej wykresem funkcji f ma równanie

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Dowód

Jak zauważyliśmy, oś symetrii paraboli, która jest wykresem funkcji f , to jednocześnie symetralna odcinka o końcach w punktach $(x_1, 0)$ i $(x_2, 0)$. Korzystając ze wzoru na współrzędne środka odcinka, stwierdzamy, że ta symetralna przechodzi przez punkt o współrzędnych $(\frac{x_1 + x_2}{2}, 0)$. Dla dowodu wystarczy więc pokazać, że

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = p.$$

Ponieważ

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta} + (-b + \sqrt{\Delta})}{2a} = \frac{-b}{a},$$

więc

$$\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{-b}{2a} = p.$$

Przykład 4

Zamiana postaci ogólnej na kanoniczną.

Funkcja kwadratowa opisana jest wzorem

$$f(x) = 3x^2 + 12x + 10$$

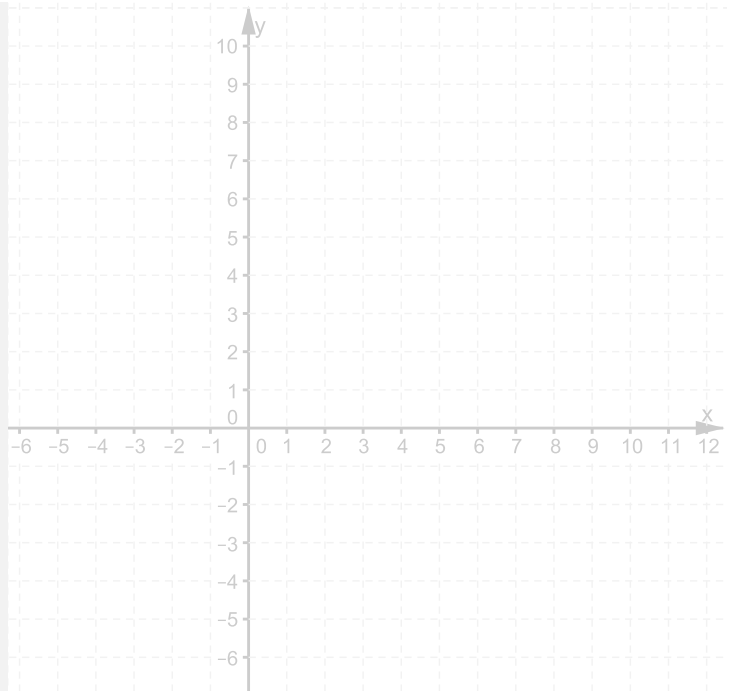
Postać kanoniczną tej funkcji to

☐ $f(x) = 3(x+2)^2 + 2$

☐ $f(x) = 3(x-2)^2 - 2$

☐ $f(x) = 3(x+2)^2 - 2$

☐ $f(x) = 3(x-2)^2 - 2$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DJrgQocTC>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 5

Wykresem funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = -3x^2 + bx + c$ jest parabola o wierzchołku $W = (2, 7)$. Wyznamy wartość współczynnika b i współczynnika c .

Rozwiązanie

- sposób I

Z treści zadania wynika, że funkcję f można zapisać w postaci kanonicznej

$$f(x) = -3(x-2)^2 + 7. \text{ Zatem}$$

$$f(x) = -3(x^2 - 4x + 4) + 7 = -3x^2 + 12x - 5,$$

czyli współczynniki mają wartości $b = 12$, $c = -5$.

- sposób II

Korzystając ze wzorów na współrzędne wierzchołka, otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} \frac{-b}{2a} = 2 \\ \frac{-\Delta}{4a} = 7. \end{cases}$$

Uwzględniając w drugim równaniu $\Delta = b^2 - 4ac$ oraz wstawiając $a = -3$, otrzymujemy

$$\begin{cases} \frac{-b}{2 \cdot (-3)} = 2 \\ \frac{-(b^2 - 4 \cdot (-3)c)}{4 \cdot (-3)} = 7 \end{cases}$$

stąd

$$\begin{cases} -b = -12 \\ -(b^2 + 12c) = -84 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 12 \\ 12^2 + 12c = 84 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 12 \\ 12c = 84 - 144 \end{cases}$$

Mamy zatem

$$\begin{cases} b = 12 \\ c = -5 \end{cases}$$

Przykład 6

Funkcja kwadratowa $f(x) = 2x^2 + bx + c$ ma dwa miejsca zerowe: $x_1 = -5$ i $x_2 = 4$. Wyznamy wartość współczynnika b i współczynnika c .

Rozwiązanie.

- sposób I

Z treści zadania wynika, że funkcję f można zapisać w postaci iloczynowej.

$$f(x) = 2(x + 5)(x - 4)$$

Zatem

$$f(x) = 2(x^2 + 5x - 4x - 20) = 2x^2 + 2x - 40.$$

Współczynniki mają wartości: $b = 2$, $c = -40$.

- sposób II

Ponieważ miejscami zerowymi funkcji f są $x_1 = -5$ i $x_2 = 4$, więc $f(-5) = 0$ oraz $f(4) = 0$. Aby wyznaczyć wartości współczynników, rozwiązujemy układ równań.

$$\begin{cases} 2 \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c = 0 \\ 2 \cdot (-5)^2 + b \cdot (-5) + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 32 + 4b + c = 0 \\ 50 - 5b + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4b + c = -32 \\ -5b + c = -50 \end{cases}$$

Otrzymany układ równań możemy rozwiązać dowolną metodą, np. podstawiania lub przeciwnych współczynników.

Wyberzmy metodę podstawiania

$$\begin{cases} c = -4b - 32 \\ -5b - 4b - 32 = -50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -4b - 32 \\ -9b - 32 = -50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -4b - 32 \\ -9b = -18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -4b - 32 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 2 \\ c = -4 \cdot 2 - 32 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 2 \\ c = -40 \end{cases}$$

Rozwiązanie układu

$$\begin{cases} 4b + c = -32 \\ -5b + c = -50 \end{cases}$$

metodą przeciwnych współczynników (lub każdą inną, prowadzącą do wyznaczenia wartości każdego ze współczynników) pozostawiamy jako osobne ćwiczenie.

- sposób III

Ponieważ miejscami zerowymi funkcji f są $x = -5$ oraz $x = 4$, więc osią symetrii wykresu funkcji f jest prosta $x = \frac{-5+4}{2}$, czyli $x = -\frac{1}{2}$. Możemy więc zapisać postać kanoniczną funkcji

$$f(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + q.$$

Wykorzystując jeszcze raz informację o miejscach zerowych, otrzymamy, że np. $f(4) = 0$, stąd

$$2 \cdot \left(4 + \frac{1}{2}\right)^2 + q = 0$$

$$q = -2 \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^2,$$

czyli

$$q = -\frac{81}{2}.$$

Wobec tego

$$f(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{81}{2} = 2\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - \frac{81}{2} = 2x^2 + 2x + \frac{1}{2} - \frac{81}{2} = 2x^2 + 2x - 40.$$

Zatem współczynniki mają wartości $b = 2$, $c = -40$.

Uwaga. Zapisując wzór funkcji f w postaci $f(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + q$ i wykorzystując informację o drugim miejscu zerowym funkcji f : $f(-5) = 0$, doprowadzimy do tej samej zależności, co otrzymana powyżej $q = -2 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right)^2 = -2 \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^2$. Fakt ten wynika stąd, że prosta $x = -\frac{1}{2}$ jest symetralną odcinka o końcach w punktach $(-5, 0)$ i $(4, 0)$.

Przykład 7

Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$ osiąga największą wartość równą 4 dla $x = -2$, a na jej wykresie leży punkt $A = (0, 0)$. Obliczymy wartości współczynników a , b i c .

Rozwiązanie

- sposób I

Z treści zadania wynika, że punkt $W = (-2, 4)$ jest wierzchołkiem paraboli będącej wykresem funkcji f . Wobec tego wzór funkcji f możemy zapisać w postaci

$f(x) = a(x + 2)^2 + 4$. Wiemy ponadto, że punkt A leży na wykresie funkcji f , zatem $f(0) = 0$. Łącząc oba uzyskane wnioski, otrzymujemy

$$f(0) = a(0 + 2)^2 + 4 = 0,$$

stąd $4a = -4$, czyli $a = -1$. Stąd wynika wzór funkcji f

$$f(x) = -1(x + 2)^2 + 4 = -(x^2 + 4x + 4) + 4 = -x^2 - 4x.$$

Współczynniki mają zatem wartości: $a = -1$, $b = -4$, $c = 0$.

- sposób II

Z treści zadania wynika, że jednym z miejsc zerowych funkcji f jest 0, a osią symetrii paraboli będącej wykresem funkcji f jest prosta o równaniu $x = -2$. Wynika stąd, że -4 jest drugim miejscem zerowym funkcji f . Zatem wzór funkcji f możemy zapisać w postaci $f(x) = ax(x + 4)$. Wiemy ponadto, że punkt $(-2, 4)$ leży na wykresie funkcji f , więc $f(-2) = 4$. Łącząc oba uzyskane wnioski, otrzymujemy

$$f(-2) = a(-2)(-2 + 4) = 4,$$

stąd $-4a = 4$, czyli $a = -1$. Wobec tego wzór funkcji f to

$$f(x) = -1x(x + 4) = -(x^2 + 4x) = -x^2 - 4x.$$

Współczynniki mają więc wartości: $a = -1$, $b = -4$, $c = 0$.

- sposób III

Z treści zadania odczytujemy, że punkt $f(x) = 0$ oraz punkt $W = (-2, 4)$ jest wierzchołkiem paraboli będącej wykresem funkcji f . Korzystając ze wzorów na współrzędne wierzchołka, otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 \\ \frac{-b}{2a} = -2 \\ \frac{-\Delta}{4a} = 4 \end{cases}$$

Przekształcamy ten układ, uwzględniając w drugim równaniu $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\begin{cases} c = 0 \\ -b = -4a \\ -(b^2 - 4ac) = 16a \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 0 \\ b = 4a \\ b^2 = -16a \end{cases}$$

Stąd wniosek, że $b^2 = (4a)^2 = -16a$, więc $16a^2 = -16a$, czyli $a^2 + a = 0$, stąd $a(a + 1) = 0$. Ponieważ funkcja f jest kwadratowa, więc $a \neq 0$. Zatem $a = -1$, stąd $b = 4 \cdot (-1) = -4$. Oznacza to, że $a = -1, b = -4, c = 0$.

Ćwiczenie 1

Ustal współrzędne wierzchołka W paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = -\frac{1}{4}(x - 5)(x + 7)$.

Ćwiczenie 2

Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej x sumę tej liczby i kwadratu liczby o 2 od niej większej. Ustal zbiór wartości tej funkcji i znajdź jej miejsca zerowe.

Ćwiczenie 3

Do wykresu funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + 5x + c$ należy punkt $A = (-3, 0)$. Wyznacz wartość współczynnika c .

Ćwiczenie 4

Prosta $x = -4$ jest osią symetrii paraboli będącej wykresem funkcji $f(x) = -x^2 + bx$. Wyznacz wartość współczynnika b .

Ćwiczenie 5

Zbiorem wartości funkcji kwadratowej $f(x) = 5x^2 - 10x + c$ jest $\langle -9, +\infty \rangle$. Ustal wartość współczynnika c .

Ćwiczenie 6

Funkcja kwadratowa f określona jest wzorem $f(x) = x^2 + bx + c$. Wyznacz wartości każdego ze współczynników b oraz c , wiedząc, że wykres funkcji f ma z osią Ox tylko jeden punkt wspólny $A = (-3, 0)$.

Ćwiczenie 7

Funkcja kwadratowa g określona jest wzorem $g(x) = -x^2 + bx + c$. Funkcja ta osiąga wartość największą równą 17 dla $x = -5$. Wyznacz wartości współczynników b i c .

Ćwiczenie 8

Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej $g(x) = -15x^2 + bx + c$ są $-\frac{2}{3}$ i $\frac{4}{5}$. Wyznacz wartość każdego ze współczynników b , c .

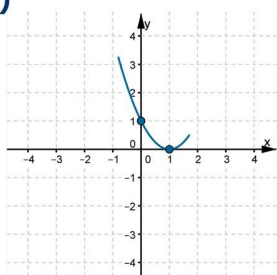
Ćwiczenie 9

Wykresem funkcji kwadratowej określonej wzorem $f(x) = -4x^2 + bx + c$ jest parabola o wierzchołku $W = \left(\frac{3}{2}, 8\right)$. Wyznacz wartość każdego ze współczynników b, c .

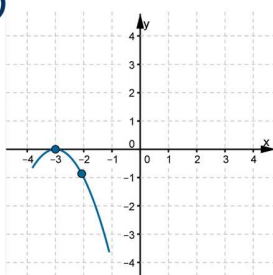
Ćwiczenie 10

W układzie współrzędnych narysowano część paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$. Wyznacz wartość każdego ze współczynników a, b i c .

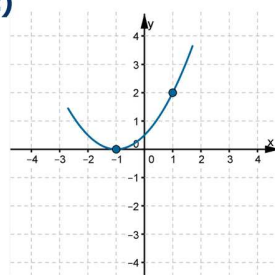
a)



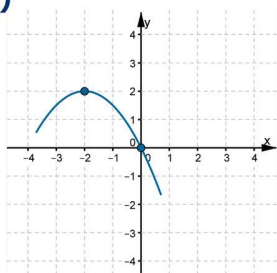
b)



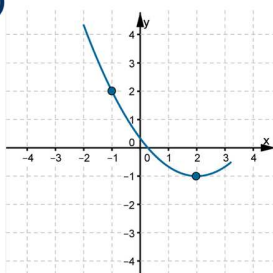
c)



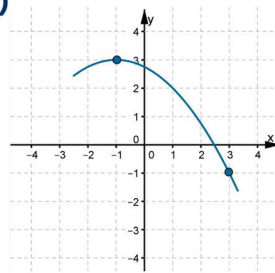
d)



e)

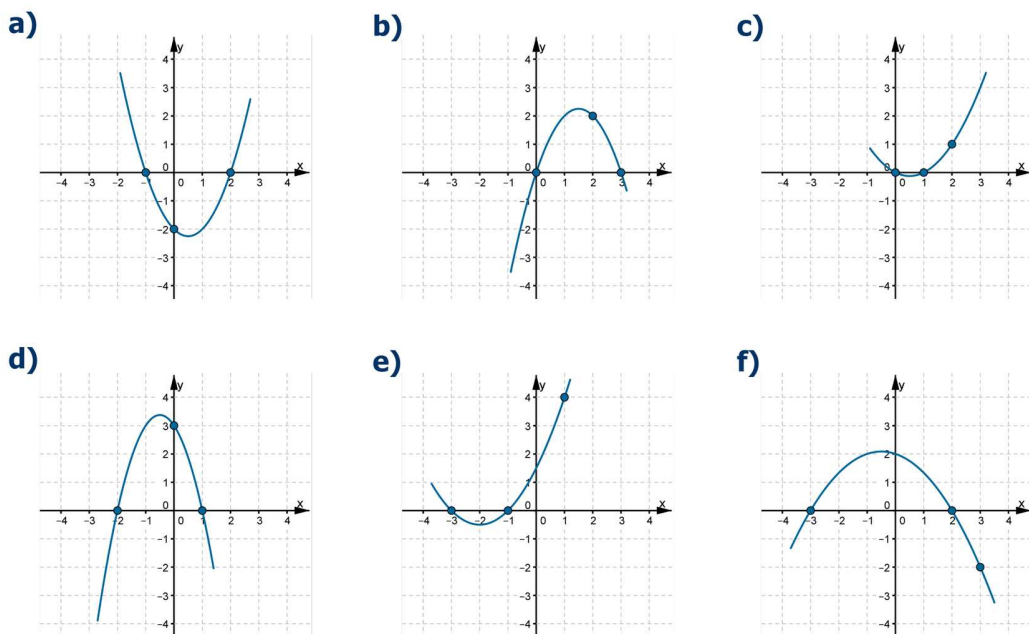


f)



Ćwiczenie 11

W układzie współrzędnych narysowano część paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej $g(x) = ax^2 + bx + c$. Ustal wartość każdego ze współczynników a , b i c .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12

Funkcja kwadratowa $g(x) = ax^2 + bx + c$ ma dwa miejsca zerowe $x_1 = -6$ oraz $x_2 = 10$. Najmniejszą wartością tej funkcji jest -16 . Ustal wartość każdego ze współczynników a , b i c .

Ćwiczenie 13

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ jest parabola o wierzchołku w punkcie $A = (1, 9)$. Jednym z punktów przecięcia tej paraboli z osią Ox jest punkt $B = (-\frac{1}{2}, 0)$. Wyznacz wartość każdego ze współczynników a , b i c .

Ćwiczenie 14

Funkcja kwadratowa $g(x) = ax^2 + bx + c$ osiąga najmniejszą wartość równą -5 dla $x = 3$, a jej wykres przecina oś Oy w punkcie $A = (0, -2)$. Oblicz wartość każdego ze współczynników a , b i c .

Ćwiczenie 15

Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$ ma dwa miejsca zerowe $x_1 = -\frac{2}{5}$ i $x_2 = 4$, a jej wykres ma dokładnie jeden punkt wspólny z prostą o równaniu $y = -121$. Wyznacz wartość każdego ze współczynników a , b i c .

Ćwiczenie 16

Wykresem funkcji kwadratowej $g(x) = ax^2 + bx + c$ jest parabola o wierzchołku w punkcie $A = (-3, 5)$, do której należy też punkt $B = (1, -27)$. Wyznacz wartość każdego ze współczynników a , b i c .

Ćwiczenie 17

Wykresem funkcji kwadratowej $g(x) = ax^2 + bx + c$ jest parabola, na której leżą punkty $A = (-1, 5)$ i $B = (2, -1)$. Oś symetrii tej paraboli jest prosta o równaniu $x = 1$. Wyznacz wartość każdego ze współczynników a , b i c .

Ćwiczenie 18

Funkcja kwadratowa f określona jest wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$. Maksymalnym przedziałem, w którym funkcja f maleje, jest $\langle -3, +\infty \rangle$. Parabola będąca wykresem funkcji f ma dokładnie jeden punkt wspólny z prostą o równaniu $y = 1$. Ponadto na wykresie tej funkcji leży punkt $P = (-1, -1)$. Ustal wartość każdego ze współczynników a , b i c .

Ćwiczenie 19

Punkty $A = (-3, 5)$ i $B = (-1, 1)$ leżą na paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$. Wykaż, że punkt $C = (1, -3)$ nie leży na tej paraboli.

Ćwiczenie 20

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ jest parabola, która ma dokładnie jeden punkt wspólny z osią Ox . Na tej paraboli leżą punkty $A = (1, -9)$ oraz punkt $B = (-3, -1)$. Wyznacz wartość każdego ze współczynników a , b i c . Rozpatrz wszystkie przypadki.

Ćwiczenie 21

Wyznacz wszystkie wartości b , dla których wierzchołek paraboli, będącej wykresem funkcji $f(x) = x^2 - 2bx + b + 25$ leży na prostej $y = x$.

Ćwiczenie 22

Wyznacz wszystkie wartości c , dla których miejscem zerowym funkcji f określonej wzorem $f(x) = x^2 - 2cx + c + 2$ jest liczba $x = c$.

Równanie kwadratowe

Przykład 1

W prostokącie o polu równym 56 jeden z boków jest o 10 dłuższy od drugiego. Obliczmy obwód tego prostokąta.

Rozwiązanie

Oznaczmy długość krótszego boku tego prostokąta przez x , gdzie $x > 0$. Wtedy drugi bok tego prostokąta ma długość $x + 10$, a pole tego prostokąta jest równe $x(x + 10)$. Wiadomo, że pole tego prostokąta jest równe 56. Otrzymujemy więc równanie

$$x(x + 10) = 56.$$

Przekształcamy to równanie równoważnie

$$x^2 + 10x = 56$$

$$x^2 + 10x - 56 = 0.$$

Szukamy zatem miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + 10x - 56$. Obliczamy wyróżnik tej funkcji $\Delta = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-56) = 324$. Wyróżnik jest dodatni, więc funkcja ta ma dwa miejsca zerowe

$$x_1 = \frac{-10 - \sqrt{324}}{2 \cdot 1} = \frac{-10 - 18}{2} = -14$$

oraz

$$x_2 = \frac{-10 + \sqrt{324}}{2 \cdot 1} = \frac{-10 + 18}{2} = 4.$$

Warunki zadania spełnia jedynie $x = 4$. Długość drugiego boku tego prostokąta jest równa $x + 10 = 14$, a obwód prostokąta jest równy $2 \cdot (4 + 14) = 36$.

Uwaga. Można od razu zauważyć, że $4 \cdot (4 + 10) = 56$, wobec tego liczba 4 jest rozwiązaniem równania $x(x + 10) = 56$. Jest to więc miejsce zerowe funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + 10x - 56$. Wzór tej funkcji można zapisać w postaci iloczynowej, gdzie jednym z czynników jest $x - 4$

$$f(x) = x^2 + 10x - 56 = x^2 - 4x + 14x - 56 = x(x - 4) + 14(x - 4) = (x - 4)(x + 14).$$

Przykład 2

W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 8, a jedna z przyprostokątnych jest o 2 krótsza od drugiej. Wykażemy, że pole tego trójkąta jest równe 15.

Rozwiązanie

Oznaczmy długość krótszej przyprostokątnej tego trójkąta przez x , gdzie $x > 0$. Wtedy

druga przyprostokątna ma długość $x + 2$. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, otrzymujemy równanie

$$x^2 + (x + 2)^2 = 8^2.$$

Przekształcamy to równanie równoważnie

$$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 64$$

$$2x^2 + 4x - 60 = 0$$

$$x^2 + 2x - 30 = 0.$$

Szukamy zatem dodatnich miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + 2x - 30$. Obliczamy wyróżnik tej funkcji $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30) = 124$. Ponieważ $\Delta > 0$, więc funkcja ta ma dwa miejsca zerowe

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{124}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 - 2\sqrt{31}}{2} = -1 - \sqrt{31}$$

$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{124}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 + 2\sqrt{31}}{2} = -1 + \sqrt{31}.$$

Warunki zadania spełnia jedynie $x = \sqrt{31} - 1$. Wobec tego przyprostokątne tego trójkąta mają długości $\sqrt{31} - 1$ oraz $\sqrt{31} + 1$, a jego pole jest równe

$$\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{31} - 1) \cdot (\sqrt{31} + 1) = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{31}^2 - 1^2) = \frac{1}{2} \cdot 30 = 15, \text{ co należało wykazać.}$$

Przykład 3

Wyznamy współrzędne punktów, w których prosta o równaniu $y = 2x + 9$ przecina parabolę o równaniu $y = x^2 + 1$.

Rozwiązanie

Ponieważ współrzędne szukanych punktów przecięcia spełniają każde z równań $y = 2x + 9$ oraz $y = x^2 + 1$, więc $x^2 + 1 = 2x + 9$, stąd $x^2 - 2x - 8 = 0$.

Szukamy zatem miejsc zerowych funkcji kwadratowej $y = x^2 - 2x - 8$. Obliczamy wyróżnik tej funkcji $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36$. Funkcja ta ma więc dwa miejsca zerowe

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{2 - 6}{2} = -2 \text{ oraz } x_2 = \frac{2 + \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{2 + 6}{2} = 4.$$

Gdy $x = -2$, to $y = 2(-2) + 9 = 5$, a gdy $x = 4$, to $y = 2 \cdot 4 + 9 = 17$. Wobec tego prosta o równaniu $y = 2x + 9$ przecina parabolę o równaniu $y = x^2 + 1$ w dwóch punktach: jeden ma współrzędne $(-2, 5)$, a drugi ma współrzędne $(4, 17)$.

Równanie kwadratowe. Liczba rozwiązań równania kwadratowego

W przykładach rozwiązanie zadania sprowadzało się do znalezienia rozwiązań równania z niewiadomą x , które przekształcaliśmy do postaci

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ gdzie } a \neq 0.$$

Każde równanie takiego typu nazywamy równaniem kwadratowym z niewiadomą x .

Ponieważ rozwiązania takiego równania to miejsca zerowe funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$, więc korzystając z omówionych wcześniej własności funkcji kwadratowej możemy podać algorytm, pozwalający ustalić istnienie i liczbę rozwiązań równania kwadratowego w zależności od wartości wyróżnika $\Delta = b^2 - 4ac$.

Twierdzenie: Liczba rozwiązań równania kwadratowego

Równanie kwadratowe

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- nie ma rozwiązań rzeczywistych wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta < 0$,
- ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste $x_0 = -\frac{b}{2a}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta = 0$,
- ma dwa (różne) rozwiązania rzeczywiste $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ oraz $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta > 0$.

Warto pamiętać, że przy rozwiązywaniu równań kwadratowych nie zawsze wskazane jest automatyczne stosowanie powyższych wzorów. Bardzo przydatne jest na przykład spostrzeżenie, że iloczyn jest równy zero wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jeden z czynników tego iloczynu jest równy zero.

Pokażemy na kilku przykładach, jak można rozwiązać równanie kwadratowe.

Przykład 4

Rozwiążemy równanie.

1. $(2x + 1)(5x - 3) = 0$

Można przekształcić to równanie do postaci $10x^2 - x - 3 = 0$ i wyznaczyć jego rozwiązania za pomocą wzorów, ale jest to zupełnie niepotrzebne. Wystarczy przecież zauważyć, że $(2x + 1)(5x - 3) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $2x + 1 = 0$ lub $5x - 3 = 0$, stąd $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = \frac{3}{5}$.

2. $x^2 + 16 = 0$

Zauważamy, że lewa strona równania jest sumą liczby nieujemnej x^2 oraz liczby 16, a więc jest dodatnia. Zatem równanie $x^2 + 16 = 0$ nie ma rozwiązań rzeczywistych.

3. $(4x + 7)^2 = 11^2$

Aby wyznaczyć wszystkie rozwiązania, przekształcimy równanie, korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów

$$(4x + 7)^2 = 11^2$$

$$(4x + 7)^2 - 11^2 = 0$$

$$(4x + 7 - 11)(4x + 7 + 11) = 0(4x - 4)(4x + 18) = 0 \text{ stąd } x = 1 \text{ lub } x = -\frac{9}{2}.$$

$$1. 6x^2 = 19x$$

$x(6x - 19) = 0$ Przekształcając to równanie do postaci $x(6x + 19) = 0$, stwierdzamy, że ma ono dwa rozwiązania 0 i $-\frac{19}{6}$.

Przykład 5

Rozwiążemy równanie

$$x^2 + 10x - 11 = 0$$

- sposób I

Obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego zapisanego po lewej stronie równania:

$\Delta = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-11) = 144$. Ponieważ $\Delta > 0$, więc równanie ma dwa rozwiązania

$$x_1 = \frac{-10 - \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = -11 \text{ oraz } x_2 = \frac{-10 + \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = 1.$$

- sposób II

Można zauważyć, że 1 jest rozwiązaniem danego równania, gdyż $1^2 + 10 \cdot 1 - 11 = 0$.

Zatem trójmian $x^2 + 10x - 11$ możemy zapisać w postaci iloczynowej, gdzie jednym z czynników jest $x - 1$:

$$x^2 + 10x - 11 = x^2 - x + 11x - 11 = x(x - 1) + 11(x - 1) = (x - 1)(x + 11).$$

Wobec tego równanie ma dwa rozwiązania $x_1 = 1$ oraz $x_2 = -11$.

Przykład 6

Rozwiążemy równanie

$$2x^2 + 9x + 7 = 0$$

- sposób I

Obliczamy wyróżnik trójmianu $2x^2 + 9x + 7$

$$\Delta = 9^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = 25.$$

Ponieważ $\Delta > 0$, więc równanie ma dwa rozwiązania

$$x_1 = \frac{-9 - \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = -\frac{7}{2} \text{ oraz } x_2 = \frac{-9 + \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = -1.$$

- sposób II

Zauważmy, że -1 jest rozwiązaniem równania $2 \cdot (-1)^2 + 9 \cdot (-1) + 7 = 2 - 9 + 7 = 0$.

Wobec tego trójmian $2x^2 + 9x + 7$ można zapisać w postaci iloczynowej, gdzie jednym z czynników jest $x + 1$

$$2x^2 + 9x + 7 = 2x^2 + 2x + 7x + 7 = 2x(x + 1) + 7(x + 1) = (2x + 7)(x + 1).$$

Zatem równanie ma dwa rozwiązania $x_1 = -1$ oraz $x_2 = -\frac{7}{2}$.

Przykład 7

Rozwiążemy równanie

$$3x^2 + 4x + 5 = 345$$

- sposób I

Przekształcamy równanie do postaci $3x^2 + 4x - 340 = 0$. Następnie obliczamy wyróżnik trójmianu $3x^2 + 4x - 340$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-340) = 4096.$$

Ponieważ $\Delta > 0$, więc równanie ma dwa rozwiązania

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{4096}}{2 \cdot 3} = -\frac{34}{3} \text{ oraz } x_2 = \frac{-4 + \sqrt{4096}}{2 \cdot 3} = 10.$$

- sposób II

Zauważamy, że 10 jest rozwiązaniem równania $3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5 = 345$. Zatem trójmian $3x^2 + 4x - 340$ można zapisać w postaci iloczynowej, gdzie jednym z czynników jest $x - 10$

$$3x^2 + 4x - 340 = 3x^2 - 30x + 34x - 340 = 3x(x - 10) + 34(x - 10) = (3x + 34)(x - 10)$$

Oznacza to, że równanie ma dwa rozwiązania $x_1 = 10$ oraz $x_2 = -\frac{34}{3}$.

Przykład 8

Rozwiążemy równanie

$$25x^2 - 90x + 81 = 0$$

- sposób I

Obliczamy wyróżnik trójmianu $25x^2 - 90x + 81$

$$\Delta = (-90)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 81 = 0$$

Ponieważ $\Delta = 0$, więc równanie ma jedno rozwiązanie

$$x_0 = \frac{90}{2 \cdot 25} = \frac{9}{5}$$

- sposób II

Zauważmy, że trójmian $25x^2 - 90x + 81$ można przekształcić do postaci $(5x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 9 + 9^2 = (5x - 9)^2$. Zatem równanie ma jedno rozwiązanie $x_0 = \frac{9}{5}$.

Przykład 9

Wykażemy, że równanie $3x^2 - 4x + 2 = 0$ nie ma rozwiązań rzeczywistych.

Obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego $3x^2 - 4x + 2$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 16 - 24 = -8 < 0.$$

Oznacza to, że równanie $3x^2 - 4x + 2 = 0$ nie ma rozwiązań rzeczywistych.

Przykład 10

Uzasadnimy, że żadna liczba całkowita nie jest rozwiązaniem równania $2x^2 + 3x - 4 = 0$.
Obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego $2x^2 + 3x - 4$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 41.$$

Rozwiązaniami danego równania są więc

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{41}}{4} \text{ oraz } x_2 = \frac{-3+\sqrt{41}}{4}.$$

Ponieważ $\sqrt{41}$ nie jest liczbą wymierną, więc żadna z liczb x_1, x_2 nie jest liczbą wymierną.

Wobec tego żadna liczba całkowita nie jest rozwiązaniem równania $2x^2 + 3x - 4 = 0$.

Uwaga. Ponieważ liczba $\sqrt{41}$ jest niewymierna, więc każdy z pierwiastków danego równania jest liczbą niewymierną.

Przykład 11

Ustalimy liczbę rozwiązań równania $x^2 - 2x + c = 0$ w zależności od wartości współczynnika c .

Wyróżnik trójmianu $x^2 - 2x + c$ jest równy $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 4 - 4c$. Zatem dane równanie:

- ma dwa różne rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy $4 - 4c > 0$, czyli dla $c < 1$,
- ma jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $4 - 4c = 0$, czyli dla $c = 1$,
- nie ma rozwiązań rzeczywistych wtedy i tylko wtedy, gdy $4 - 4c < 0$, czyli dla $c > 1$.

Uwaga. Można też równanie przekształcić następująco

$$x^2 - 2x = -c$$

$$x^2 - 2x + 1 = -c + 1$$

$$(x - 1)^2 = 1 - c.$$

Wystarczy teraz zauważyć, że lewa strona otrzymanego równania jest nieujemna, zatem równanie nie ma rozwiązań, gdy $1 - c < 0$, czyli gdy $c > 1$.

Jeśli natomiast $c = 1$, to otrzymujemy równanie $(x - 1)^2 = 0$, które ma jedno rozwiązanie, $x = 1$.

Pozostaje wyznaczyć rozwiązania równania, gdy $c < 1$. Wtedy jego lewa strona jest dodatnia, więc równanie można zapisać w postaci

$$(x - 1)^2 = \left(\sqrt{1 - c}\right)^2$$

stąd

$$(x - 1)^2 - \left(\sqrt{1 - c}\right)^2 = 0$$

$$(x - 1 - \sqrt{1 - c})(x - 1 + \sqrt{1 - c}) = 0.$$

Zatem, gdy $c < 1$, równanie ma dwa rozwiązania $x_1 = 1 + \sqrt{1 - c}$ oraz $x_2 = 1 - \sqrt{1 - c}$.

Ćwiczenie 1

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐ Równanie $x(x - 1) = 0$ ma dwa rozwiązania rzeczywiste.

☐ Równanie $(x - 2)(x + 3) = 0$ ma dwa rozwiązania 2 oraz -3 .

☐ Oba rozwiązania równania $(2x + 1)(3x + 7) = 0$ są liczbami dodatnimi.

☐ Żadna liczba całkowita nie jest rozwiązaniem równania $(3x + 5)(4 - 2x) = 0$.

Ćwiczenie 2

Liczby x_1 i x_2 są rozwiązaniami równania $-3(x + 2)(x - 7) = 0$. Wówczas

☐ $x_1 + x_2 = -5$

☐ $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{5}{14}$

☐ $x_1 x_2 = -14$

☐ $x_1^2 + x_2^2 = 62$

Ćwiczenie 3

Liczby x_1 i x_2 są rozwiązaniami równania $(2x + 5)(x - 1) = (2x + 5)(3 - x)$ i $x_1 < x_2$. Wówczas

☐ $x_2 = 5$

☐ $x_1 = -3$

☐ $x_2 = 2$

☐ $2x_1 + 3x_2 = 1$

Ćwiczenie 4

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐ Równanie $2x^2 = 16x - 32$ nie ma rozwiązań rzeczywistych.

☐ Równanie $(3x - 1)^2 = 1$ ma tylko jedno rozwiązanie rzeczywiste.

☐ Równanie $(2x + 5)^2 + 3 = 0$ nie ma rozwiązań rzeczywistych.

☐ Równanie $4x^2 = x$ ma dwa rozwiązania rzeczywiste.

Ćwiczenie 5

Liczby x_1 i x_2 są rozwiązaniami równania $x^2 - 8x + 5 = 0$ i $x_1 < x_2$. Wówczas

☐ $x_1 x_2 = 5$

☐ $x_1 < 0$

☐ $x_2 > 7$

☐ $x_1 + x_2 = 8$

Ćwiczenie 6

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐ Jednym z rozwiązań równania $2x^2 - x - 10 = 0$ jest liczba całkowita.

☐ Jedno z rozwiązań równania $x^2 + 2x - 5 = 0$ należy do przedziału $(-4, -3)$.

☐ Każde z rozwiązań równania $6x^2 - 5x + 1 = 0$ należy do przedziału $(0, 1)$.

☐ Żadna liczba ujemna nie jest rozwiązaniem równania $x^2 - 4x - 1 = 0$.

Ćwiczenie 7

Więszą z dwóch liczb spełniających równanie $-2(x + 1)(x + 4) = 0$ jest

☐ 4

☐ -1

☐ 1

☐ 2

Ćwiczenie 8

Liczby x_1 oraz x_2 są rozwiązaniami równania $4(x - 2)(x + 5) = 0$. Suma $x_1 + x_2$ jest równa

☐ -12

☐ 7

☐ 3

☐ -3

Ćwiczenie 9

Równanie $-(x + 3)^2 = (-2)^2$

☐ ma dwa rozwiązania

☐ nie ma rozwiązań

☐ ma cztery rozwiązania

☐ ma jedno rozwiązanie

Ćwiczenie 10

Rozwiązaniami równania $(x - 5)(2x + 9) = x(5 - x)$ są liczby

☐ 5 oraz -3

☐ 0 oraz 5

☐ 0 oraz $-\frac{9}{2}$

☐ 5 oraz $-\frac{9}{2}$

Ćwiczenie 11

Liczby x_1 oraz x_2 są różnymi rozwiązaniami równania $x^2 + 10x - 24 = 0$. Suma $x_1^2 + x_2^2$ jest równa

☐ 196

☐ 576

☐ 148

☐ 100

Ćwiczenie 12

Wskaż równanie, które nie ma rozwiązań rzeczywistych.

☐ $x^2 - 2x + 5 = 0$

☐ $x^2 + 5x + 2 = 0$

☐ $-5x^2 - 2 = 0$

☐ $x^2 - 2x - 5 = 0$

Ćwiczenie 13

Liczby x_1 oraz x_2 są rozwiązaniami równania $5x^2 + 4x - 1 = 0$ i $x_1 < x_2$. Oblicz $3x_1 + 10x_2$.

☐ -1

☐ 7

☐ -5

☐ 4

Ćwiczenie 14

Liczby x_1 oraz x_2 są różnymi rozwiązaniami równania $10x^2 + 3x - 1 = 0$. Suma $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ jest równa

☐ 3

☐ $\frac{1}{10}$

☐ -1

☐ $-\frac{10}{3}$

Ćwiczenie 15

Rozwiąż równanie.

1. $(x + 5)(x - 6) = 0$

2. $(2x - 3)(3x + 7) = 0$

3. $(4x - 1)(2 - x) = 0$

4. $(8 - 2x)(9x + 11) = 0$

Ćwiczenie 16

Rozwiąż równanie.

1. $3x^2 - 108 = 0$

2. $x^2 + 2 = 0$

3. $-4x^2 + 49 = 0$

4. $-2x^2 - 50 = 0$

Ćwiczenie 17

Rozwiąż równanie.

1. $x^2 - 4x + 4 = 0$

2. $x^2 - 4x = 0$

3. $9x^2 + 12x + 4 = 0$

4. $12x - 9x^2 = 0$

Ćwiczenie 18

Rozwiąż równanie.

1. $x^2 + 2x - 35 = 0$

2. $x^2 + 6x + 11 = 0$

3. $4x^2 - 11x - 15 = 0$

4. $3x^2 + 5x - 28 = 0$

Ćwiczenie 19

Rozwiąż równanie.

1. $x^2 + 4x + 7 = 0$

2. $x^2 - 6x + 1 = 0$

3. $x^2 - 8x + 9 = 0$

4. $x^2 + 2\sqrt{5}x + 3 = 0$

Ćwiczenie 20

Rozwiąż równanie.

1. $2x^2 + 15x = 17$

2. $3x^2 + 7x = 370$

3. $(x - 5)^2 = 3x - 15$

4. $(2x - 7)^2 = 28 - 8x$

Ćwiczenie 21

Kwadrat liczby x jest 8 razy większy od liczby $x - 2$. Oblicz x .

Ćwiczenie 22

Jeżeli dodatnią liczbę x pomnożymy przez liczbę o 5 większą od połowy liczby x , to w wyniku otrzymamy 168. Jaka to liczba?

Ćwiczenie 23

Dwie ujemne liczby całkowite różnią się o 5, a suma ich kwadratów jest równa 193. Znajdź te liczby.

Ćwiczenie 24

Suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych dodatnich jest równa 245. Znajdź te liczby.

Ćwiczenie 25

Wyznacz współrzędne punktów wspólnych prostej o równaniu $y = x + 2$ oraz paraboli o równaniu $y = 2x^2 + x$.

Ćwiczenie 26

Wyznacz wszystkie punkty wspólne wykresów funkcji $f(x) = x^2 - 3x$ oraz $g(x) = 2x^2 - 4$.

Ćwiczenie 27

W prostokącie A jeden z boków jest dwa razy dłuższy od drugiego. Gdyby skrócić krótszy bok tego prostokąta o 1 i jednocześnie przedłużyć dłuższy bok o 2, to otrzymalibyśmy prostokąt B o polu równym 16. Wyznacz wymiary prostokąta A .

Ćwiczenie 28

W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 17, a jedna z przyprostokątnych jest o 7 dłuższa od drugiej. Oblicz długości przyprostokątnych tego trójkąta.

Ćwiczenie 29

Każdy z dwóch prostokątów ma przekątną długości 25. Krótszy bok pierwszego prostokąta jest o 8 dłuższy od krótszego boku drugiego prostokąta, a dłuższy bok pierwszego prostokąta jest o 4 krótszy od dłuższego boku drugiego prostokąta. Oblicz wymiary każdego z tych prostokątów.

Ćwiczenie 30

Wyznacz wszystkie wartości b , dla których liczba b jest rozwiązaniem równania $x^2 - (b + 2)x + 10 = 0$. Dla otrzymanej wartości b wyznacz wszystkie rozwiązania tego równania.

Ćwiczenie 31

Wyznacz wszystkie wartości c , dla których liczba c jest rozwiązaniem równania $x^2 - 10x + 3c = 0$. Dla otrzymanej wartości c wyznacz wszystkie rozwiązania tego równania.

Ćwiczenie 32

Wyznacz wszystkie dodatnie wartości b , dla których równanie $x^2 + 2bx + b = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Dla otrzymanej wartości b wyznacz to rozwiązanie.

Ćwiczenie 33

Wykaż, że dla każdej wartości m równanie $x^2 - (m + 3)x + 2(m + 1) = 0$ ma co najmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste.

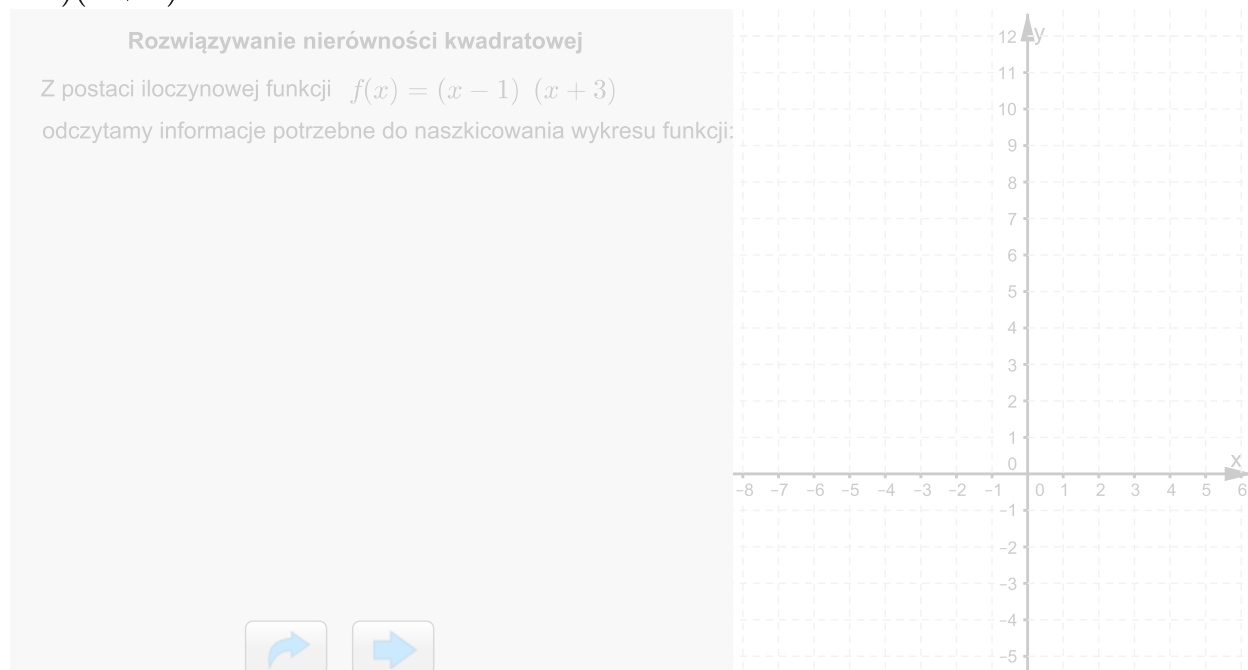
Ćwiczenie 34

Wykaż, że dla każdej dodatniej wartości całkowitej k równanie $x^2 - 7kx + 10k^2 = 0$ ma dwa różne rozwiązania całkowite.

Nierówność kwadratowa

Przykład 1

Na podstawie wykresu funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = (x - 1)(x + 3)$ ustalimy zbiór rozwiązań nierówności $(x - 1)(x + 3) > 0$ oraz nierówności $(x - 1)(x + 3) < 0$.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Drq36iDPl>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

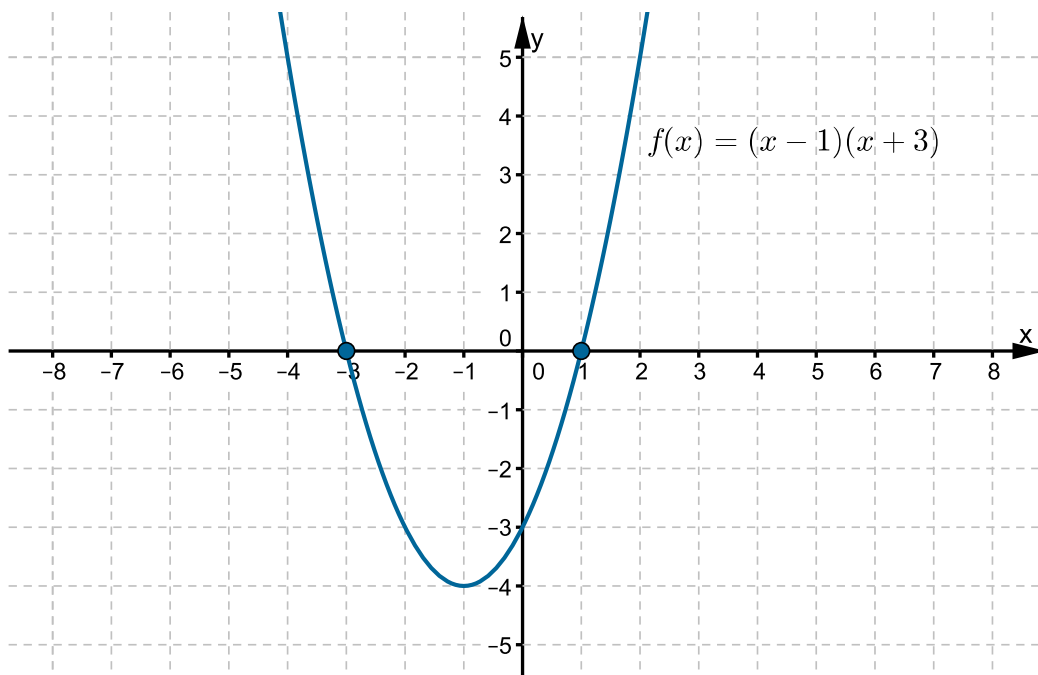
Z postaci iloczynowej wzoru funkcji f

$$f(x) = 1 \cdot (x - 1)(x + 3)$$

bezpośrednio odczytujemy:

- współczynnik a : $a = 1$. Jest on dodatni, więc parabola będąca wykresem funkcji f ma ramiona skierowane do góry,
- miejsca zerowe funkcji f : 1 oraz -3 . Oznacza to, że wykres funkcji f przecina oś Ox w dwóch punktach o współrzędnych $(1, 0)$ oraz $(-3, 0)$.

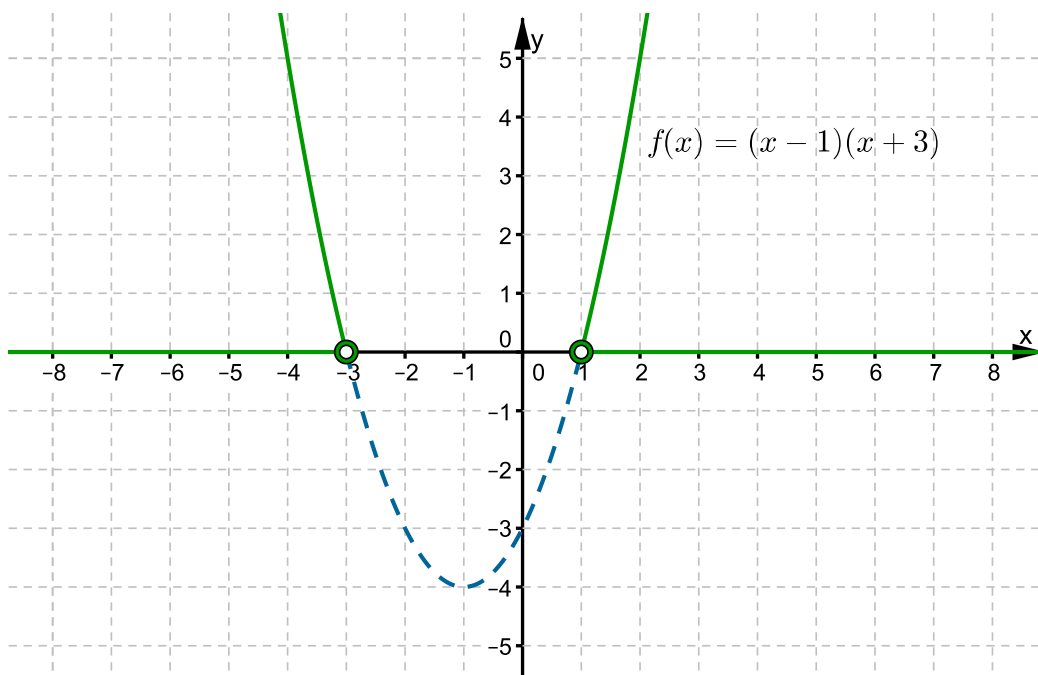
Korzystając z powyższych spostrzeżeń, szkicujemy wykres funkcji f .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ustalimy zbiór rozwiązań nierówności $(x - 1)(x + 3) > 0$.

Z otrzymanego wykresu odczytujemy, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości dodatnie.

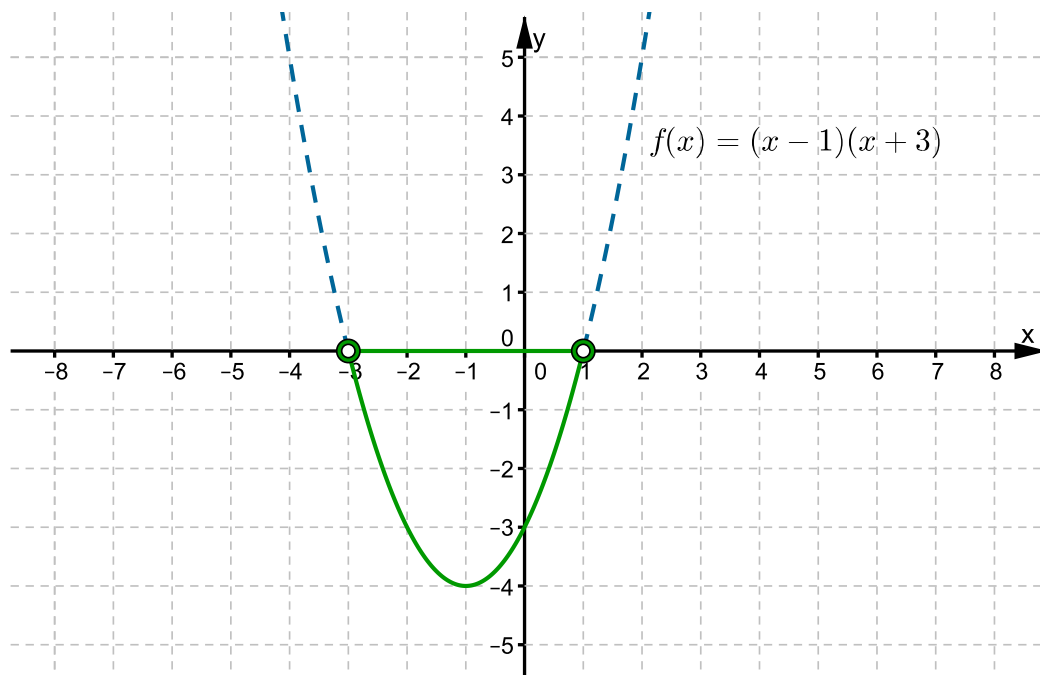


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zatem $(x - 1)(x + 3) > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.

Ustalimy zbiór rozwiązań nierówności $(x - 1)(x + 3) < 0$.

Z wykresu funkcji f odczytujemy, dla jakich argumentów ta funkcja przyjmuje wartości ujemne.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wobec tego $(x - 1)(x + 3) < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-3, 1)$.

Przykład 2

Wypiszemy wszystkie liczby całkowite, które spełniają nierówność $(2x + 5)(4 - x) > 0$.

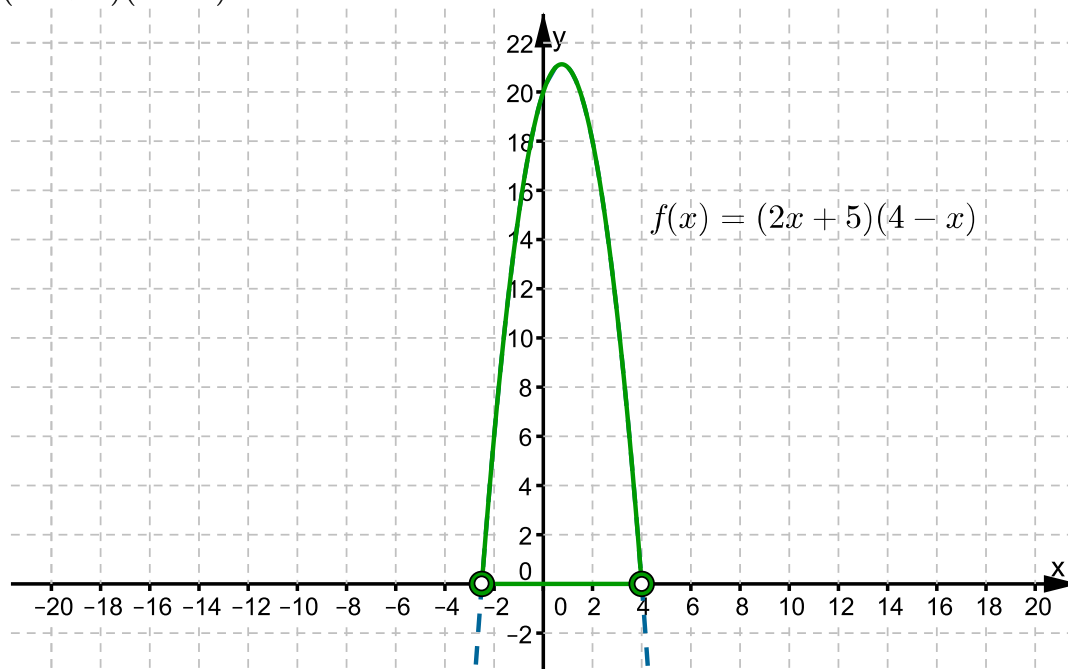
Rozpatrzmy w tym celu funkcję kwadratową określoną wzorem $f(x) = (2x + 5)(4 - x)$.

Po zapisaniu wzoru tej funkcji w postaci iloczynowej $f(x) = -2(x + \frac{5}{2})(x - 4)$ stwierdzamy, że

funkcja ta ma dwa miejsca zerowe $-\frac{5}{2}$ oraz 4,

$a = -2 < 0$, zatem wykresem tej funkcji jest parabola skierowana ramionami do dołu.

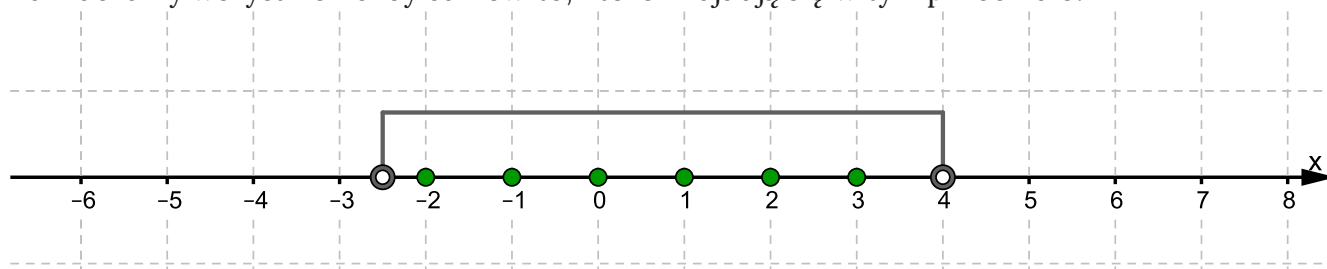
Szkicujemy wykres funkcji $f(x) = (2x + 5)(4 - x)$ i zaznaczamy na nim argumenty, dla których $(2x + 5)(4 - x) > 0$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zbiorem rozwiązań nierówności $(2x + 5)(4 - x) > 0$ jest więc przedział $(-2\frac{1}{2}, 4)$.

Zaznaczamy wszystkie liczby całkowite, które znajdują się w tym przedziale.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ostatecznie stwierdzamy, że liczbami całkowitymi, które spełniają nierówność

$(2x + 5)(4 - x) > 0$, są: $-2, -1, 0, 1, 2, 3$.

Przykład 3

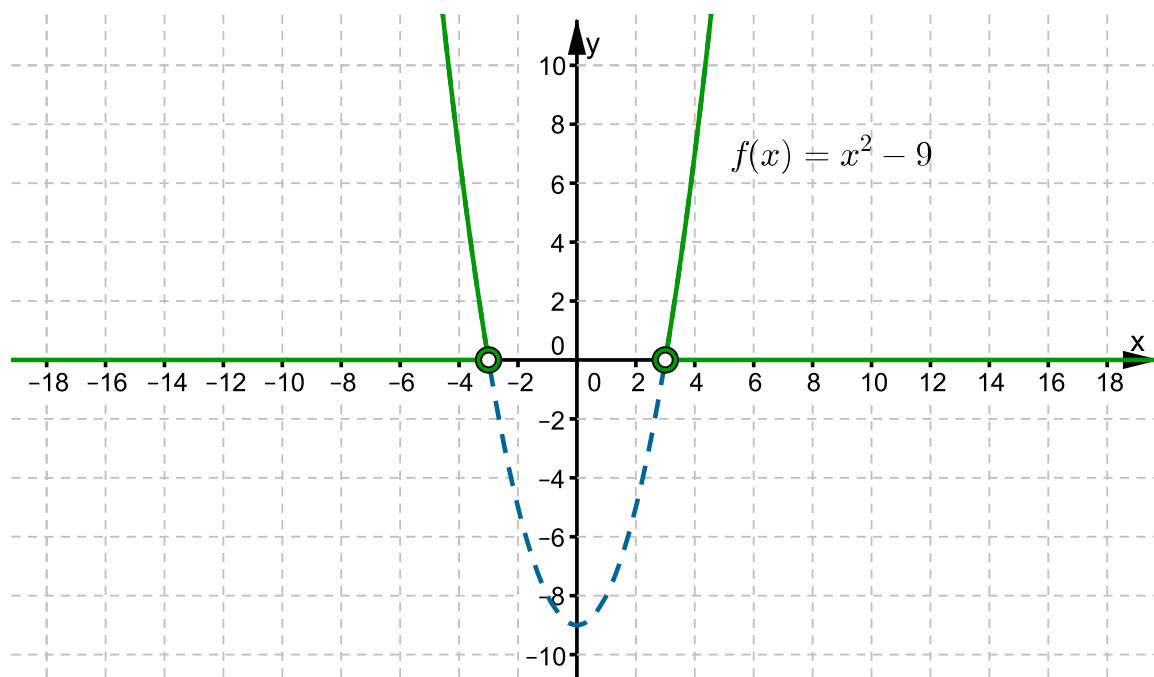
Rozwiążemy nierówność

1. $x^2 - 9 > 0$

Wykresem funkcji kwadratowej określonej wzorem $f(x) = x^2 - 9$ jest parabola skierowana ramionami do góry, co stwierdzamy, odczytując ze wzoru tej funkcji wartość współczynnika a ($a = 1 > 0$).

Wzór tej funkcji przekształcamy do postaci $f(x) = (x - 3)(x + 3)$. Funkcja ma zatem dwa miejsca zerowe -3 oraz 3 .

Szkicujemy wykres tej funkcji i odczytujemy wszystkie argumenty, dla których przyjmuje ona wartości dodatnie.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Odpowiedź: $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.

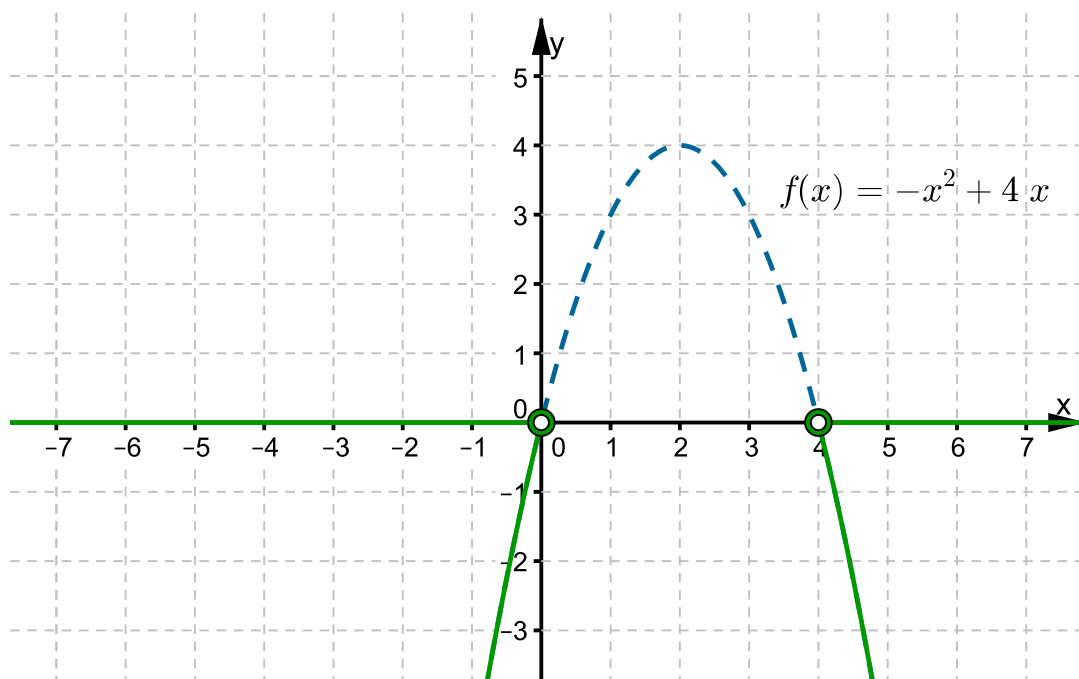
2. $-x^2 + 4x < 0$

- sposób I

Rozpatrzmy funkcję kwadratową określoną wzorem $f(x) = -x^2 + 4x$. Odczytujemy wartość współczynnika $a : a = -1 < 0$. Wykresem tej funkcji jest parabola, której ramiona skierowane są w dół.

Wzór tej funkcji sprowadzamy do postaci iloczynowej $f(x) = -x(x - 4)$ i stwierdzamy, że funkcja ta ma dwa miejsca zerowe 0 oraz 4.

Sporządzamy szkic wykresu funkcji $f(x) = -x^2 + 4x$ i na jego podstawie wyznaczamy zbiór rozwiązań nierówności $-x^2 + 4x < 0$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Odpowiedź: $x \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$.

- sposób II

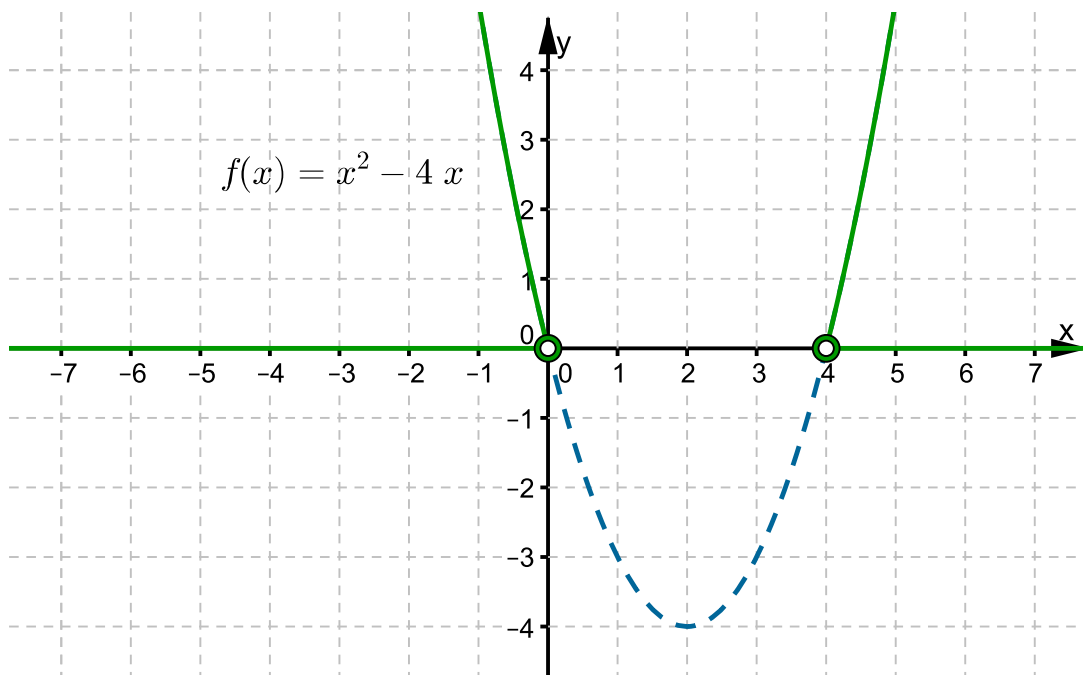
Przekształcamy daną nierówność. Po pomnożeniu obustronnie przez -1 otrzymujemy równoważnie

$x^2 - 4x > 0$ Rozpatrzmy funkcję kwadratową określoną wzorem $f(x) = x^2 - 4x$.

Odczytujemy: $a = 1 > 0$, zatem wykresem tej funkcji jest parabola, której ramiona skierowane są do góry.

Po zapisaniu wzoru tej funkcji w postaci iloczynowej $f(x) = x(x - 4)$ stwierdzamy, że funkcja ta ma dwa miejsca zerowe: 0 oraz 4.

Sporządzamy szkic wykresu funkcji $f(x) = x^2 - 4x$ i na jego podstawie wyznaczamy zbiór tych liczb rzeczywistych x , dla których $x^2 - 4x > 0$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

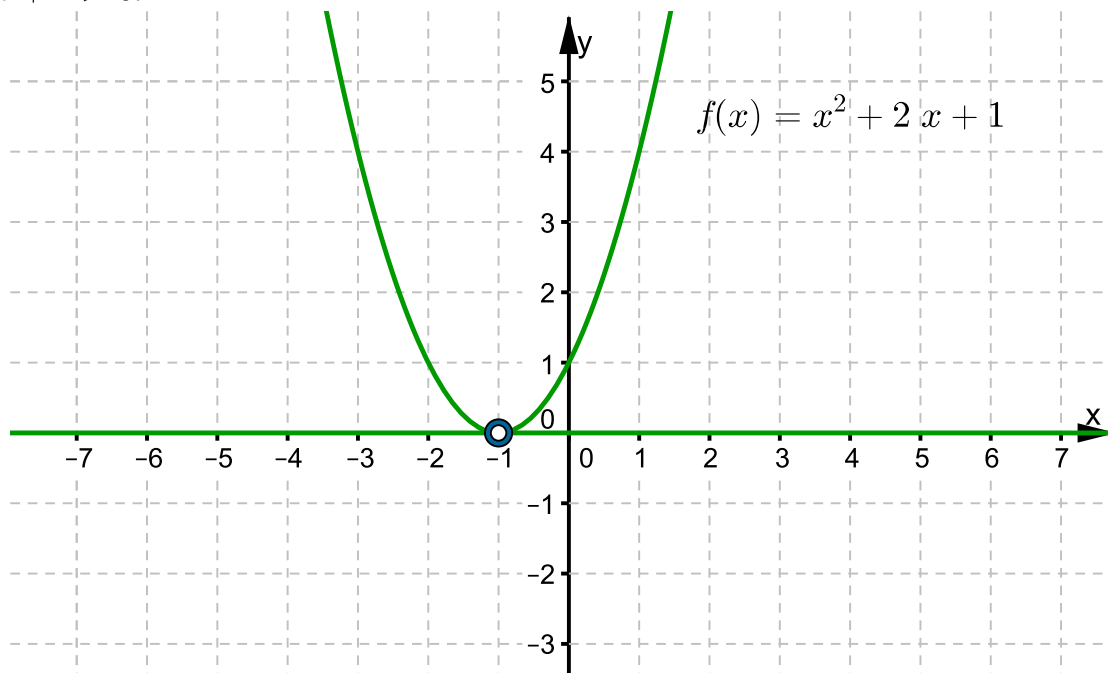
Odpowiedź: $x \in (0, 4)$.

Przykład 4

Rozwiążemy nierówność $x^2 + 2x + 1 > 0$.

Rozpatrzmy funkcję kwadratową określoną wzorem $f(x) = x^2 + 2x + 1$. Przekształcamy ten wzór do postaci $f(x) = (x + 1)^2$. Ponieważ: $a = 1 > 0$ oraz funkcja ma jedno miejsce zerowe: -1 , więc wykresem tej funkcji jest parabola skierowana ramionami do góry.

Szkicujemy wykres funkcji $f(x) = x^2 + 2x + 1$ i zaznaczamy argumenty, dla których $x^2 + 2x + 1 > 0$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Odpowiedź: $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

1. $x^2 + 3 < 0$

Ponieważ $x^2 \geq 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x , więc $x^2 + 3 > 0$ dla każdego rzeczywistego x . Zatem żadna liczba rzeczywista nie spełnia nierówności $x^2 + 3 < 0$.

Odpowiedź: Nierówność $x^2 + 3 < 0$ jest sprzeczna.

2. $-x^2 - 1 < 0$

Przekształcamy daną nierówność. Po pomnożeniu obu stron przez -1 otrzymujemy równoważnie $x^2 + 1 > 0$. Ponieważ suma liczby nieujemnej x^2 oraz liczby dodatniej 1 jest liczbą dodatnią, więc każda liczba rzeczywista x spełnia nierówność $x^2 + 1 > 0$.

Odpowiedź: Nierówność $-x^2 - 1 < 0$ jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą.

Przykład 5

Rozwiążemy nierówność $x^2 - 12x + 11 \leq 0$.

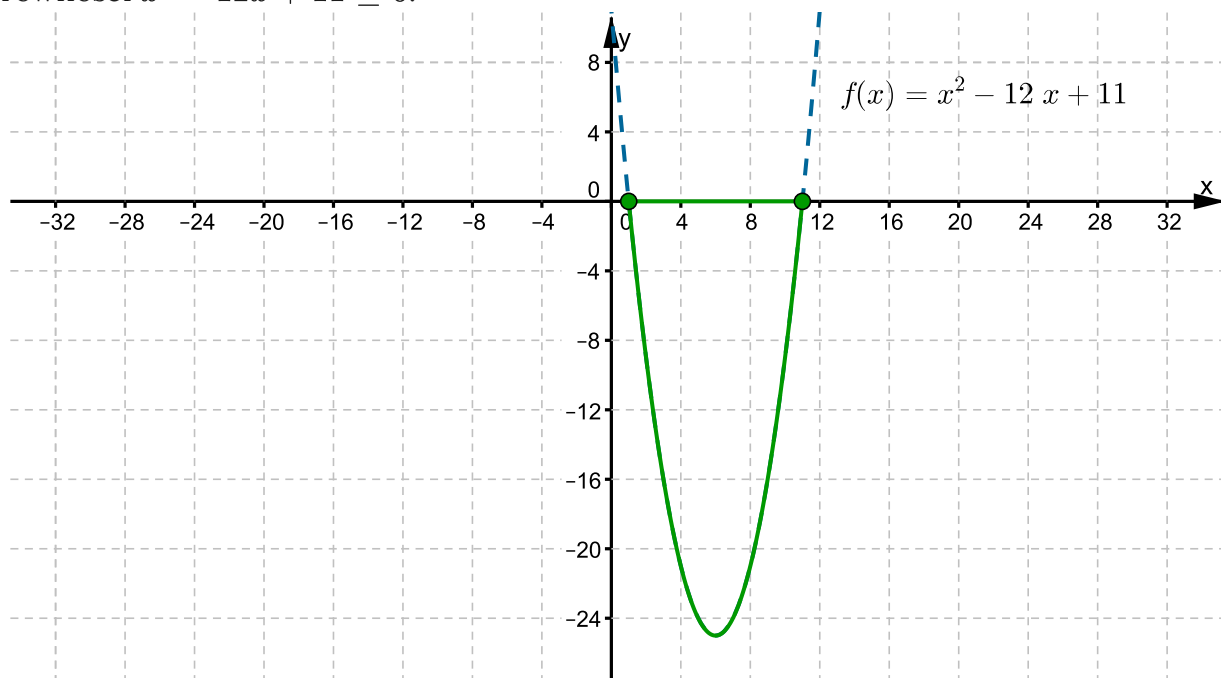
Rozpatrzmy funkcję kwadratową określoną wzorem $f(x) = x^2 - 12x + 11$. Odczytujemy: $a = 1 > 0$, zatem wykresem tej funkcji jest parabola, której ramiona skierowane są do góry.

Obliczamy wyróżnik funkcji $f(x) = x^2 - 12x + 11$:

$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11 = 100 > 0$ Wobec tego funkcja $f(x) = x^2 - 12x + 11$ ma dwa miejsca zerowe

$$x_1 = \frac{12 - \sqrt{100}}{2} = 1 \text{ oraz } x_2 = \frac{12 + \sqrt{100}}{2} = 11.$$

Sporządzamy szkic wykresu tej funkcji i na jego podstawie ustalamy zbiór rozwiązań nierówności $x^2 - 12x + 11 \leq 0$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Odpowiedź: $x \in \langle 1, 11 \rangle$.

Przykład 6

Rozwiążemy nierówność $2x^2 + 7x - 4 > 0$.

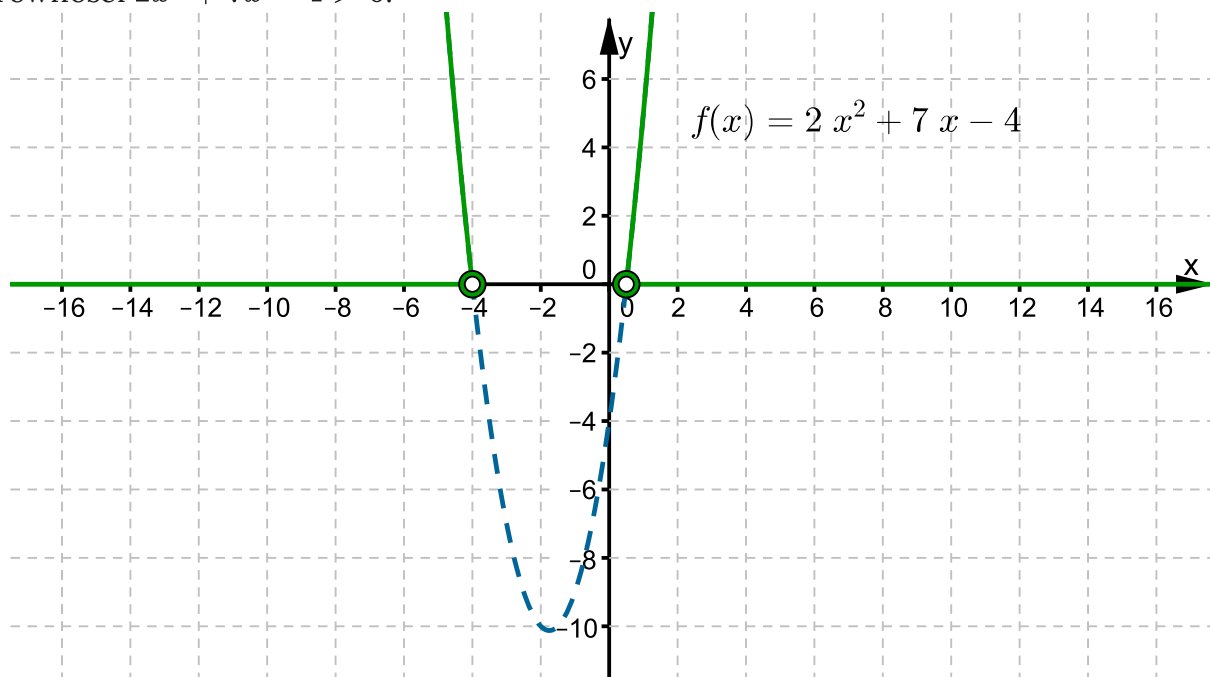
Ze wzoru funkcji $f(x) = 2x^2 + 7x - 4$ odczytujemy wartość współczynnika a : $a = 2 > 0$.

Wobec tego wykresem tej funkcji jest parabola, której ramiona skierowane są do góry.

Obliczamy wyróżnik: $\Delta = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 81 > 0$, zatem funkcja $f(x) = 2x^2 + 7x - 4$ ma dwa miejsca zerowe

$$x_1 = \frac{-7-\sqrt{81}}{2 \cdot 2} = -4 \text{ oraz } x_2 = \frac{-7+\sqrt{81}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

Sporządzamy szkic wykresu tej funkcji i na jego podstawie ustalamy zbiór rozwiązań nierówności $2x^2 + 7x - 4 > 0$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Odpowiedź: $x \in (-\infty, -4) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$.

Przykład 7

Rozwiążemy nierówność $-x^2 + 3x + 10 \geq 0$.

Przekształcamy daną nierówność. Po pomnożeniu obustronnie przez -1 otrzymujemy równoważnie

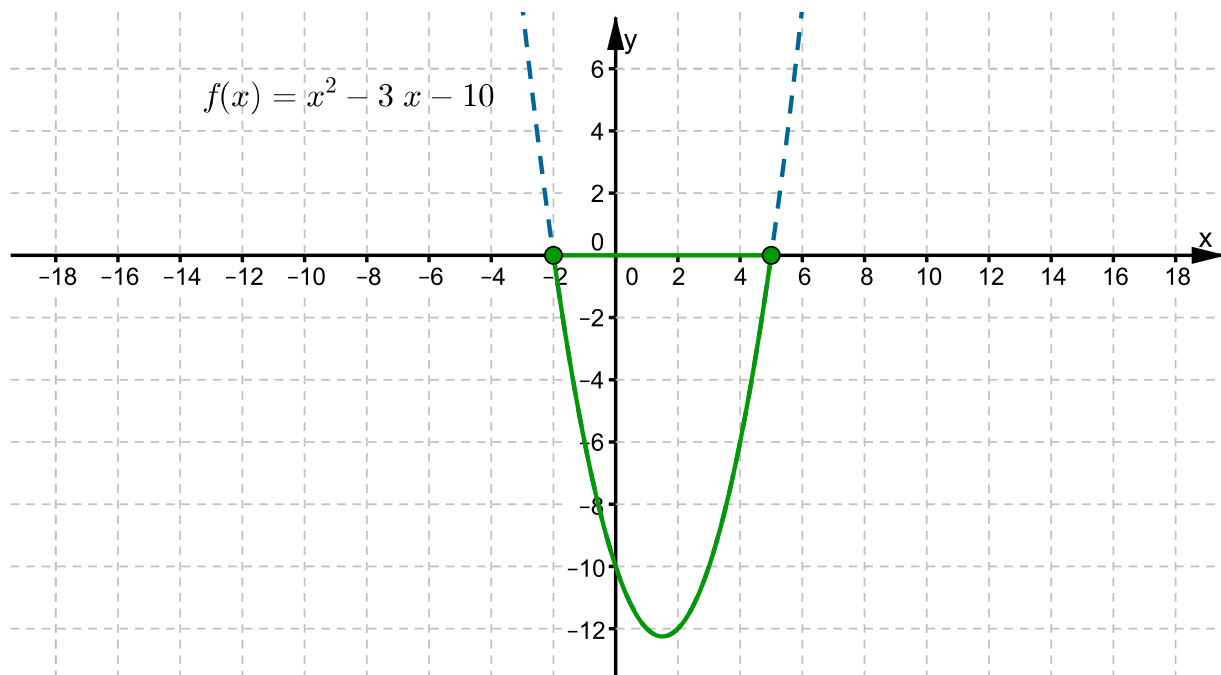
$$x^2 - 3x - 10 \leq 0.$$

Rozpatrzmy funkcję kwadratową określoną wzorem $f(x) = x^2 - 3x - 10$. Ponieważ $a = 1 > 0$, więc wykresem tej funkcji jest parabola, której ramiona skierowane są do góry.

Obliczamy wyróżnik: $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 49 > 0$. Zatem funkcja

$f(x) = x^2 - 3x - 10$ ma dwa miejsca zerowe $x_1 = \frac{3-\sqrt{49}}{2} = -2$ oraz $x_2 = \frac{3+\sqrt{49}}{2} = 5$.

Sporządzamy szkic wykresu tej funkcji i na jego podstawie wyznaczamy argumenty, dla których $x^2 - 3x - 10 \leq 0$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Odpowiedź: $x \in \langle -2, 5 \rangle$.

Przykład 8

Rozwiążemy nierówność $-3x^2 + 2x + 21 \leq 0$.

Przekształcamy daną nierówność. Po pomnożeniu obu stron przez -1 otrzymujemy równoważnie

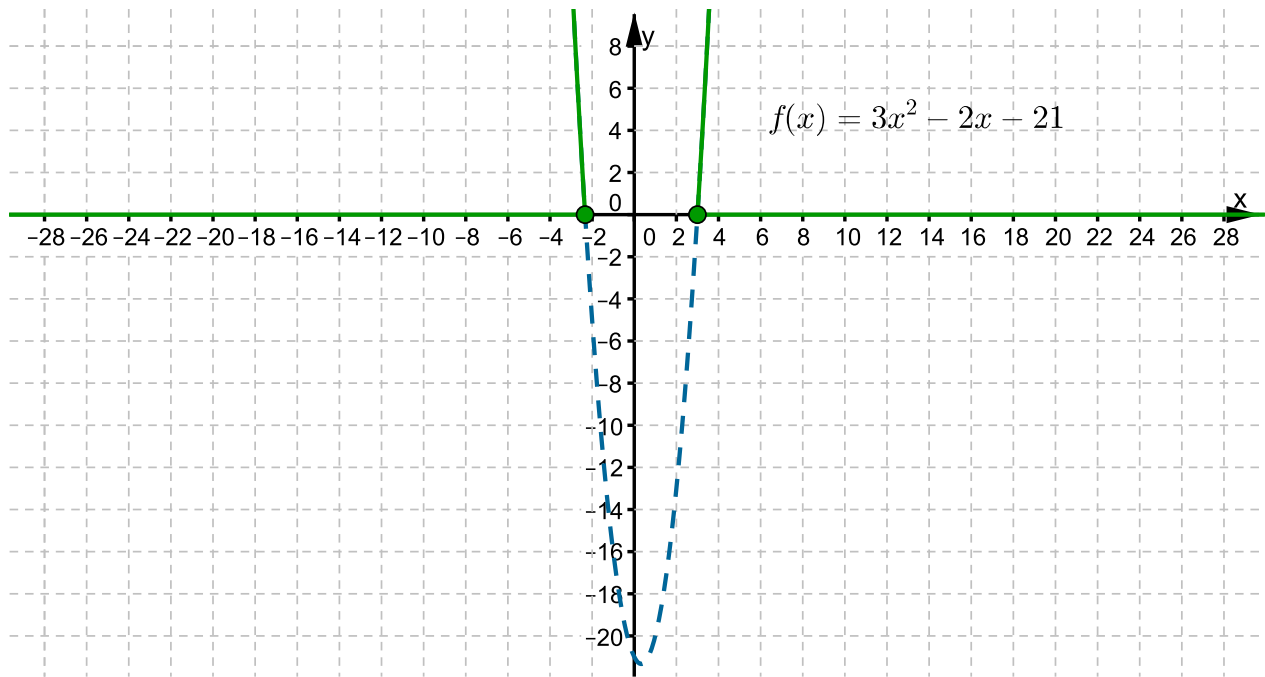
$$3x^2 - 2x - 21 \geq 0.$$

Rozpatrzmy funkcję kwadratową określoną wzorem $f(x) = 3x^2 - 2x - 21$. Ponieważ $a = 3 > 0$, więc wykresem tej funkcji jest parabola, której ramiona skierowane są do góry. Obliczamy wyróżnik: $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-21) = 256 > 0$. Zatem funkcja

$f(x) = 3x^2 - 2x - 21$ ma dwa miejsca zerowe:

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{256}}{2 \cdot 3} = -\frac{7}{3} \text{ oraz } x_2 = \frac{2 + \sqrt{256}}{2 \cdot 3} = 3.$$

Sporządzamy szkic wykresu tej funkcji i na jego podstawie wyznaczamy argumenty, dla których $3x^2 - 2x - 21 \geq 0$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Odpowiedź: $x \in (-\infty, -2\frac{1}{3}) \cup \langle 3, +\infty \rangle$.

Przykład 9

Uzasadnimy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest poniższa nierówność.

$$1. x^2 + 9 \geq 6x$$

- sposób I

Przekształcamy nierówność w sposób równoważny do postaci $x^2 - 6x + 9 \geq 0$. Wystarczy zatem pokazać, że funkcja kwadratowa $y = x^2 - 6x + 9$ przyjmuje wyłącznie wartości nieujemne.

Obliczamy wyróżnik trójmianu $y = x^2 - 6x + 9$:

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$$

Wynika stąd, że funkcja $y = x^2 - 6x + 9$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe. Ponieważ jej wykresem jest parabola o ramionach skierowanych do góry ($a = 1 > 0$), więc dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $x^2 - 6x + 9 \geq 0$. To kończy dowód.

- sposób II

Przekształcamy nierówność w sposób równoważny.

$$x^2 + 9 \geq 6x$$

$$x^2 - 6x + 9 \geq 0$$

$$(x - 3)^2 \geq 0$$

Dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $(x - 3)^2 \geq 0$. To spostrzeżenie kończy dowód.

1. $\frac{x^2}{7} + \frac{7}{4} \geq x$

- sposób I

Przekształcamy nierówność w sposób równoważny do postaci $\frac{x^2}{7} - x + \frac{7}{4} \geq 0$. Wystarczy pokazać, że funkcja kwadratowa $y = \frac{x^2}{7} - x + \frac{7}{4}$ przyjmuje wyłącznie wartości nieujemne. Obliczamy wyróżnik trójmianu $y = \frac{x^2}{7} - x + \frac{7}{4}$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{7}{4} = 0.$$

Zatem funkcja ta ma dokładnie jedno miejsce zerowe, a ponieważ jej wykresem jest parabola o ramionach skierowanych do góry ($a = \frac{1}{7} > 0$), więc dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $\frac{x^2}{7} - x + \frac{7}{4} \geq 0$. To kończy dowód.

- sposób II

Przekształcamy nierówność w sposób równoważny.

$$\frac{x^2}{7} + \frac{7}{4} \geq x$$

$$4x^2 + 49 \geq 28x$$

$$4x^2 - 28x + 49 \geq 0$$

$$(2x - 7)^2 \geq 0$$

Dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $(2x - 7)^2 \geq 0$. To spostrzeżenie kończy dowód.

1. $3(x^2 + 3) > 10x$

- sposób I

Przekształcamy nierówność w sposób równoważny do postaci $3x^2 - 10x + 9 > 0$. Wystarczy pokazać, że funkcja kwadratowa $y = 3x^2 - 10x + 9$ przyjmuje wyłącznie wartości dodatnie. Ponieważ współczynnik przy x^2 trójmianu $y = 3x^2 - 10x + 9$ jest dodatni, więc wykresem tej funkcji jest parabola o ramionach skierowanych do góry.

Obliczamy wyróżnik trójmianu $y = 3x^2 - 10x + 9$

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9 = -8 < 0.$$

Zatem funkcja ta nie ma miejsc zerowych.

Wobec tego dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $3x^2 - 10x + 9 > 0$. To kończy dowód.

- sposób II

Przekształcamy nierówność w sposób równoważny.

$$3(x^2 + 3) > 10x$$

$$3x^2 + 9 > 10x$$

$$3x^2 - 10x + 9 > 0$$

$$9x^2 - 30x + 27 > 0$$

$$(3x - 5)^2 + 2 > 0$$

Dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $(3x - 5)^2 \geq 0$, więc suma $(3x - 5)^2 + 2$ jest liczbą dodatnią. To spostrzeżenie kończy dowód.

Przykład 10

Uzasadnimy, że jeśli liczby x i y są rzeczywiste, to

$$1. 4x^2 + 25y^2 \geq 20xy$$

- sposób I

Przekształcamy nierówność w sposób równoważny.

$$4x^2 - 20xy + 25y^2 \geq 0$$

$$(2x - 5y)^2 \geq 0$$

Jeżeli liczby x i y są rzeczywiste, to prawdziwa jest nierówność $(2x - 5y)^2 \geq 0$. To spostrzeżenie kończy dowód.

- sposób II

Przekształcamy nierówność w sposób równoważny do postaci $4x^2 - 20xy + 25y^2 \geq 0$.

Możemy tę nierówność potraktować jako nierówność kwadratową z niewiadomą x i dowolnie ustaloną liczbę y .

Rozpatrzmy trójmian kwadratowy

$$f(x) = 4x^2 - 20y \cdot x + 25y^2.$$

Trójmian ten ma dodatni współczynnik przy x^2 ($a = 4$).

Obliczamy wyróżnik tego trójmianu

$$\Delta = (-20y)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 25y^2 = 0. \text{ Zatem trójmian } f \text{ ma dokładnie jedno miejsce zerowe.}$$

Oznacza to, że dla każdego x i dla każdego y wartość tego trójmianu jest nieujemna. To spostrzeżenie kończy dowód.

$$1. 5x^2 + y^2 + 4xy \geq 2x - 1$$

- sposób I

Przekształcamy nierówność w sposób równoważny.

$$5x^2 + y^2 + 4xy \geq 2x - 1$$

$$5x^2 + y^2 + 4xy - 2x + 1 \geq 0$$

$$4x^2 + 4xy + y^2 + x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$(2x + y)^2 + (x - 1)^2 \geq 0$$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest każda z nierówności $(2x + y)^2 \geq 0$ oraz $(x - 1)^2 \geq 0$, a zatem również prawdziwa jest nierówność $(2x + y)^2 + (x - 1)^2 \geq 0$. To spostrzeżenie kończy dowód.

- sposób II

Zapiszmy nierówność w postaci równoważnej.

$$5x^2 + y^2 + 4xy - 2x + 1 \geq 0$$

Rozpatrzmy trójmian kwadratowy.

$$f(x) = 5x^2 + (4y - 2)x + (y^2 + 1)$$

Trójmian ten ma dodatni współczynnik przy x^2 ($a = 5$).

Obliczamy wyróżnik tego trójmianu

$$\Delta = (4y - 2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (y^2 + 1) = 16y^2 - 16y + 4 - 20y^2 - 20 = -4(y^2 + 4y + 4) = -4(y + 2)^2$$

Dla każdego y wyróżnik jest więc niedodatni, co oznacza, że funkcja może mieć co najwyżej jedno miejsce zerowe.

Zatem dla każdego x i dla każdego y wartość tego trójmianu jest nieujemna. To spostrzeżenie kończy dowód.

Przykład 11

1. Wykażemy, że jeśli $a \geq 0$ i $b \geq 0$, to $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Przekształcamy nierówność w sposób równoważny.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$$

$$(\sqrt{a})^2 - 2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 \geq 0$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

Dla każdych liczb nieujemnych a i b nierówność $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ jest prawdziwa. To spostrzeżenie kończy dowód.

1. Wykażemy, że jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to $\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$.

Przekształcamy nierówność w sposób równoważny.

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

$$a + b \geq \frac{2ab}{\sqrt{ab}}$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \frac{(\sqrt{ab})^2}{\sqrt{ab}}$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Nierówność $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ jest prawdziwa dla dowolnych liczb dodatnich a i b (co udowodniliśmy w poprzednim podpunkcie), co kończy dowód.

Uwaga. Dla liczb nieujemnych a i b liczbę $\frac{a+b}{2}$ nazywamy ich średnią arytmetyczną.

Dla liczb nieujemnych a i b liczbę $\sqrt{ab}$ nazywamy ich średnią geometryczną.

Dla liczb dodatnich a i b liczbę $\frac{2ab}{a+b}$ (zapisywaną również w postaci $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$) nazywamy ich średnią harmoniczną.

Ćwiczenie 1

Spośród podanych niżej nierówności wybierz te, które są prawdziwe dla każdej liczby rzeczywistej x .

☐ $x^2 > -2$

☐ $-2x^2 < 1$

☐ $-x^2 < -2$

☐ $2x^2 > x$

Ćwiczenie 2

Do zbioru rozwiązań nierówności $(1 - x)(2x + 5) > 0$ należy liczba

☐ -2

☐ $-\sqrt{2}$

☐ 1

☐ $\left(-\frac{4}{3}\right)^2$

Ćwiczenie 3

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐ Zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 < 7$ są liczby należące do przedziału $(-7, 7)$.

☐ Zbiorem rozwiązań nierówności $(x + 3)(x + 5) < 0$ są liczby należące do przedziału $(3, 5)$.

☐ Zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 < x$ są liczby należące do przedziału $(0, 1)$.

☐ Zbiorem rozwiązań nierówności $(x + 2)(4 - x) > 0$ są liczby należące do przedziału $(-2, 4)$.

Ćwiczenie 4

W zbiorze rozwiązań nierówności $x^2 + 8x + 7 > 0$

☐ jest dokładnie 7 liczb całkowitych

☐ jest liczba 0

☐ nie ma żadnej liczby ujemnej

☐ nie ma żadnej liczby dodatniej

Ćwiczenie 5

Spośród podanych niżej nierówności wybierz te, w których zbiorze rozwiązań są dokładnie dwie dodatnie liczby całkowite.

☐ $x^2 + 4x - 21 < 0$

☐ $6x^2 - 13x - 8 \leq 0$

☐ $x^2 + 5x + 4 < 0$

☐ $x^2 - 9x + 20 \leq 0$

Ćwiczenie 6

Każda liczba rzeczywista, która spełnia nierówność $x^2 + 2x - 8 \leq 0$, spełnia też nierówność

☐ $x^2 - 25 < 0$

☐ $x^2 - 16 < 0$

☐ $x^2 - 9 < 0$

☐ $x^2 - 36 < 0$

Ćwiczenie 7

Do zbioru rozwiązań nierówności $(x + 3)(x - 4) > 0$ należy liczba

☐ 3

☐ -2

☐ 5

☐ 1

Ćwiczenie 8

Zbiór rozwiązań nierówności $(x - 2)(x + 5) < 0$ przedstawiony jest na rysunku



Ćwiczenie 9

Zbiorem rozwiązań nierówności $(2x + 4)(x - k) < 0$ jest przedział $(-4, -2)$. Wynika z tego, że

☐ $k = -2$

☐ $k = 4$

☐ $k = -4$

☐ $k = 2$

Ćwiczenie 10

Zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 < 9x$ jest

☐ $(-3, 3)$

☐ $(0, 9)$

☐ $(-9, 0)$

☐ $(-3, 0)$

Ćwiczenie 11

Najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $(3x + 5)(2x - 7) \leq 2(3x + 5)$ jest

☐ -1

☐ 1

☐ -2

☐ 0

Ćwiczenie 12

Zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 > 16$ jest

☐ $(4, +\infty)$

☐ $(-\infty, 8) \cup (8, +\infty)$

☐ $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$

☐ $(-16, +\infty)$

Ćwiczenie 13

Do zbioru rozwiązań nierówności $4x^2 + 1 \leq 4x$ należy liczba

☐ 0

☐ $\frac{1}{2}$

☐ 1

☐ $\frac{1}{4}$

Ćwiczenie 14

Funkcje f i g określone są wzorami $f(x) = x^2 + x$ oraz $g(x) = x - 1$. Wówczas dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność

☐ $f(x) > g(x)$

☐ $f(x) < g(x)$

☐ $g(x) < 0$

☐ $f(x) > 0$

Ćwiczenie 15

Rozwiąż nierówność.

1. $(x + 1)(x - 2) < 0$

2. $(x - 5)(4x + 11) \geq 0$

3. $(x - 2)(6 - 3x) < 0$

4. $(3 - x)(2x + 1) \geq 0$

Ćwiczenie 16

Rozwiąż nierówność.

1. $x^2 \leq 25$

2. $8x < x^2$

3. $3x + 2x^2 \geq 0$

4. $9 - 3x^2 > 0$

Ćwiczenie 17

Rozwiąż nierówność.

1. $x^2 - 18x + 81 > 0$

2. $3x^2 - 18x + 27 \leq 0$

3. $x^2 - 2x + 3 < 0$

4. $x^2 - 6x + 10 > 0$

Ćwiczenie 18

Rozwiąż nierówność.

1. $x^2 + 2x - 24 < 0$

2. $x^2 - 5x - 24 > 0$

3. $-x^2 + 4x + 32 \geq 0$

4. $-x^2 - 7x + 18 \leq 0$

Ćwiczenie 19

Rozwiąż nierówność.

1. $2x^2 + 7x - 4 \leq 0$

2. $3x^2 + 10x + 8 < 0$

3. $-2x^2 - 15x - 27 < 0$

4. $-3x^2 - 23x + 8 \leq 0$

Ćwiczenie 20

Rozwiąż nierówność.

1. $4x^2 - 8x - 45 > 0$

2. $15x^2 + 7x - 2 \geq 0$

3. $-4x^2 + 25x - 6 < 0$

4. $-6x^2 + 7x + 10 \geq 0$

Ćwiczenie 21

Rozwiąż nierówność $-3x^2 + 2x + 5 \geq 0$ i wypisz wszystkie liczby całkowite, które ją spełniają.

Ćwiczenie 22

Wyznacz zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, które spełniają jednocześnie podane nierówności $5x^2 + 7x - 24 \geq 0$ oraz $x < 2$.

Ćwiczenie 23

Uzasadnij, że jeżeli x jest dowolną liczbą rzeczywistą, to prawdziwa jest nierówność $25x^2 + 36 \geq 60x$.

Ćwiczenie 24

Uzasadnij, że jeżeli x jest dowolną liczbą rzeczywistą, to prawdziwa jest nierówność $\frac{3x^2}{10} + \frac{5}{6} \geq x$.

Ćwiczenie 25

Uzasadnij, że jeżeli x jest dowolną liczbą rzeczywistą, to prawdziwa jest nierówność $2x^2 + 11 > 9x$.

Ćwiczenie 26

Uzasadnij, że jeżeli x jest dowolną liczbą rzeczywistą, to prawdziwa jest nierówność $5(x^2 + 2) > 14x$.

Ćwiczenie 27

Uzasadnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność $49x^2 + 9y^2 \geq 42xy$.

Ćwiczenie 28

Uzasadnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność $2x^2 + y^2 + 8x + 16 \geq 2xy$.

Ćwiczenie 29

Uzasadnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność $x^2 + 10y^2 + 6xy \geq 5(2y - 5)$.

Ćwiczenie 30

Wykaż, że nierówność $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$ jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste a i b .

Wartość najmniejsza oraz wartość największa funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym

Przykład 1

Obliczymy wartość najmniejszą oraz wartość największą funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 4x + 1$ w każdym z podanych przedziałów

1. $\langle -4, 1 \rangle$
2. $\langle -1, 3 \rangle$
3. $\langle 4, 7 \rangle$

Ustalmy własności funkcji f , gdy jest ona określona dla każdej liczby rzeczywistej. Ponieważ współczynnik przy x^2 we wzorze funkcji f jest dodatni, więc wykresem tej funkcji jest parabola o ramionach skierowanych do góry. Wierzchołek W tej paraboli ma współrzędne

$$x_W = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2, y_W = f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = -3.$$

Zatem najmniejszą wartością funkcji f jest

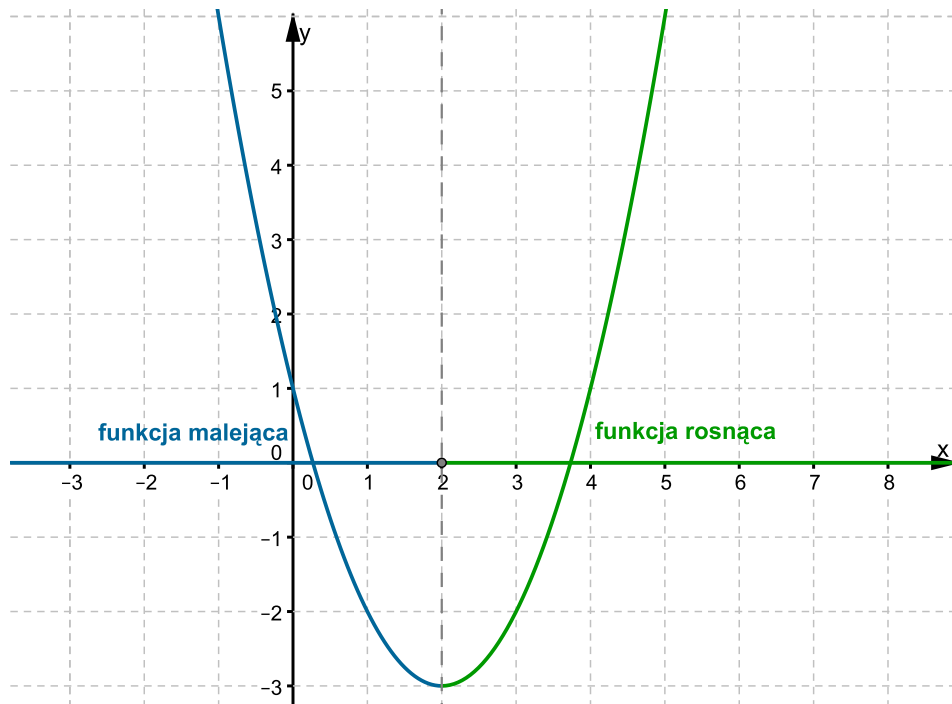
$$f(2) = -3.$$

Najmniejszą wartość funkcji f można też obliczyć, korzystając ze wzoru na drugą współrzędną wierzchołka paraboli

$$q = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Zauważmy, że

- maksymalnym przedziałem, w którym funkcja f jest malejąca, jest $(-\infty, 2)$,
- maksymalnym przedziałem, w którym funkcja f jest rosnąca, jest $\langle 2, +\infty)$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

1. Przedział $\langle -4, 1 \rangle$ jest zawarty w przedziale $(-\infty, 2)$, więc funkcja f jest w tym przedziale malejąca.

Oznacza to, że

największą wartością funkcji f w przedziale $\langle -4, 1 \rangle$ jest wartość w lewym krańcu tego przedziału, czyli $f(-4) = 33$,

najmniejszą wartością funkcji f w przedziale $\langle -4, 1 \rangle$ jest wartość w prawym krańcu tego przedziału, czyli $f(1) = -2$.

2. Pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli należy do przedziału $\langle -1, 3 \rangle$, więc najmniejszą wartością funkcji f w przedziale $\langle -1, 3 \rangle$ jest $f(2) = -3$.

W przedziale $\langle -1, 2 \rangle$ funkcja f jest malejąca, a w przedziale $\langle 2, 3 \rangle$ ta funkcja jest rosnąca. Wobec tego do ustalenia wartości największej funkcji f w przedziale $\langle -1, 3 \rangle$ wystarczy porównać wartości $f(-1)$ oraz $f(3)$.

Obliczamy:

$f(-1) = 6$, $f(3) = -2$. Oznacza to, że największą wartością funkcji f w przedziale $\langle -1, 3 \rangle$ jest $f(-1) = 6$.

3. Przedział $\langle 4, 7 \rangle$ jest zawarty w przedziale $\langle 2, +\infty \rangle$, więc funkcja f jest w tym przedziale rosnąca.

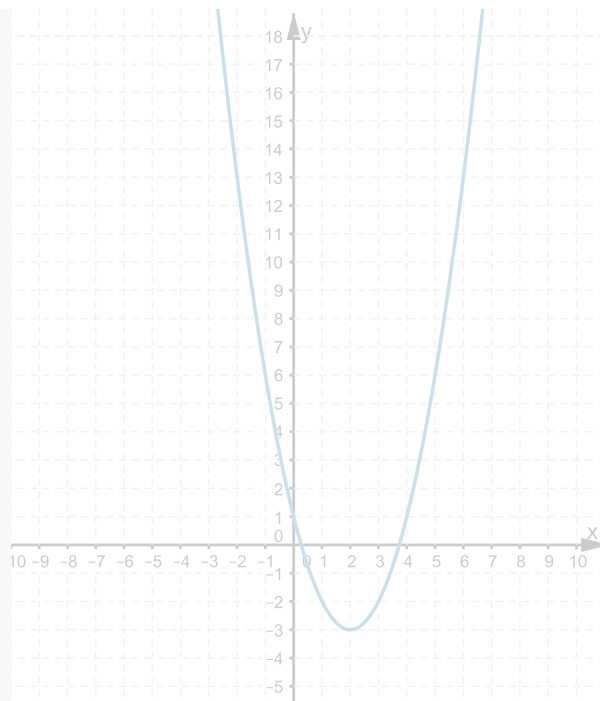
Wobec tego

- największą wartością funkcji f w przedziale $\langle 4, 7 \rangle$ jest wartość w prawym krańcu tego przedziału, czyli $f(7) = 22$,
- najmniejszą wartością funkcji f w przedziale $\langle 4, 7 \rangle$ jest wartość w lewym krańcu tego przedziału, czyli $f(4) = 1$.

Wartość najmniejsza oraz wartość największa
funkcji kwadratowej
 $f(x) = x^2 - 4x + 1$
w wybranym przedziale

☐ $\langle -2, 1 \rangle$ ☐ $\langle 1, 5 \rangle$ ☐ $\langle 3, 6 \rangle$





Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1Af2Pg7y>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 2

Obliczymy najmniejszą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = -x^2 + 6x + 2$ w przedziale $\langle -2, 5 \rangle$.

Współczynnik przy x^2 we wzorze funkcji f jest ujemny, zatem wykresem tej funkcji jest parabola o ramionach skierowanych w dół.

Wierzchołek W tej paraboli ma współrzędne

$$x_W = \frac{-6}{2 \cdot (-1)} = 3, y_W = f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 + 2 = 11.$$

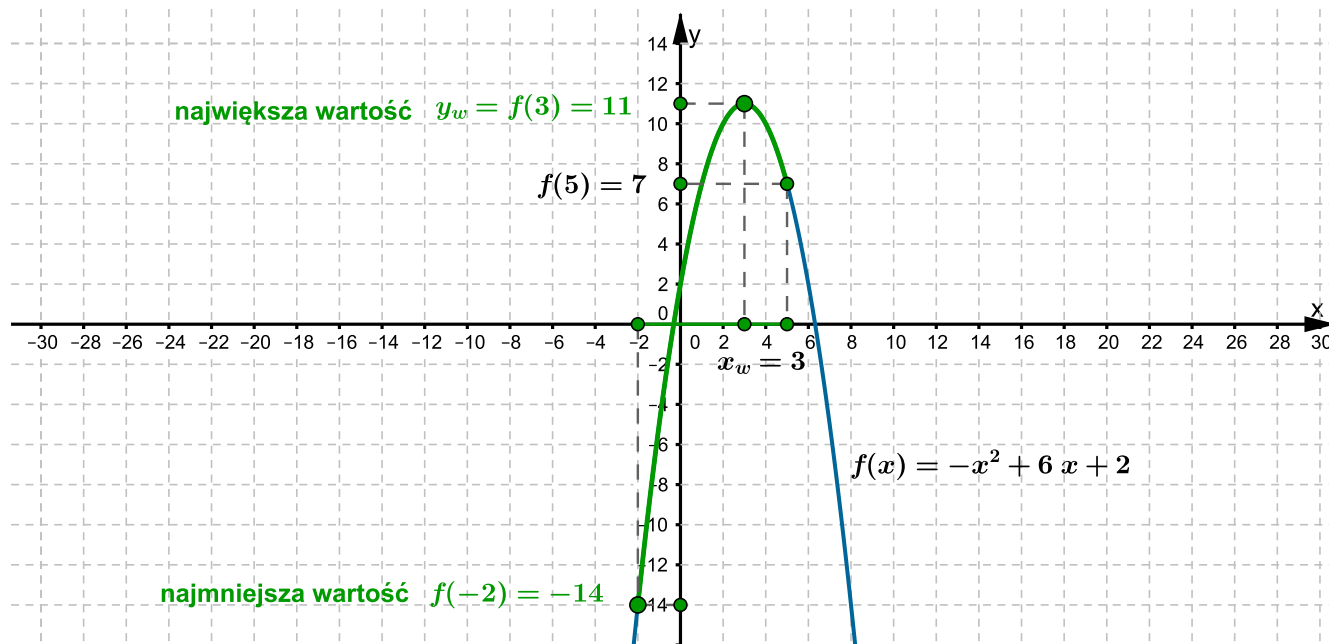
Zatem w przedziale $\langle -2, 3 \rangle$ funkcja f jest rosnąca, a w przedziale $\langle 3, 5 \rangle$ funkcja f jest malejąca.

Oznacza to, że najmniejszą wartością funkcji f jest $f(-2)$ lub $f(5)$.

Obliczamy:

$$f(-2) = -14, f(5) = 7.$$

Najmniejszą wartością funkcji f w przedziale $\langle -2, 5 \rangle$ jest więc -14 .

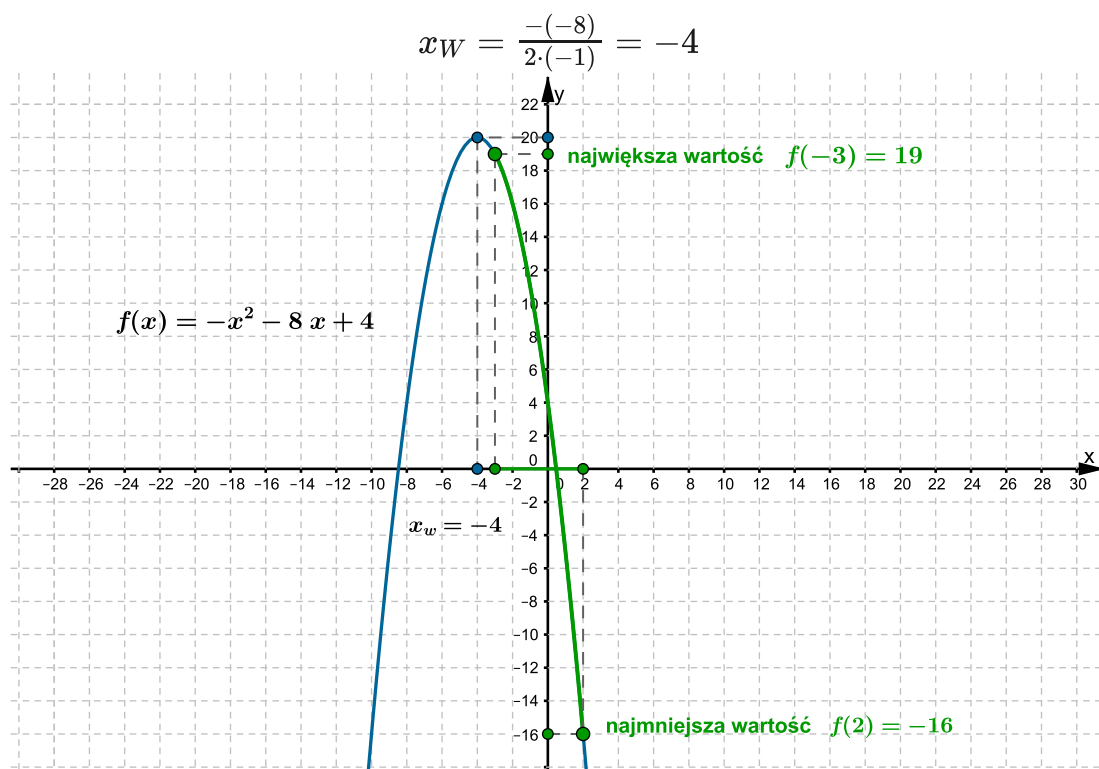


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 3

Obliczymy największą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = -x^2 - 8x + 4$ w przedziale $\langle -3, 2 \rangle$.

Współczynnik przy x^2 we wzorze funkcji f jest ujemny, zatem wykresem tej funkcji jest parabola o ramionach skierowanych w dół. Pierwsza współrzędna wierzchołka W tej paraboli jest równa



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Funkcja ta jest zatem rosnąca w przedziale $(-\infty, -4)$ i malejąca w przedziale $(-4, \infty)$. Ponieważ przedział $\langle -3, 2 \rangle$ jest zawarty w przedziale $(-4, \infty)$, więc funkcja f jest w tym

przedziale malejąca. Największą wartość funkcja f przyjmuje w lewym krańcu tego przedziału. Największą wartością funkcji f w przedziale $\langle -3, 2 \rangle$ jest $f(-3) = 19$.

Przykład 4

Obliczmy wartość najmniejszą oraz wartość największą funkcji kwadratowej

$$f(x) = (3x - 4)(x + 5) \text{ w przedziale } \langle -2, 1 \rangle.$$

Przekształcamy wzór funkcji f do postaci iloczynowej.

$$f(x) = 3\left(x - \frac{4}{3}\right)(x + 5)$$

Współczynnik przy x^2 we wzorze funkcji f jest równy 3, zatem wykresem tej funkcji jest parabola o ramionach skierowanych w górę.

Miejscami zerowymi funkcji f są liczby -5 oraz $\frac{4}{3}$. Pierwsza współrzędna wierzchołka W tej paraboli jest równa

$$x_W = \frac{-5 + \frac{4}{3}}{2} = -\frac{11}{6} = -1\frac{5}{6}.$$

więc należy do przedziału $\langle -2, 1 \rangle$. Oznacza to, że liczba

$$f\left(-\frac{11}{6}\right) = 3\left(-\frac{11}{6} - \frac{4}{3}\right)\left(-\frac{11}{6} + 5\right) = -\frac{361}{12} = -30\frac{1}{12}$$

jest najmniejszą wartością funkcji f w przedziale $\langle -2, 1 \rangle$.

Aby ustalić wartość największą, obliczamy wartości funkcji w obu krańcach danego przedziału

$$f(-2) = -30$$

oraz

$$f(1) = -6.$$

Wobec tego -6 jest największą wartością funkcji f w przedziale $\langle -2, 1 \rangle$.

Przykład 5

Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie x z przedziału $\langle -4, 1 \rangle$ różnicę tej liczby i kwadratu liczby o 2 mniejszej od niej. Wyznamy wzór funkcji f oraz obliczymy jej największą wartość w przedziale $\langle -4, 1 \rangle$.

Z treści zadania wynika, że funkcja f określona jest wzorem

$$f(x) = x - (x - 2)^2.$$

Przekształcamy ten wzór

$$f(x) = x - (x^2 - 4x + 4)$$

stąd

$$f(x) = -x^2 + 5x - 4.$$

Jest to więc funkcja kwadratowa, a w jej wzorze współczynnik przy x^2 jest ujemny. Wykresem funkcji f jest więc parabola o ramionach skierowanych w dół. Pierwsza współrzędna wierzchołka W tej paraboli jest równa

$$x_W = \frac{-5}{2 \cdot (-1)} = \frac{5}{2},$$

więc liczba x_W nie należy do przedziału $\langle -4, 1 \rangle$.

W przedziale $\langle -4, 1 \rangle$ funkcja f jest rosnąca, co oznacza, że największą wartością funkcji f jest wartość w prawym krańcu tego przedziału, czyli $f(1) = 0$.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1Af2Pg7y>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 6

Ustalimy, jaki jest możliwie największy iloczyn dwóch liczb, o których wiadomo, że suma pierwszej z nich i podwojonej drugiej jest równa 12.

Oznaczmy przez y pierwszą z tych dwóch liczb, a przez x – drugą z nich.

Wiadomo, że $2x + y = 12$. Z tej zależności wyznaczamy $y = 12 - 2x$.

Iloczyn I tych dwóch liczb zapiszemy w zależności od zmiennej x

$$I(x) = (12 - 2x) \cdot x.$$

Otrzymaną funkcję kwadratową I zmiennej x zapisujemy wzorem w postaci ogólnej

$$I(x) = -2x^2 + 12x.$$

Ponieważ współczynnik przy x^2 jest ujemny, więc wykresem funkcji I jest parabola skierowana ramionami do dołu.

Pierwsza współrzędna wierzchołka W tej paraboli jest równa

$$x_W = \frac{-12}{2 \cdot (-2)} = 3.$$

Oznacza to, że dla $x = 3$ iloczyn I jest największy. Jest on wtedy równy

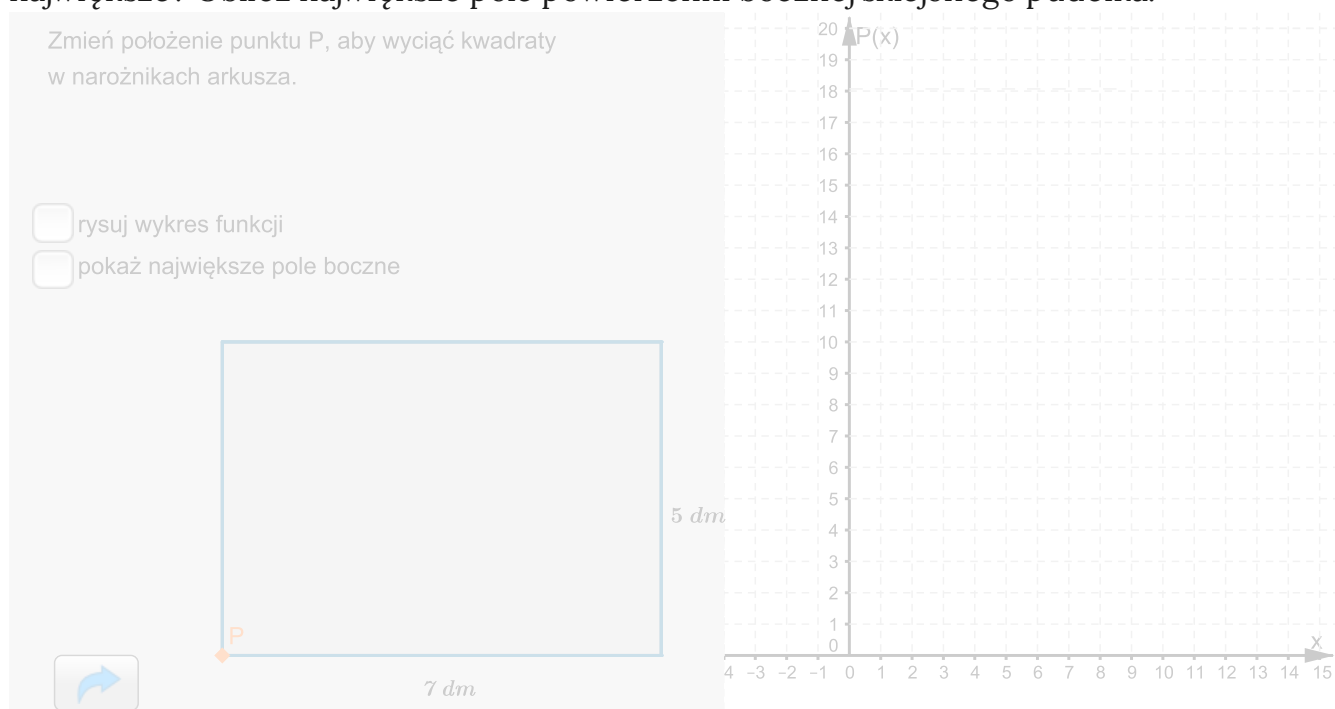
$$I(3) = -2 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 = 18.$$

Zauważmy, że gdy $x = 3$, to

$$y = 12 - 2 \cdot 3 = 6$$

Przykład 7

Z prostokątnego arkusza tektury o wymiarach 5 dm i 7 dm wycięto w rogach kwadraty, tak aby po odpowiednim sklejeniu otrzymać otwarte pudełko. Jaka powinna być długość boku wycinanego kwadratu, aby po sklejeniu pole powierzchni bocznej pudełka było największe? Oblicz największe pole powierzchni bocznej sklejonego pudełka.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1Af2Pg7y>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 8

Suma długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa 10. Obliczymy najmniejszą wartość kwadratu długości przeciwprostokątnej tego trójkąta.

Oznaczmy przez x długość jednej z przyprostokątnych trójkąta, a przez y – długość drugiej z nich.

Wiadomo, że $x + y = 10$. Z tej zależności wyznaczamy $y = 10 - x$.

Stosując twierdzenie Pitagorasa, zapisujemy kwadrat k długości przeciwprostokątnej

tego trójkąta

$$k(x) = x^2 + (10 - x)^2, \text{ gdzie } x \in (0, 10).$$

Otrzymaną funkcję kwadratową k zmiennej x zapisujemy wzorem w postaci ogólnej

$$k(x) = 2x^2 - 20x + 100.$$

Parabola o równaniu $y = 2x^2 - 20x + 100$ ma ramiona skierowane do góry, a pierwsza współrzędna jej wierzchołka jest równa

$$x_W = \frac{-(-20)}{2 \cdot 2} = 5.$$

Ponieważ $5 \in (0, 10)$, więc najmniejszą wartością funkcji k jest

$$k(5) = 50.$$

Zauważmy, że wtedy ten trójkąt jest równoramienny, a każda z przyprostokątnych ma długość 5.

Przykład 9

Właściciel sklepu z odzieżą sprowadza z hurtowni koszulki, płacąc po 12 zł za sztukę i sprzedaje średnio 200 sztuk miesięcznie po 20 zł. Zaobserwowano, że każda kolejna obniżka ceny sprzedaży koszulki o 50 groszy zwiększa sprzedaż miesięczną o 20 sztuk. Jaką cenę sprzedaży jednej koszulki powinien ustalić właściciel sklepu, aby jego miesięczny zysk był największy?

Przyjmijmy, że cenę koszulki obniżano x razy o 50 groszy. Wtedy cena sprzedaży jednej koszulki to $(20 - 0,5x)$ zł, co oznacza, że wówczas zysk właściciela sklepu to $(8 - 0,5x)$ zł. Z obserwacji wynika, że przy tak ustalonej cenie w ciągu miesiąca zostanie sprzedanych $(200 + 2x)$ koszulek. Zatem miesięczny zysk w złotych właściciela sklepu jest równy

$$(8 - 0,5x)(20x + 200),$$

gdzie x jest dodatnią liczbą całkowitą.

Rozpatrzmy funkcję f określoną wzorem

$$f(x) = (8 - 0,5x)(20x + 200).$$

Jest to funkcja kwadratowa, której wzór możemy zapisać w postaci iloczynowej

$$f(x) = -10(x - 16)(x + 10).$$

Parabola będąca wykresem funkcji f ma ramiona skierowane do dołu, a pierwsza współrzędna jej wierzchołka jest równa

$$x_W = \frac{-10+16}{2} = 3.$$

Zatem dla $x = 3$ funkcja f osiąga wartość największą, równą $f(3) = 1690$.

Dla tej wartości x spełnione są warunki zadania. Wynika z tego, że sprzedawca osiągnie

największy miesięczny zysk w kwocie 1690 zł, kiedy ustalili, że cena sprzedaży jednej koszulki jest równa 18 zł 50 groszy.

Uwaga. W powyższym przykładzie funkcja f nie jest modelem opisującym zysk ze sprzedaży koszulek. Natomiast korzystając z jej własności, umiemy wskazać taką dodatnią liczbę całkowitą x , dla której zysk, wyrażający się wzorem $(8 - 0,5x)(20x + 200)$, jest największy.

Przykład 10

Wykażemy, że jeśli $a > 0$ i $b > 0$ oraz $a + b = 2$, to $a^2 + b^2 \geq 2$.

Z zależności $a + b = 2$ wyznaczamy $b = 2 - a$.

Zapisujemy sumę S kwadratów liczb a i b jako funkcję zmiennej a .

$S(a) = a^2 + (2 - a)^2$, gdzie $a \in (0, 2)$.

Otrzymaną funkcję kwadratową S zmiennej a zapisujemy wzorem w postaci ogólnej

$$S(a) = 2a^2 - 4a + 4.$$

Parabola o równaniu $y = 2x^2 - 4x + 4$ ma ramiona skierowane do góry, a pierwsza współrzędna jej wierzchołka jest równa

$$x_W = \frac{-(-4)}{2 \cdot 2} = 1.$$

Ponieważ $1 \in (0, 2)$, więc najmniejszą wartością funkcji S jest

$$S(1) = 2.$$

Oznacza to, że jeśli $a > 0$ i $b > 0$ oraz $a + b = 2$, to $a^2 + b^2 \geq 2$.

Ćwiczenie 1

Jaka jest największa wartość funkcji kwadratowej $f(x) = -x^2 + 3$ w przedziale $\langle -2, 1 \rangle$?

☐ 3

☐ 1

☐ 7

☐ 2

Ćwiczenie 2

Jaka jest najmniejsza wartość funkcji kwadratowej $f(x) = (x - 3)(x + 5)$ w przedziale $\langle -3, 0 \rangle$?

☐ -15

☐ -12

☐ -16

☐ -35

Ćwiczenie 3

Najmniejsza wartość funkcji kwadratowej $f(x) = (2 - x)(x + 4)$ w przedziale $\langle -2, 1 \rangle$ jest równa

☐ 7

☐ 8

☐ 9

☐ 5

Ćwiczenie 4

Największa wartość funkcji kwadratowej $f(x) = -x^2 + 8x - 3$ w przedziale $\langle -5, -2 \rangle$ jest równa

☐ -3

☐ -51

☐ -23

☐ -18

Ćwiczenie 5

Najmniejsza wartość funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 4x + c$ w przedziale $\langle 0, 3 \rangle$ jest równa 1. Wtedy

☐ $c = 3$

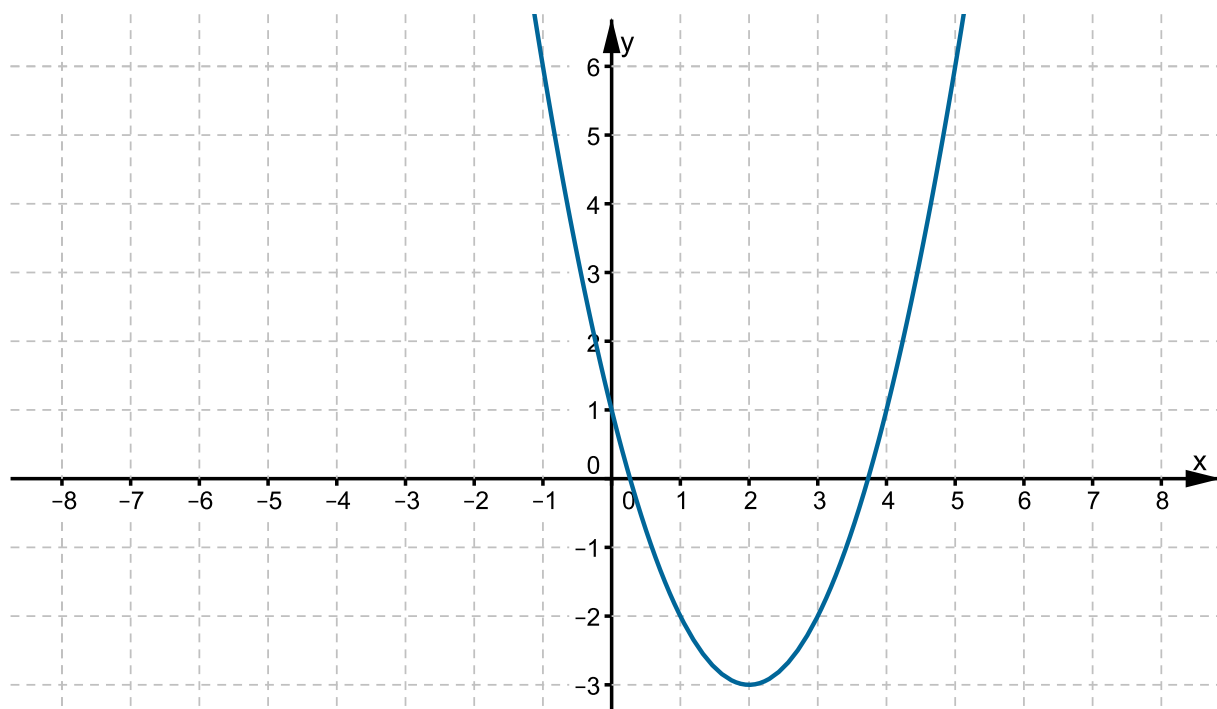
☐ $c = -12$

☐ $c = 5$

☐ $c = 1$

Ćwiczenie 6

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji kwadratowej f .



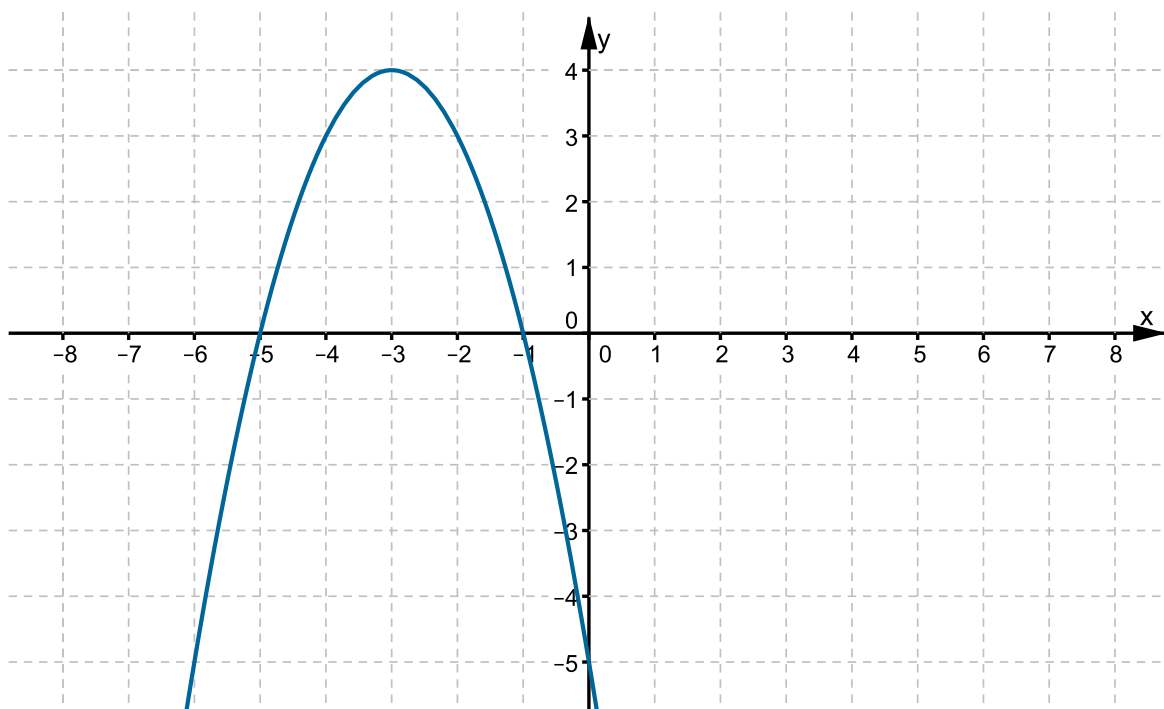
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Na podstawie tego wykresu ustal i zapisz wartość największą oraz wartość najmniejszą funkcji f w podanym przedziale.

1. $\langle -1, 1 \rangle$
2. $\langle 0, 3 \rangle$
3. $\langle 4, 5 \rangle$

Ćwiczenie 7

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji kwadratowej f .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Na podstawie tego wykresu ustal i zapisz wartość największą oraz wartość najmniejszą funkcji f w podanym przedziale.

1. $\langle -6, -4 \rangle$
2. $\langle -5, -2 \rangle$
3. $\langle -1, 0 \rangle$

Ćwiczenie 8

Oblicz wartość najmniejszą oraz wartość największą funkcji kwadratowej $f(x) = (x + 1)^2 - 5$ w podanym przedziale.

1. $\langle -4, -2 \rangle$

2. $\langle -3, 0 \rangle$

3. $\langle 2, 5 \rangle$

Ćwiczenie 9

Oblicz wartość najmniejszą oraz wartość największą funkcji kwadratowej $f(x) = -2(x - 3)^2 + 1$ w podanym przedziale.

1. $\langle -1, 0 \rangle$

2. $\langle 1, 4 \rangle$

3. $\langle 5, 6 \rangle$

Ćwiczenie 10

Oblicz wartość najmniejszą oraz wartość największą funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 10x + 7$ w podanym przedziale.

1. $\langle -1, 3 \rangle$

2. $\langle 4, 6 \rangle$

3. $\langle 7, 10 \rangle$

Ćwiczenie 11

Oblicz wartość najmniejszą oraz wartość największą funkcji kwadratowej $f(x) = -x^2 - 2x + 5$ w podanym przedziale.

1. $\langle -5, -3 \rangle$

2. $\langle -2, 0 \rangle$

3. $\langle 1, 4 \rangle$

Ćwiczenie 12

Oblicz najmniejszą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = (x + 2)(x - 5)$ w przedziale $\langle -1, 0 \rangle$.

Ćwiczenie 13

Oblicz największą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = (x + 1)(3 - x)$ w przedziale $\langle 0, 4 \rangle$.

Ćwiczenie 14

Oblicz wartość najmniejszą oraz wartość największą funkcji kwadratowej $f(x) = (2x - 1)(x + 3)$ w przedziale $\langle -3, 1 \rangle$.

Ćwiczenie 15

Oblicz wartość najmniejszą oraz wartość największą funkcji kwadratowej $f(x) = (x + 2)(5 - 2x)$ w przedziale $\langle -1, 0 \rangle$.

Ćwiczenie 16

Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie x z przedziału $\langle -2, 3 \rangle$ sumę tej liczby i jej kwadratu. Wyznacz wzór funkcji f oraz oblicz:

1. jej wartość najmniejszą w przedziale $\langle -2, 3 \rangle$
2. jej wartość największą w przedziale $\langle -2, 3 \rangle$

Ćwiczenie 17

Ustal, jaka jest możliwie najmniejsza suma kwadratów dwóch liczb, o których wiadomo, że suma pierwszej z nich i podwojonej drugiej jest równa 5.

Ćwiczenie 18

Jaki jest największy iloczyn dwóch liczb, o których wiadomo, że suma podwojonej pierwszej z nich i siedmiokrotności drugiej jest równa 56. Jakie to liczby?

Ćwiczenie 19

Wśród wszystkich prostopadłościanów o podstawie kwadratowej, w których suma długości wszystkich krawędzi jest równa 12, jest taki, który ma największe pole powierzchni całkowitej. Oblicz długość krawędzi podstawy tego prostopadłościanu.

Ćwiczenie 20

Siatką o długości 98 m mamy ogrodzić działkę w kształcie prostokąta. Na ogrodzonym terenie przy jednym boku od strony siatki przewidujemy ścieżkę o szerokości 1 m, pozostałą część ma zajmować klomb kwiatowy. Jak dobrać wymiary działki, aby klomb kwiatowy zajmował powierzchnię największą z możliwych? Oblicz tę największą powierzchnię.

Ćwiczenie 21

Właściciel sklepu spożywczego zamawia chleb w piekarni, płacąc 1,30 zł za kilogramowy bochenek. Kiedy ustalił cenę sprzedaży chleba na 2 zł, sprzedawał dziennie 60 bochenków. Zauważył jednak, że każda obniżka ceny o 5 gr zwiększa liczbę sprzedanych bochenków o 10. Jaką cenę za jeden bochenek powinien ustalić właściciel sklepu, aby jego dzienny zysk ze sprzedaży chleba był największy?

Ćwiczenie 22

Wykaż, że jeśli $a > 0$ i $b > 0$ oraz $a + b = 10$, to $ab \leq 25$.

Ćwiczenie 23

Wykaż, że jeśli $a > 0$ i $b > 0$ oraz $2a + b = 6$, to $ab \leq \frac{9}{2}$.

Ćwiczenie 24

Wykaż, że jeśli $a > 0$ i $b > 0$ oraz $3a + 5b = 30$, to $ab \leq 15$.

Ćwiczenie 25

Wykaż, że jeśli $a > 0$ i $b > 0$ oraz $a + b = 8$, to $a^2 + b^2 \geq 32$.

Ćwiczenie 26

Wykaż, że jeśli $a > 0$ i $b > 0$ oraz $a + 3b = 20$, to $a^2 + b^2 \geq 40$.

Ćwiczenie 27

Wykaż, że jeśli $a > 0$ i $b > 0$ oraz $5a + 2b = 58$, to $a^2 + b^2 \geq 116$.

Zadania wstępne

Pokażemy teraz kilka przykładowych zadań tekstowych, w których interpretacja danych zapisanych w ich treści doprowadzi do równania kwadratowego.

Przykład 1

W roku 2015 na uroczystości urodzin zapytano jubilata, ile ma lat. Jubilat odpowiedział: „Jeśli wiek, który osiągnę za 15 lat pomnożę przez wiek, który osiągnę za 55 lat, to otrzymam rok mojego urodzenia”. W którym roku urodził się ten jubilat?

 **Oznaczmy przez x wiek jubilata w dniu urodzin w 2015 roku. Wtedy:**

x – wiek Michała	$(x + 15)(x + 55) = 2015 - x$
$x + 15$ – wiek Michała za 15 lat	$x^2 + 55x + 15x + 825 + x - 2015 = 0$
$x + 55$ – wiek Michała za 55 lat	$x^2 + 71x - 1190 = 0$
$2015 - x$ – rok urodzenia Michała	

$\Delta = 71^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1190) = 9801 = 99^2 > 0$

$x_1 = \frac{-71 + 99}{2} = 14 > 0, \quad x_2 = \frac{-71 - 99}{2} = -85 < 0$

$2015 - 14 = 2001$

 **Michał urodził się w 2001 roku.**

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

"W roku 2015 na uroczystości urodzin zapytano jubilata, ile ma lat. Jubilat odpowiedział: „Jeśli swój wiek, który osiągnę za 15 lat pomnożę przez swój wiek, który osiągnę za 55 lat, to otrzymam rok mojego urodzenia”. W którym roku urodził się ten jubilat? Oznaczmy przez x wiek jubilata w dniu urodzin w 2015 roku. Wtedy: rok urodzenia jubilata to 2015 ?
 x

Odpowiedź: Jubilat urodził się w 2001 roku.

Przykład 2

Liczba wszystkich przekątnych pewnego wielokąta foremnego jest równa 135. Ile boków ma ten wielokąt?

Oznaczmy liczbę boków wielokąta przez n . Wówczas liczba jego przekątnych jest równa $\frac{n(n-3)}{2}$.

Otrzymujemy równanie

$$\frac{n(n-3)}{2} = 135.$$

Stąd

$$n^2 - 3n = 135 \cdot 2$$

$$n^2 - 3n - 270 = 0.$$

Obliczamy wyróżnik

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-270) = 1089 = 33^2$$

Wobec tego równanie ma dwa rozwiązania, którymi są $n_1 = \frac{3+33}{2} = 18$ oraz $n_2 = \frac{3-33}{2} = -15$.

Drugie z rozwiązań odrzucamy, gdyż liczba boków nie może być ujemna. Zatem ten wielokąt jest osiemnastokątem.

Odpowiedź: Ten wielokąt ma osiemnaście boków.

Przykład 3

Pole powierzchni bocznej prostopadłościanu o podstawie kwadratowej jest równe 280. Krawędź podstawy jest o 3 krótsza od krawędzi bocznej. Oblicz objętość V tego prostopadłościanu.

Oznaczmy przez x długość krawędzi podstawy prostopadłościanu. Wtedy długość jego krawędzi bocznej jest równa $x + 3$, a pole powierzchni bocznej jest równe $4 \cdot x \cdot (x + 3)$.

Otrzymujemy równanie

$$4x(x + 3) = 280.$$

Stąd

$$x(x + 3) = 70$$

$$x^2 + 3x = 70$$

$$x^2 + 3x - 70 = 0.$$

Obliczamy wyróżnik

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-70) = 289 = 17^2.$$

Wobec tego równanie ma dwa rozwiązania, którymi są

$$x_1 = \frac{-3+17}{2} = 7 \text{ oraz } x_2 = \frac{-3-17}{2} = -10.$$

Tylko pierwsze z nich spełnia warunki zadania, co oznacza, że jest to prostopadłościan o wymiarach 7, 7 i 10, a więc jego objętość V jest równa 490.

Odpowiedź: $V = 490$.

Przykład 4

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Koszt wynajęcia autobusu do przewozu grupy uczniów na warsztaty matematyczne z miejsca zamieszkania do Domu Wczasów Dziecięcych wynosi 2400 zł. Podzielono tę kwotę na równe części, by każdy z uczniów zgłoszonych do udziału w warsztatach płacił tyle samo. Jeden z uczniów tej grupy zrezygnował z wyjazdu na warsztaty i w efekcie każdy z uczestników warsztatów zapłacił za przejazd o 4 zł więcej, niż planowano.

Ustalimy, ilu uczniów brało udział w tych warsztatach. Oznaczmy przez x liczbę uczniów, którzy zgłosili chęć udziału w warsztatach, a przez y – kwotę (w złotych) opłaty za przejazd, która przypadła na zgłoszonego uczestnika. Wtedy x razy $y=2400$. Po rezygnacji jednego z uczniów w warsztatach uczestniczyło $x-1$ osób, a każda z nich zapłaciła za przejazd $(y+4)$ zł. Zatem $(x-1)$ razy $(y+4)=2400$. Wynika stąd, że x razy $-y+4x-4=2400$. Uwzględniając x razy $y=2400$, otrzymamy równanie $-y+4x-4=0$, z którego wyznaczymy niewiadomą y $y=4x-4$. Uwzględniając z kolei tę zależność w równaniu x razy $y=2400$, otrzymamy x razy $(4x-4)=2400$. Przekształcamy to równanie do postaci x kwadrat $-x^2-600=0$ Obliczamy wyróżnik: $\Delta=(?)$ kwadrat -4 razy 1 razy $(-600)=2401=49^2$. Równanie ma więc dwa rozwiązania, którymi są x z indeksem dolnym jeden $=25$ oraz

x z indeksem dolnym dwa = 24. Drugie z rozwiązań odrzucamy, gdyż liczba uczniów nie może być ujemna. Zatem do udziału w warsztatach zgłosiło się 25 uczniów, a 24 uczniów brało w nich udział. Odpowiedź: W warsztatach brało udział 24 uczniów.

Przykład 5

Geodeta wytyczył teren pod dwie prostokątne działki. Pierwsza działka ma powierzchnię 5600 m^2 . Druga działka ma długość o 20 m większą i szerokość o 5 m większą niż pierwsza oraz powierzchnię większą o 1900 m^2 . Obliczmy wymiary obu działek.

Wprowadzamy oznaczenia:

x – długość pierwszej działki (w metrach),

y – szerokość pierwszej działki (w metrach).

Ponieważ jej powierzchnia jest równa 5600 m^2 , więc $xy = 5600$.

Wtedy druga działka ma wymiary:

długość: $(x + 20)$ m oraz szerokość: $(y + 5)$ m,

a skoro jej pole jest równe $(5600 + 1900) \text{ m}^2$, więc

$$(x + 20)(y + 5) = 7500$$

Uwzględniamy w tym równaniu zależność $xy = 5600$ i przekształcamy je do postaci

$$x = 360 - 4y.$$

Stąd

$$(360 - 4y)y = 5600$$

$$-4y^2 + 360y = 5600$$

$$y^2 - 90y + 1400 = 0.$$

Obliczamy wyróżnik:

$$\Delta = (-90)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1400 = 2500 = 50^2.$$

Równanie ma więc dwa rozwiązania, którymi są $y_1 = \frac{90+50}{2} = 70$ oraz $y_2 = \frac{90-50}{2} = 20$.

Zatem możliwe są dwa przypadki:

pierwsza działka ma wymiary 80 m i 70 m i wtedy druga ma wymiary 100 m i 75 m lub

pierwsza działka ma wymiary 280 m i 20 m i wtedy druga ma wymiary 300 m i 25 m.

Odpowiedź: Możliwe są dwa rozwiązania: pierwsza działka ma wymiary 80 m i 70 m, druga – 100 m i 75 m lub pierwsza działka ma wymiary 280 m i 20 m, druga – 300 m i 25 m.

Zadania tekstowe prowadzące do równań kwadratowych – prędkość, droga, czas

W kolejnych przykładach zadań tekstowych interpretujemy średnią wartość prędkości jako długość drogi pokonanej w jednostce czasu.

Przypomnijmy na wstępie, jak należy rozumieć tego typu zależności.

Przykład 1



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Pewien kolarz przez trzy kolejne dni pokonywał w ramach treningu trasę 120 km. Pierwszego dnia pokonał ją w ciągu 3 godzin. Oznacza to, że średnia wartość V jego prędkości była wtedy równa $V = 120$ przez 3 kilometrów na godzinę, czyli $V = 40$ kilometrów na godzinę. Drugiego dnia pokonał tę trasę, jadąc ze średnią prędkością mniejszą o 4 kilometry na godzinę niż pierwszego dnia. Oznacza to, że czas t potrzebny na pokonanie tej trasy był wtedy równy $T = 120$ przez 36 godziny, czyli 3 godziny i 20 minut. Zatem drugiego dnia kolarz jechał o 20 minut dłużej, niż pierwszego. Trzeciego dnia kolarz przebył trasę, jadąc przez pierwszą połowę drogi ze średnią prędkością 40 3 kilometrów na godzinę, a przez drugą połowę, jadąc ze średnią prędkością 36 3 kilometrów na godzinę. Wynika z tego, że czas t z indeksem dolnym jeden, w którym przebył pierwsze 60 km trasy, był równy t z indeksem dolnym jeden $= 60$ przez 40 godziny, czyli 1,5 godziny, a czas t z indeksem dolnym dwa potrzebny na pokonanie drugiej połowy trasy był równy t z indeksem dolnym dwa $= 60$ przez 36 godziny, czyli 1

godzina i 40 minut, co oznacza, że na pokonanie całej trasy kolarz potrzebował wtedy 3 godzin i 10 minut. Wynika z tego, że trzeciego dnia średnia wartość V prędkości kolarza była równa po zaokrągleniu do części setnych $V = 37,89$ 3 kilometrów na godzinę.

Otrzymana wartość nie jest więc średnią arytmetyczną prędkości, z jakimi kolarz przebył każdą z połówek całej trasy.

Rozwiążemy teraz trzy przykładowe zadania dotyczące zagadnień związanych z drogą oraz prędkością i czasem.

Przykład 2

Pociąg towarowy miał przebyć pewną drogę w czasie 21 godzin. W połowie drogi pociąg niespodziewanie zatrzymano na pół godziny. Aby uniknąć spóźnienia, pozostałą część trasy pociąg przebył ze średnią prędkością o 2 km/h większą niż planowana. Jaka była długość tej drogi i planowana prędkość pociągu?

Oznaczmy planowaną prędkość pociągu przez x (w km/h). Zatem przez pierwsze 10,5 godziny jazdy pociąg pokonał połowę drogi, czyli $(10,5 \cdot x)$ km. Po nieplanowanym postoju jechał jeszcze przez 10 godzin z prędkością $(x + 2)$ km/h, pokonując wtedy drugą połowę drogi, czyli $10(x + 2)$ km.

Wówczas $10,5 \cdot x = 10(x + 2)$, a stąd $x = 40$. Oznacza to, że pociąg przejechał 840 km, a planowana średnia prędkość jazdy to 40 km/h.

Przykład 3

Pewien rowerzysta przebył zaplanowaną trasę o długości 200 km, pokonując w ciągu każdej godziny jazdy tę samą liczbę kilometrów. Gdyby rowerzysta mógł przeznaczyć na tę wyprawę o 2 godziny więcej, to w ciągu każdej godziny mógłby przejeżdżać o 5 km mniej. Obliczymy, z jaką średnią prędkością jechał ten rowerzysta.

Wprowadzamy oznaczenia:

x – czas (w godzinach) jazdy rowerzysty na trasie 200 km,

y – wartość średniej prędkości (w km/h), z jaką jechał.

Wtedy

$$xy = 200.$$

Gdyby rowerzysta jechał przez $(x + 2)$ godziny, to jego średnia prędkość na trasie 200 km byłaby równa $(y - 5)$ km/h.

Zatem

$$(x + 2)(y - 5) = 200.$$

Uwzględniamy w tym równaniu zależność $xy = 200$ i przekształcamy je do postaci

$$y = \frac{5x+10}{2}.$$

Stąd

$$\frac{5x+10}{2} \cdot x = 200$$

$$5x^2 + 10x = 400$$

$$x^2 + 2x - 80 = 0.$$

Obliczamy wyróżnik $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-80) = 324 = 18^2$. Równanie ma więc dwa rozwiązania, którymi są $x_1 = \frac{-2+18}{2} = 8$, $x_2 = \frac{-2-18}{2} = -10$.

Drugie z rozwiązań odrzucamy, gdyż czas nie może być ujemny.

Zatem rowerzysta przejechał trasę 200 km w czasie 8 godzin, co oznacza, że jechał ze średnią prędkością 25 km/h.

Odpowiedź: 25 km/h

Przykład 4

Miasta A i B są oddalone o 400 km. Pan Stanisław pokonał tę trasę samochodem w czasie o 75 minut krótszym niż pan Zenon. Wartość średniej prędkości, z jaką jechał pan Stanisław na całej trasie była o 16 km/h większa od wartości średniej prędkości, z jaką jechał pan Zenon.

Oblicz średnie wartości:

1. prędkości, z jaką pan Stanisław jechał z A do B ,
2. prędkości, z jaką pan Zenon jechał z A do B .

Wprowadzamy oznaczenia:

x – czas jazdy pana Zenona,

y – wartość średniej prędkości (w km/h), z jaką jechał pan Zenon.

Wtedy

$$xy = 400.$$

Pan Stanisław przebył drogę z A do B w czasie $(x - \frac{75}{60})$ godziny, a średnia wartość jego prędkości była równa $(y + 16)$ km/h.

Zatem

$$(x - \frac{75}{60})(y + 16) = 400.$$

Uwzględniamy w tym równaniu zależność $xy = 400$ i przekształcamy je do postaci $-\frac{5}{4}y + 16x - 20 = 0$.

Stąd

$$y = \frac{64}{5}x - 16$$

co oznacza, że

$$\left(\frac{64}{5}x - 16\right) \cdot x = 400$$

$$\frac{64}{5}x^2 - 16x - 400 = 0$$

$$4x^2 - 5x - 125 = 0$$

Obliczamy wyróżnik $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-125) = 2025 = 45^2$.

Równanie ma więc dwa rozwiązania $x_1 = \frac{5+45}{8} = \frac{25}{4}$, $x_2 = \frac{5-45}{8} = -5$.

Drugie z rozwiązań odrzucamy, gdyż czas nie może być ujemny.

Zatem pan Zenon przejechał trasę 400 km w czasie 6 godzin 15 minut, co oznacza, że jechał ze średnią prędkością 64 km/h. Wtedy średnia wartość prędkości, z jaką jechał pan Stanisław była równa 80 km/h.

Odpowiedź: Średnia wartość prędkości, z jaką pan Stanisław jechał z A do B : 80 km/h, średnia wartość prędkości, z jaką pan Zenon jechał z A do B : 64 km/h.

Ćwiczenie 1

Suma kwadratów dwóch kolejnych liczb całkowitych jest równa 685. Co to za liczby?

Ćwiczenie 2

Liczba wszystkich odcinków, łączących każde dwa wierzchołki pewnego wielokąta foremnego jest równa 210. Ile boków ma ten wielokąt?

Ćwiczenie 3

Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o podstawie kwadratowej jest równe 272. Krawędź boczna jest o 1 krótsza od obwodu podstawy. Oblicz pole P powierzchni bocznej tego prostopadłościanu.

Ćwiczenie 4

Za pewną liczbę takich samych teczek na dokumenty sekretarka zapłaciła w hurtowni 435 zł. Gdyby cena jednej teczki była o 5 groszy niższa, to za tę samą kwotę można byłoby kupić o 10 teczek więcej. Oblicz cenę jednej teczki.

Ćwiczenie 5

Automat pracujący ze stałą wydajnością wyprodukował 7200 kopert. Gdyby ten automat produkował o 8 kopert na minutę więcej, to na wykonanie tej liczby kopert potrzebowałby o pół godziny mniej. Oblicz, w ciągu jakiego czasu automat wyprodukował koperty.

Ćwiczenie 6

Pan Jan przebył w pewnym czasie drogę długości 240 km. Gdyby jechał ze średnią prędkością o 12 km/h większą, to czas przejazdu skróciłby się o 1 godzinę. Z jaką prędkością jechał pan Jan?

Ćwiczenie 7

Pan Jan przebył w pewnym czasie drogę długości 210 km. Gdyby jechał ze średnią prędkością o 10 km/h większą, to czas przejazdu skróciłby się o 42 minuty. Z jaką średnią prędkością jechał pan Jan?

Ćwiczenie 8

Rowerzysta przebył w pewnym czasie drogę długości 72 km. Gdyby jechał ze średnią prędkością o 6 km/h większą, to czas przejazdu skróciłby się o 36 minut. Jaka była średnia prędkość rowerzysty?

Ćwiczenie 9

Rowerzysta miał przebyć 120 km, jadąc z ustaloną średnią prędkością. W połowie drogi, którą pokonał, jadąc zgodnie z planem, zatrzymał się, aby porozmawiać ze spotkanym znajomym. Po tej przerwie kontynuował jazdę, ale żeby uniknąć spóźnienia, pozostałą część trasy przebył ze średnią prędkością o 6 km/h większą niż zaplanowana. Okazało się, że łączny czas jazdy rowerzysty (nie licząc postoju) to 4 godziny i 30 minut. Z jaką średnią prędkością rowerzysta planował przejechać 120 km?

Ćwiczenie 10

W miasteczku są dwa place zabaw w kształcie prostokątów. Przekątna każdego z tych prostokątów jest równa 85 m. Pierwszy plac ma długość o 7 m większą niż drugi, ale szerokość o 11 m mniejszą. Oblicz długość i szerokość każdego z tych placów.

Pierwiastki równań

W tym rozdziale zajmiemy się funkcjami, zwanymi wielomianami. Znasz już przykłady takich funkcji. Każda funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ i każda funkcja kwadratowa $g(x) = ax^2 + bx + c$ jest wielomianem. Innymi przykładami wielomianów są funkcje

$$W(x) = x^3 - 2x, V(x) = 2x^7 - 3x^2 + 3, R(x) = 10x^5.$$

Definicja: Wielomian

Wielomianem zmiennej x stopnia n (n – liczba naturalna dodatnia) nazywamy funkcję określoną wzorem

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

gdzie $x \in R$, $a_n \neq 0$ oraz $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ są liczbami rzeczywistymi. Liczby $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ nazywamy współczynnikami wielomianu.

- Przyjmujemy ponadto, że funkcja liniowa stała $W(x) = a_0$, gdzie $a_0 \neq 0$, jest wielomianem stopnia zerowego, natomiast funkcję liniową $W(x) = 0$ nazywamy **wielomianem zerowym** i nie określamy stopnia tego wielomianu.
- Zgodnie z tą definicją funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ jest wielomianem stopnia pierwszego, gdy $a \neq 0$, a funkcja kwadratowa

$$g(x) = ax^2 + bx + c$$

jest wielomianem stopnia drugiego. Oczywiście $a \neq 0$, gdyż inaczej nie byłaby to funkcja kwadratowa.

Przykład 1

- Funkcja określona wzorem $W(x) = 2x^7 + x^2 - 3x$ jest wielomianem stopnia 7. Współczynniki tego wielomianu są równe odpowiednio $a_7 = 2$, bo taka liczba stoi przy x^7 , $a_6 = a_5 = a_4 = a_3 = 0$, bo te potęgi x nie występują we wzorze funkcji, $a_2 = 1$, $a_1 = -3$ oraz $a_0 = 0$, gdyż wyraz wolny nie występuje we wzorze funkcji. Wzór tej funkcji moglibyśmy zapisać w postaci

$$W(x) = 2x^7 + 0 \cdot x^6 + 0 \cdot x^5 + 0 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 + x^2 - 3x + 0.$$

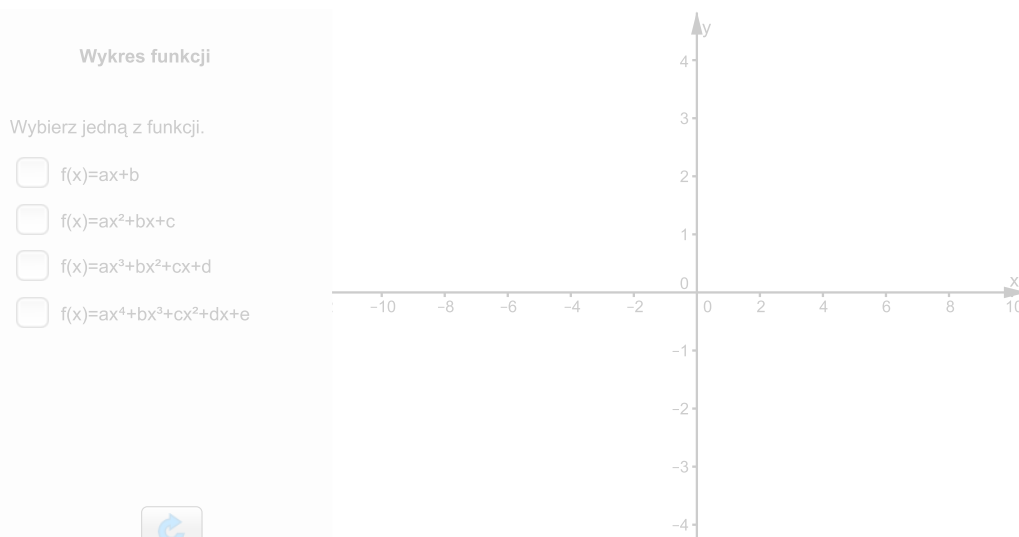
- Funkcja $P(x) = \sqrt{5}x + 5x^3 + 7x^2$ jest wielomianem stopnia 3, choć wielomian ten nie został zapisany w postaci uporządkowanej, jaką byłaby postać

$$P(x) = 5x^3 + 7x^2 + \sqrt{5}x.$$

- Funkcja $V(x) = 5x^3 + 7x^2 + \sqrt{5}x$ nie jest wielomianem, ponieważ we wzorze tej funkcji występuje $\sqrt{5}x$, czyli $\sqrt{5} \cdot x^{\frac{1}{2}}$, a więc zmienna x nie występuje tu w potęgę o wykładniku naturalnym.
- Funkcja $Q(x) = \frac{2}{x} + 3x^2$ nie jest wielomianem, gdyż $\frac{1}{x} = x^{-1}$ nie jest naturalną potęgą zmiennej x .
- Funkcja $R(x) = 5$ jest wielomianem stopnia zerowego.

Przykład 2

Przyjrzyj się wykresom niektórych funkcji wielomianowych.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DFCwJv2Pf>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 3

Wielomian jest funkcją zmiennej x . Możemy obliczyć jego wartość dla danego argumentu x . Obliczmy na przykład wartość wielomianu $W(x) = x^3 - 2x$ dla $x = -2$ oraz dla $x = -\sqrt{2}$.

- W miejsce x podstawiamy liczbę -2 i otrzymujemy

$$W(-2) = (-2)^3 - 2 \cdot (-2) = -8 + 4 = -4$$

- W miejsce x podstawiamy liczbę $-\sqrt{2}$ i otrzymujemy

$$W(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^3 - 2 \cdot (-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 0$$

Zauważmy, że $W(-\sqrt{2}) = 0$, zatem liczba $x = \sqrt{2}$ jest miejscem zerowym wielomianu $W(x) = x^3 - 2x$. Miejsce zerowe wielomianu nazywamy często, podobnie jak miejsce zerowe funkcji kwadratowej, pierwiastkiem tego wielomianu.

Na wielomianach możemy wykonywać różne działania, między innymi możemy je dodawać, odejmować i mnożyć. Działania na wielomianach wykonujemy podobnie jak działania na wyrażeniach algebraicznych.

Przykład 4

Dodamy wielomiany $V(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3$ oraz $P(x) = -2x^2 + x - 7$.

Suma tych wielomianów jest równa

$$V(x) + P(x) = (2x^3 - 3x^2 + 3) + (-2x^2 + x - 7)$$

Wyrazy podobne to takie składniki sumy, w których x występuje w tej samej potęgze. W rozważanej sumie występują dwie pary wyrazów podobnych

$$V(x) + P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3 - 2x^2 + x - 7$$

Wyrazy podobne redukujemy, a więc

$$-3x^2 - 2x^2 = -5x^2$$

oraz

$$+3 - 7 = -4$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$V(x) + P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x - 4$$

Zatem sumą wielomianów $V(x)$ i $P(x)$ jest również wielomian.

Przykład 5

Odejmijmy wielomiany $V(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3$ i $P(x) = -2x^2 + x - 7$.

Różnica wielomianów $V(x)$ i $P(x)$ jest równa

$$V(x) - P(x) = (2x^3 - 3x^2 + 3) - (-2x^2 + x - 7)$$

Zapiszmy tę różnicę bez użycia nawiasów, pamiętając, że znak minus przed drugim nawiasem powoduje, że opuszczając go, zmieniamy znaki wszystkich składników sumy w tym nawiasie na przeciwne.

$$V(x) - P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3 + 2x^2 - x + 7$$

Następnie, tak jak przy dodawaniu, wykonujemy redukcję wyrazów podobnych. Otrzymujemy

$$V(x) - P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3 + 2x^2 - x + 7 = 2x^3 - x^2 - x + 10$$

Zatem różnica dwóch wielomianów też jest wielomianem.

Przykład 6

Pomnożymy wielomiany $W(x) = x^3 - 2x$ oraz $Q(x) = 3x - 5$.

Ich iloczyn jest równy

$$W(x) \bullet Q(x) = (x^3 - 2x) \cdot (3x - 5)$$

Mnożymy każdy wyraz sumy z pierwszego nawiasu przez każdy wyraz sumy z drugiego nawiasu

$$x^3 \bullet 3x + x^3 \bullet (-5) - 2x \bullet 3x - 2x \bullet (-5)$$

Po uporządkowaniu wyrażenia, otrzymujemy

$$W(x) \bullet Q(x) = 3x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 10x$$

Zatem iloczyn dwóch wielomianów też jest wielomianem.

Przykład 7

Wykonamy działania

$$\begin{aligned}(x^2 - 3)^2 - 2x(x^3 - 2x + 4) &= (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 3 + 3^2 - 2x \cdot x^3 - 2x \cdot (-2x) - 2x \cdot 4 = \\ &= x^4 - 6x^2 + 9 - 2x^4 + 4x^2 - 8x\end{aligned}$$

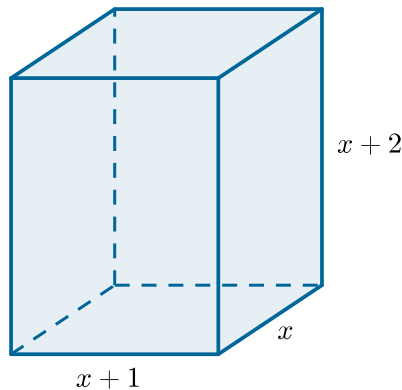
Wykonamy redukcję wyrazów podobnych.

$$x^4 - 6x^2 + 9 - 2x^4 + 4x^2 - 8x = -x^4 - 2x^2 - 8x + 9$$

Przykład 8

Długości krawędzi prostopadłościanu są kolejnymi liczbami całkowitymi. Jakim wzorem wyrazi się pole powierzchni i objętość tego prostopadłościanu w zależności od długości najkrótszej krawędzi prostopadłościanu?

Oznaczmy przez x długość najkrótszej krawędzi prostopadłościanu. Wtedy pozostałe dwie krawędzie są równe $x + 1$ oraz $x + 2$, gdzie x jest liczbą naturalną dodatnią.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przeciwnie ściany prostopadłościanu są przystającymi prostokątami. Zatem pole P_c powierzchni całkowitej prostopadłościanu jest równe

$$1) + 2x(x+2) + 2(x+1)(x+2) = 2x^2 + 2x + 2x^2 + 4x + 2(x^2 + x + 2x + 2) = 4x^2 + 6x + 2x^2 + 2x + 4x + 4 =$$

Objętość v tego prostopadłościanu jest równa

$$v = x(x+1)(x+2) = (x^2 + x)(x+2) = x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x = x^3 + 3x^2 + 2x$$

Przykład 9

Wyznacz wszystkie wartości a , dla których wartość wielomianu

$$W(x) = ax^3 + (1 - a^2)x^2 + 5ax + 3a + 3$$

dla argumentu 2 jest równa 3.

Chcemy wyznaczyć wszystkie te wartości parametru a , dla których $W(2) = 3$. Podstawiamy więc 2 w miejsce x i otrzymujemy

$$a \cdot 2^3 + (1 - a^2) \cdot 2^2 + 5a \cdot 2 - 3a + 3 = 3$$

Przekształcając to równanie do postaci

$$8a + 4 - 4a^2 + 10a - 3a + 3 = 0$$

a następnie porządkując je, otrzymujemy równanie kwadratowe

$$-4a^2 + 15a + 4 = 0$$

dla którego $\Delta = 289$. Równanie to ma więc dwa rozwiązania $a_1 = \frac{-15-17}{-8} = 4$ oraz $a_2 = \frac{-15+17}{-8} = -\frac{1}{4}$.

Ćwiczenie 1

$W(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ oraz $V(x) = -x^2 + 3x - 1$. Wtedy wielomian $W(x) - V(x)$ jest równy

☐ $x^3 + 4x$

☐ $x^3 - 2x^2 - 2x - 2$

☐ $x^3 + 2x^2 - 2x + 2$

☐ $3x^3 - 2x + 2$

Ćwiczenie 2

Wartość wielomianu $W(x) = (x^4 - 9)(x + 3)$ dla argumentu $\sqrt{3}$ jest równa

☐ $-6(\sqrt{3} + 3)$

☐ $-18\sqrt{3}$

☐ 0

☐ $6(\sqrt{3} + 3)$

Ćwiczenie 3

Który z podanych wielomianów dla argumentu $x = -2$ przyjmuje wartość 0 ?

☐ $W(x) = -2x^3 + 4x^2$

☐ $W(x) = x^3 - 2x^2$

☐ $W(x) = 2x^4 + x^3 - 2x$

☐ $W(x) = x^4 + 2x^3$

Ćwiczenie 4

Wielomian $W(x) = 2x^4 - ax^3 + x^2 - a$ dla argumentu -2 przyjmuje wartość -1 . Wtedy

☐ $a = -2$

☐ $a = 2,5$

☐ $a = -\frac{37}{7}$

☐ $a = 3$

Ćwiczenie 5

Dla wielomianu $W(x) = x^4 - 2x^2 + 7$

☐ $W(100) = W(-100)$

☐ $W(2) > W(-2)$

☐ $W(0) > 7$

☐ $W(1) > W(-3)$

Ćwiczenie 6

Wybierz wielomian, który przyjmuje tylko wartości ujemne.

☐ $W(x) = -x^4 - x^2 - 2$

☐ $W(x) = -x^5 + 1$

☐ $W(x) = -x^5 - x^3$

☐ $W(x) = x^2 - x^4$

Ćwiczenie 7

Wielomian $W(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5$ jest sumą wielomianu $P(x) = x^4 + 4x^2 + 5$ oraz wielomianu $Q(x)$.
Wtedy

☐ $Q(x) = -x^4 + 2x^3$

☐ $Q(x) = x^4 - 8x^2$

☐ $Q(x) = -x^4 + 2x^3 - 8x^2$

☐ $Q(x) = x^4 + 2x^3 + 10$

Ćwiczenie 8

Wielomian $W(x) = (2 - 3x)(2 + 3x)(4 + 9x^2)$ jest równy

☐ $(4 + 9x^2)^2$

☐ $16 - 81x^4$

☐ $(4 - 9x^2)^2$

☐ $16 + 81x^4$

Ćwiczenie 9

Dane są wielomiany $W(x) = 3x^7 + 4x^3 - 2x^5$ oraz $V(x) = 2x^7 - 2x^5 - x^3$. Wtedy

☐ $W(x) - V(x) = x^7 + 5x^3$

☐ $W(x) + V(x) = 5x^7 + 3x^3 - 4x^5$

☐ $W(x) + V(x) = 5x^7 + 2x^3 - 3x^5$

Ćwiczenie 10

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐ Funkcja $V(x) = 2^x + 7$ jest wielomianem stopnia 2.

☐ Funkcja $P(x) = 7x$ jest wielomianem stopnia 1.

☐ Funkcja $W(x) = \sqrt{7}x^3 + 2x - 9$ jest wielomianem stopnia 9.

Ćwiczenie 11

Wykonaj działanie $W(x) \cdot V(x)$, gdy $W(x) = -4x^5 + 2x^4 + x^3$ oraz $V(x) = x^2 - 2x$.

Ćwiczenie 12

Dane są wielomiany $P(x) = -3x^3 - 3x^2 + 7$ oraz $Q(x) = 2x^3 + 3x^2$. Oblicz.

1. $P(x) + Q(x)$

2. $P(x) - Q(x)$

3. $2P(x) - 3Q(x)$

4. $P(x) \cdot Q(x)$

Ćwiczenie 13

Oblicz wartość wielomianu $W(x) - 3V(x) + 2P(x)$ dla $x = -1$, gdy

$$W(x) = 3x^5 - x^4 + 6x^2$$

$$V(x) = x^5 + x^4 + 2x$$

$$P(x) = 3x^4 - 3x + 7$$

Ćwiczenie 14

Znajdź wielomian $W(x) = V(x) \cdot P(x) - 2Q(x)$ i określ jego stopień, jeżeli $V(x) = 2x - 3$, $P(x) = x^2 + 3$, $Q(x) = x^3 - 3x^2 - 7$.

Ćwiczenie 15

Sprawdź, które z liczb $a = 0$, $b = 7$, $c = 4$ są pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^3 - 7x^2$.

Ćwiczenie 16

Dla jakiej wartości a wartość wielomianu $W(x) = x^5 - 5x^3 + (a^2 - 1)x - 7$ dla argumentu $x = 2$ jest równa 1.

Ćwiczenie 17

Dla jakiej wartości a wielomian $W(x) = ax^3 - (5 - a)x^2 - a^2x$ przyjmuje dla argumentu -1 taką samą wartość jak wielomian $P(x) = 5x^4 + 7x$?

Ćwiczenie 18

Udowodnij, że wielomiany $P(x) = (x^2 - 9)(x^2 - 16)$ oraz $Q(x) = (x^2 - x - 12)(x^2 + x - 12)$ przyjmują taką samą wartość dla dowolnej liczby rzeczywistej x .

Ćwiczenie 19

Udowodnij, że dla dowolnego x wartość wielomianu $W(x) = -x^4 + 10x^2 - 25$ jest liczbą niedodatnią.

Ćwiczenie 20

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x takiej, że $|x| \neq \sqrt{3}$ wartość wielomianu $W(x) = -x^4 + 6x^2 - 9$ jest liczbą ujemną.

Równania stopnia trzeciego w postaci iloczynu

Poszukiwanie miejsc zerowych funkcji W sprowadza się najczęściej do rozwiązania równania $W(x) = 0$. Do tej pory rozwiązywaliśmy takie równania, w których $W(x)$ był wielomianem stopnia pierwszego – wtedy otrzymywaliśmy równanie liniowe. Jeżeli $W(x)$ był wielomianem stopnia drugiego, otrzymywaliśmy równanie kwadratowe. Teraz dowiesz się, jak rozwiązywać niektóre z równań, w których występuje wielomian stopnia wyższego niż dwa. Nie jest to zadanie łatwe. Dla dowolnych wielomianów stopnia piątego lub wyższego takie metody w ogóle nie istnieją. Pokażemy więc, jak możesz sobie poradzić w pewnych szczególnych przypadkach.

Przykład 1

Rozwiążemy równania:

- $x^3 + 64 = 0$

Odejmujemy od obu stron równania liczbę 64 i otrzymujemy równanie $x^3 = -64$. Jedyną liczbą spełniającą to równanie jest $x = \sqrt[3]{-64} = -4$.

- $2x^4 - 162 = 0$

$$2x^4 = 162$$

$$x^4 = 81$$

Jedyną dodatnią liczbą, która spełnia to równanie, jest $x = \sqrt[4]{81} = 3$, co wynika z definicji pierwiastka. Zauważmy, że jeżeli wykładnik k potęgi x^k jest parzysty, to $x^k = (-x)^k$, co oznacza, że jeśli liczba 3 jest rozwiązaniem równania $x^4 = 81$, to również liczba -3 jest rozwiązaniem tego równania, bo $(-3)^4 = 3^4 = 81$. Równanie ma zatem dwa rozwiązania $x = 3$ oraz $x = -3$.

- $x^6 + 64 = 0$.

Zauważmy, że to równanie jest sprzeczne, gdyż lewa strona tego równania jest sumą nieujemnej liczby x^6 oraz 64. Jest więc nie mniejsza niż 64 dla dowolnej liczby x . Nie może więc równać się 0.

Twierdzenie: Rozwiązanie równania $x^n = a$

Dla liczby naturalnej dodatniej n , większej od 1, oraz liczby rzeczywistej $a \neq 0$ równanie $x^n = a$ ma

- jedno rozwiązanie równe $x = \sqrt[n]{a}$, gdy n jest liczbą nieparzystą,
- dwa rozwiązania równe $x = \sqrt[n]{a}$ oraz $x = -\sqrt[n]{a}$, gdy n jest liczbą parzystą oraz a jest liczbą dodatnią,

- zero rozwiązań, gdy n jest liczbą parzystą oraz a jest liczbą ujemną.

Przykład 2

Udowodnij, że równanie $-x^4 - x^2 - 5 = 0$ jest równaniem sprzecznym.

Zauważmy, że lewa strona równania jest sumą niedodatniej liczby $-x^4$, niedodatniej liczby $-x^2$ oraz ujemnej liczby -5 , więc jest liczbą ujemną. Nie może więc być równa 0.

Przejdziemy teraz do rozwiązywania równań, których jedna ze stron jest iloczynem wielomianów, a druga strona jest równa 0. Będziemy tu korzystać z faktu, że iloczyn jest równy 0 wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jeden z czynników tego iloczynu jest równy 0.

Przykład 3

Rozwiążemy równania

- $x(x - 4)(x + 2) = 0$

Lewa strona równania jest iloczynem trzech czynników. Jeśli iloczyn ten równa się zero, to co najmniej jeden z czynników jest równy zero, czyli $x = 0$ lub $x - 4 = 0$ lub $x + 2 = 0$. Stąd wynika, że równanie ma trzy rozwiązania $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ oraz $x_3 = -2$.

- $(x^2 - 16)(2x^2 + 9x - 5)(x^4 + 4) = 0$

W tym równaniu także lewa strona jest iloczynem trzech czynników, a prawa strona jest równa zero. Tak jak poprzednio wnioskujemy, że co najmniej jeden z czynników musi być równy zero, czyli $x^2 - 16 = 0$ lub $2x^2 + 9x - 5 = 0$ lub $x^4 + 4 = 0$. Rozwiązujemy kolejno otrzymane równania.

$x^2 - 16 = 0$ przekształcamy równoważnie, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia, do równania

$$(x - 4)(x + 4) = 0$$

Stąd $x - 4 = 0$ lub $x + 4 = 0$. Otrzymujemy więc dwa rozwiązania $x_1 = 4$ oraz $x_2 = -4$.

$$2x^2 + 9x - 5 = 0$$

jest równaniem kwadratowym, którego $\Delta = 121$. Równanie to ma więc dwa rozwiązania

$$x_1 = \frac{-9-11}{4} = -5$$

oraz

$$x_2 = \frac{-9+11}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x^4 + 4 = 0$$

zgodnie z podanym wcześniej twierdzeniem, nie ma rozwiązań.

Zatem rozpatrywane równanie ma cztery rozwiązania $x_1 = 4$, $x_2 = -4$, $x_3 = -5$ oraz

$$x_4 = \frac{1}{2}.$$

Teraz pokażemy, jak niektóre równania doprowadzić do takiej postaci, jaką miały równania omawiane w poprzednim przykładzie.

Przykład 4

Rozwiążemy równanie $x^3 + x^2 - 6x = 0$.

Wyłączając x przed nawias, otrzymujemy równanie

$$x(x^2 + x - 6) = 0,$$

którego lewa strona jest iloczynem dwóch czynników, a prawa jest równa zero. Zatem co najmniej jeden z tych czynników jest równy zero, czyli $x = 0$ lub $x^2 + x - 6 = 0$.

Rozwiązujemy drugie równanie.

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-6) = 25$$

Ponieważ $\Delta > 0$, więc równanie to ma dwa rozwiązania $x_1 = \frac{-1-5}{2} = -3$ oraz $x_2 = \frac{-1+5}{2} = 2$. Rozwiązane równanie ma więc trzy rozwiązania $x_1 = 0$, $x_2 = -3$ oraz $x_3 = 2$.

Przykład 5

Rozwiążemy równanie

$$x^4 - 8x^2 + 16 = 0$$

Zauważmy, że lewą stronę możemy zapisać, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia, w następujący sposób

$$(x^2 - 4)^2 = 0$$

Korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów, otrzymujemy kolejno

$$[(x - 2)(x + 2)]^2 = 0$$

$$(x - 2)^2(x + 2)^2 = 0$$

Stąd wnioskujemy, że $(x - 2)^2 = 0$ lub $(x + 2)^2 = 0$, czyli $x - 2 = 0$ lub $x + 2 = 0$. Zatem $x = 2$ lub $x = -2$.

Przykład 6

Rozwiążemy równanie

$$x^4 - x^3 - 8x + 8 = 0$$

Żeby rozwiązać to równanie, pogrupujemy wyrazy. W tym celu wyłączmy przed nawias x^3 z dwóch pierwszych wyrazów oraz -8 z dwóch ostatnich. W ten sposób otrzymamy

równanie równoważne

$$x^3(x-1) - 8(x-1) = 0,$$

w którym lewa strona jest różnicą dwóch iloczynów. W każdym z tych iloczynów występuje wspólny czynnik $(x-1)$. Gdy wyłączymy go przed nawias, otrzymamy równanie

$$(x-1)(x^3-8) = 0$$

W ten sposób otrzymaliśmy równanie, którego lewa strona jest iloczynem dwóch czynników, a prawa jest równa zero. Stąd otrzymujemy $x_1 - 1 = 0$ lub $x^3 - 8 = 0$. Pierwsze równanie spełnia jedynie liczba $x = 1$. Drugie równanie przekształcimy do postaci $x^3 = 8$. Jedyną liczbą, która spełnia to równanie, jest $x_2 = \sqrt[3]{8} = 2$. Ostatecznie otrzymaliśmy dwa rozwiązania $x_1 = 1$ oraz $x_2 = 2$ rozwiązywanego równania.

Ćwiczenie 1

Połącz w pary.

$$x^3 - 5x^2 + 7x - 3$$

$$(x-1)^2(x-2)$$

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2$$

$$(x+1)^2(x-2)$$

$$3x^4 - 3$$

$$(x-1)^2(x-3)$$

$$x^3 - 3x - 2$$

$$(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

$$3(x^2-1)(x^2+1)$$

$$x^2 - 1$$

$$(x-1)(x+1)$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2

Dane są wielomiany:

$$W(x) = x^2 - 3x$$

$$P(x) = x^3 + 5x^2.$$

$$Q(x) = x^4 + 3x^2$$

$$R(x) = 5x$$

Połącz w pary działania na wielomianach z odpowiadającymi im wynikami.

$$5x^3 - 15x^2$$

$$P(x) - Q(x)$$

$$-x^4 + x^3 + 2x^2$$

$$W(x) + R(x)$$

$$x^3 + 6x^2 - 3x$$

$$W(x) - Q(x)$$

$$x^2 + 2x$$

$$W(x) \cdot R(x)$$

$$-x^4 - 2x^2 - 3x$$

$$P(x) \cdot R(x)$$

$$5x^4 + 25x^3$$

$$W(x) + P(x)$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3

Połącz w pary wielomian z jego stopniem.

$$2$$

$$(x + 4)^2(x - 4)^2$$

$$8$$

$$x^3(x - 2)(x - 3)^2$$

$$9$$

$$(x - 1)(x + 2)(x + 3)$$

$$7$$

$$(2x - 1)^8(x + 2)$$

$$4$$

$$2(x + 2)(x - 3)$$

$$3$$

$$(x^2 + 5)(x^2 + 4)^3$$

$$5$$

$$x(x^2 + 3)^3$$

$$6$$

$$2x(x + 2)^3(x + 5)$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5

Dane są wielomiany $W(x) = (x - 3)(x + 1)$, $V(x) = (x - 3)(x - 1)$. Wtedy równanie $W(x) \cdot V(x) = 0$ ma

☐ 2 rozwiązania

☐ 4 rozwiązania

☐ 1 rozwiązanie

☐ 3 rozwiązania

Ćwiczenie 6

Liczby x_1 , x_2 , x_3 są rozwiązaniami równania $(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 0$. Jeżeli $x_1 < x_2 < x_3$, to

☐ $x_1 = x_2 + x_3$

☐ $x_1 \cdot x_2 < x_3$

☐ $2x_1 + x_2 = -4$

☐ $x_3 = x_1 + x_2$

Ćwiczenie 7

Wybierz równanie, które ma dwa różne rozwiązania całkowite.

☐ $x(x^2 - 4) = 0$

☐ $x(x - 3)(2x + 1) = 0$

☐ $(x^2 - 2)(x^2 - 3) = 0$

☐ $x^4 - 2 = 0$

Ćwiczenie 8

Liczby -1 i 3 są jedynymi rozwiązaniami równania

☐ $(x^2 - 2x - 3)(x - 3) = 0$

☐ $5(x - 1)(x + 3) = 0$

☐ $(x^2 - 2x + 1)(x - 3)^2 = 0$

☐ $2x(x^2 - 2x - 3) = 0$

Ćwiczenie 9

Równanie $x^5 - 9 = 9x^3 - x^2$ ma dokładnie

☐ trzy rozwiązania $x = -3, x = -1, x = 3$

☐ cztery rozwiązania $x_1 = -3, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = 3$

☐ dwa rozwiązania $x = 1, x = 9$

☐ jedno rozwiązanie $x = 1$

Ćwiczenie 10

Wielomian $W(x) = x(x-1)(x-3) - (3-x)$ można zapisać w postaci

☐ $W(x) = (x-3)(x^2 - x + 1)$

☐ $W(x) = x(x-1)(x-3)(3-x)$

☐ $W(x) = (x-3)(x^2 - x - 1)$

☐ $W(x) = (3-x)(x-1)^2$

Ćwiczenie 11

Równanie $3x^4 - x^2 = 0$ można zapisać w postaci równoważnej

☐ $x^2(3x-1)^2 = 0$

☐ $x^2(3x-1)(3x+1) = 0$

☐ $(\sqrt{3}x-1)(\sqrt{3}x+1)x^2 = 0$

☐ $x(\sqrt{3}x-1)(\sqrt{3}x+1) = 0$

Ćwiczenie 12

Równanie $-4x^4 - 6x^3 + 18x^2 = 0$ można zapisać w postaci równoważnej

☐ $-2x^2(2x - 3)(x - 3) = 0$

☐ $-2x^2(2x - 3)(x + 3) = 0$

☐ $2x^2(2x - 3)(x + 3) = 0$

☐ $2x^2(2x + 3)(x - 3) = 0$

Ćwiczenie 13

Liczba wszystkich rozwiązań równania $x^2(2x^2 - 7)(x^2 + 16) = 0$ jest równa

☐ trzy

☐ cztery

☐ pięć

☐ dwa

Ćwiczenie 14

Rozwiąż równanie.

1. $2x^3 - 432 = 0$

2. $\frac{5x^3}{2} + 160 = 0$

Ćwiczenie 15

Rozwiąż równanie.

1. $3x^4 - 48 = 0$

2. $x^6 - 27 = 0$

3. $5x^8 + 20 = 0$

Ćwiczenie 16

Rozwiąż równanie.

1. $7x^2(x + 3)^2(3x - 1) = 0$

2. $(4x^2 + 4x + 1)(x^2 + 10) = 0$

3. $(16x^2 - 9)(25x^4 - 1) = 0$

Ćwiczenie 17

Oblicz taką wartość m , dla której równanie $(x - 3)(3x + m) = 0$ ma tylko jedno rozwiązanie.

Ćwiczenie 18

Ile rozwiązań ma równanie $(x^4 - 16)(x^2 + 3x - 10) = 0$?

Ćwiczenie 19

Rozwiąż równanie.

1. $x^4 - 8x^3 + 16x^2 = 0$

2. $2x^3 - x^2 - x = 0$

3. $x^4 - 5x^3 + 7x^2 = 0$

Ćwiczenie 20

Rozwiąż równanie.

1. $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

2. $x^4 + 6x^3 + x^2 + 6x = 0$

3. $3x^3 + 4x^2 - 6x - 8 = 0$

4. $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

Ćwiczenie 21

Uzasadnij, że iloczyn pierwiastków równania $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$ jest dodatni.

Ćwiczenie 22

Uzasadnij, że suma rozwiązań równania $x^{50} + x^2 = 50x^{48} + 50$ jest liczbą całkowitą.

Ćwiczenie 23

Przez jaki wielomian trzeba pomnożyć wielomian $W(x) = x^2 - 4$, żeby otrzymać wielomian $V(x) = x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 8$?

Ćwiczenie 24

Udowodnij, że jeżeli liczba 2 jest rozwiązaniem równania

$(x - 2)^2(x + 7) - x(x^2 - ax + a) = 0$, to równanie to nie ma więcej rozwiązań.

Wyrażenia wymierne. Równania wymierne

Wyrażenia wymierne

Rozważając zależności między różnymi wielkościami, mamy do czynienia również z takimi, w których występują wyrażenia wymierne. Na przykład wartość prędkości średniej obliczamy jako iloraz drogi i czasu, w którym ta droga została przebyta.

Przykład 1

Miejscowości A i B są odległe o 154 km. W połowie drogi między nimi znajduje się miejscowość C . Rowerzysta przejechał drogę z A do C , przy czym wartość jego średniej prędkości na trasie z A do C była o 6 km/h większa niż wartość średniej prędkości na trasie z C do B .

Przyjmując, że wartość średniej prędkości tego rowerzysty na trasie z C do B była równa v km/h, wyrazimy za pomocą v wartość jego średniej prędkości na całej trasie z A do B . Z warunków zadania wnioskujemy, że czas t_1 (w godzinach) przejazdu rowerzysty z A do C to

$$t_1 = \frac{77}{v+6}$$

Natomiast czas t_2 (w godzinach) jego przejazdu z C do B to

$$t_2 = \frac{77}{v}$$

Zatem średnia prędkość V tego rowerzysty na trasie z A do B jest równa

$$V = \frac{154}{\frac{77}{v+6} + \frac{77}{v}}$$

Wyrażenie to przekształcamy następująco

$$\frac{154}{\frac{77}{v+6} + \frac{77}{v}} = \frac{154}{\frac{77v+77(v+6)}{(v+6)v}} = \frac{154(v+6)v}{77(v+v+6)} = \frac{154(v+6)v}{77 \cdot 2(v+3)} = \frac{(v+6)v}{v+3}$$

Wobec tego

$$V = \frac{(v+6)v}{v+3}$$

W powyższym przykładzie przy zapisie czasów t_1 i t_2 oraz prędkości średniej V wystąpiły wyrażenia wymierne $t_1 = \frac{77}{v+6}$, $t_2 = \frac{77}{v}$, $V = \frac{(v+6)v}{v+3}$. Każde z nich jest zapisane w postaci ilorazu, a w mianowniku każdego z tych wyrażeń występuje zmienna v . Zauważmy, że dla każdej wartości v (która jako wartość prędkości jest dodatnia), wyrażenia te są określone. Gdyby na przykład ten rowerzysta jechał z C do B ze średnią prędkością $v = 22$ km/h, to jego średnia prędkość na trasie z A do C byłaby równa

28 km/h, a średnia prędkość na całej trasie z A do B – $V = \frac{28 \cdot 22}{25} \text{ km/h} = 24,64 \text{ km/h}$. Nie jest to, jak widać, średnia arytmetyczna wartości prędkości na trasach z A do B i z B do C .

Przykład 2

Rowerzysta przejechał drogę z A do B . W połowie drogi między miejscowościami A i B znajduje się miejscowość C . Przyjmując, że na trasie z A do C rowerzysta jechał ze średnią prędkością $v_1 \text{ km/h}$, a na trasie z C do B – ze średnią prędkością $v_2 \text{ km/h}$, zapiszemy wartość jego średniej prędkości na całej trasie z A do B .

Oznaczmy przez s drogę z A do B .

Z warunków zadania wnioskujemy, że czas t_1 (w godzinach) przejazdu rowerzysty z A do C to

$$t_1 = \frac{\frac{s}{2}}{v_1} = \frac{s}{2v_1}$$

Natomiast czas t_2 (w godzinach) jego przejazdu z C do B to

$$t_2 = \frac{\frac{s}{2}}{v_2} = \frac{s}{2v_2}$$

Zatem średnia prędkość V tego rowerzysty na trasie z A do B jest równa

$$V = \frac{s}{t_1 + t_2} = \frac{s}{\frac{s}{2v_1} + \frac{s}{2v_2}} = \frac{s}{\frac{sv_2 + sv_1}{2v_1v_2}} = \frac{s \cdot 2v_1v_2}{s(v_1 + v_2)},$$

czyli wyraża się wzorem

$$V = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$$

Liczba $\frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$ to tzw. średnia harmoniczna liczb dodatnich v_1, v_2 .

Przykład 3

Wielkość dodatnia a jest wyrażona w zależności od wielkości dodatnich b i c następującym wzorem

$$a = \frac{3bc}{b+2c}$$

Przyjmując, że to jest możliwe, wyrazimy

1. b w zależności od a i c
2. c w zależności od a i b

Przekształcamy dany wzór do postaci $a(b+2c) = 3bc$, stąd $ab + 2ac = 3bc$. Zatem

1. $2ac = 3bc - ab$, a więc $b \cdot (3c - a) = 2ac$, co oznacza, że $b = \frac{2ac}{3c-a}$, gdy $3c - a \neq 0$.
2. $ab = 3bc - 2ac$, a więc $c \cdot (3b - 2a) = ab$, co oznacza, że $c = \frac{ab}{3b-2a}$, gdy $3b - 2a \neq 0$.

Równanie wymierne

Równaniem wymiernym z niewiadomą x nazywamy równanie, które można sprowadzić do postaci

$$\frac{W_1(x)}{W_2(x)} = 0$$

gdzie W_1, W_2 są wielomianami, przy czym W_2 jest wielomianem co najwyżej pierwszego stopnia

$$W_2(x) \neq 0$$

Rozwiążemy kilka takich równań.

Przykład 4

Rozwiążemy równanie

$$\frac{2}{3x+1} = \frac{1}{8}$$

Wyrażenie $\frac{2}{3x+1}$, zapisane po lewej stronie równania, jest określone, gdy $x \neq -\frac{1}{3}$.

Mnożymy obie strony danego równania przez $8 \cdot (3x + 1)$ bo $8 \cdot (3x + 1) \neq 0$, stąd

$$3x + 1 = 2 \cdot 8$$

Oznacza to, że $3x = 15$, czyli $x = 5$. Dla tej wartości x obie strony równania są określone, więc liczba 5 jest szukany rozwiązaniem danego równania.

Uwaga. Po zapisaniu warunku $x \neq -\frac{1}{3}$ można skorzystać z własności proporcji i w ten sposób przekształcić równoważnie dane równanie do postaci

$$3x + 1 = 2 \cdot 8$$

Przykład 5

Rozwiążemy równanie

$$\frac{2}{x+1} = \frac{3}{x-2}$$

Wyrażenia zapisane w równaniu: $\frac{2}{x+1}$ i $\frac{3}{x-2}$ są określone, gdy $x \neq -1$ i $x \neq 2$.

Ponieważ $(x + 1)(x - 2) \neq 0$, to mnożymy obie strony danego równania przez $(x + 1) \cdot (x - 2)$, stąd

$$2(x - 2) = 3(x + 1)$$

Otrzymujemy $2x - 3x = 3 + 4$, czyli -7 . Dla tej wartości x obie strony równania są określone, więc liczba $x = -7$ jest szukanym rozwiązaniem danego równania.

Przykład 6

Rozwiążemy równanie

$$\frac{x+1}{x-5} = \frac{3x-8}{2x+8}$$

Wyrażenia zapisane w równaniu: $\frac{x+1}{x-5}$ i $\frac{3x-8}{2x+8}$ są określone, gdy $x \neq 5$ i $x \neq -4$.

Mnożymy obie strony danego równania przez $(x-5) \cdot (2x+8)$, stąd

$$(2x+8)(x+1) = (x-5)(3x-8)$$

Wobec tego

$$2x^2 + 10x + 8 = 3x^2 - 23x + 40$$

$$x^2 - 33x + 32 = 0$$

Ponieważ wyróżnik tego równania jest dodatni: $\Delta = 33^2 - 4 \cdot 32 = 961 = 31^2$, więc równanie ma dwa rozwiązania:

$$x_1 = \frac{33-31}{2} = 1 \text{ oraz } x_2 = \frac{33+31}{2} = 32.$$

Dla tych wartości x obie strony równania są określone, więc równanie $\frac{x+1}{x-5} = \frac{3x-8}{2x+8}$ ma dwa rozwiązania: 1 oraz 32.

Przykład 7

Uzasadnimy, że żadna liczba całkowita nie jest rozwiązaniem równania $\frac{x}{x-1} = 2x - 3$.

Wyrażenie $\frac{x}{x-1}$ jest określone, gdy $x \neq 1$.

Mnożymy obie strony danego równania przez liczbę $x-1$ różną od zera, stąd

$$x = (2x-3)(x-1)$$

Wobec tego

$$x = 2x^2 - 3x - 2x + 3$$

$$2x^2 - 6x + 3 = 0$$

Wyróżnik tego równania jest dodatni: $\Delta = 36 - 24 = 12$, więc równanie ma dwa rozwiązania.

Ponieważ $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}$ jest liczbą niewymierną, to każde z tych rozwiązań

$$x_1 = \frac{6-2\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ oraz } x_2 = \frac{6+2\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

jest liczbą niewymierną. Zatem równanie $\frac{x}{x-1} = 2x - 3$ nie ma rozwiązań w zbiorze liczb całkowitych.

Przykład 8

Rozwiążemy równanie $\frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{4}{x(x+1)} + \frac{3x-2}{x(x-1)}$.

Wyrażenia $\frac{2}{(x-1)(x+1)}$, $\frac{4}{x(x+1)}$ i $\frac{3x-2}{x(x-1)}$ zapisane w równaniu są określone, gdy $x \neq 0$, $x \neq 1$ i $x \neq -1$.

Mnożymy obie strony danego równania przez $x \cdot (x+1) \cdot (x-1)$ wyrażenie różne od zera, stąd

$$2x = 4(x-1) + (3x-2)(x+1)$$

Wobec tego

$$2x = 4x - 4 + 3x^2 - 2x + 3x - 2$$

$$3x^2 + 3x - 6 = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

Ponieważ wyróżnik tego równania jest dodatni: $\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-2) = 9 = 3^2$, więc równanie ma dwa rozwiązania

$$x_1 = \frac{-1-3}{2} \text{ oraz } x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1.$$

Tylko dla wartości $x = -2$ obie strony równania $\frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{4}{x(x+1)} + \frac{3x-2}{x(x-1)}$ są określone, więc to równanie ma jedno rozwiązanie: $x_1 = -2$.

Przykład 9

Rozwiążemy równanie $\frac{1}{(x-4)(x-1)} + \frac{1}{(x-1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+5)} = \frac{1}{12}$.

Na początku odnotujmy, że wyrażenia zapisane po obu stronach danego równania są określone, gdy $x \neq 4$, $x \neq 1$, $x \neq -2$, $x \neq -5$.

Przedstawimy dwa sposoby rozwiązywania tego równania.

- sposób I

Przekształcamy lewą stronę równania. Dodajemy wyrażenia w parach: najpierw pierwsze do drugiego, a następnie otrzymaną sumę z trzecim:

$$\left(\frac{x+2}{(x-4)(x-1)(x+2)} + \frac{x-4}{(x-4)(x-1)(x+2)} \right) + \frac{1}{(x+2)(x+5)} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{2(x-1)}{(x-4)(x-1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+5)} = \frac{1}{12}$$

Pierwszy ułamek możemy skrócić, bo $x-1 \neq 0$

$$\frac{2}{(x-4)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+5)} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{2(x+5)}{(x-4)(x+2)(x+5)} + \frac{x-4}{(x-4)(x+2)(x+5)} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{3(x+2)}{(x-4)(x+2)(x+5)} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{3}{(x-4)(x+5)} = \frac{1}{12}.$$

Stąd

$$(x-4)(x+5) = 36,$$

czyli

$$x^2 + x - 56 = 0.$$

Otrzymane równanie ma dwa rozwiązania: $x_1 = 7$ oraz $x_2 = -8$. Dla tych wartości x obie strony danego równania są określone, zatem są to jedyne rozwiązania danego równania.

- sposób II

Zauważmy, że różnice wyrażeń zapisanych w mianownikach każdego z trzech ułamków stojących po lewej stronie równania są stałe i równe 3. Wykorzystamy ten fakt do przekształcenia równania. Pomnożymy najpierw obie strony równania przez 3:

$$\frac{3}{(x-4)(x-1)} + \frac{3}{(x-1)(x+2)} + \frac{3}{(x+2)(x+5)} = \frac{1}{4}$$

Następnie zapiszemy w liczniku różnice wyrażeń z mianownika

$$\frac{(x-1)-(x-4)}{(x-4)(x-1)} + \frac{(x+2)-(x-1)}{(x-1)(x+2)} + \frac{(x+5)-(x+2)}{(x+2)(x+5)} = \frac{1}{4}$$

Każde z trzech wyrażeń zapiszemy jako różnicę dwóch ułamków

$$\frac{(x-1)}{(x-4)(x-1)} - \frac{(x-4)}{(x-4)(x-1)} + \frac{(x+2)}{(x-1)(x+2)} - \frac{(x-1)}{(x-1)(x+2)} + \frac{(x+5)}{(x+2)(x+5)} - \frac{(x+2)}{(x+2)(x+5)} = \frac{1}{4}$$

a po skróceniu otrzymanych ułamków uporządkujemy lewą stronę równania

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+5} &= \frac{1}{4} \\ \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+5} &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Po pomnożeniu obu stron otrzymanego równania przez $4(x-4)(x+5)$ otrzymujemy:

$$4(x+5) - 4(x-4) = (x+5)(x-4)$$

$$4x + 20 - 4x + 16 = x^2 + 5x - 4x - 20$$

$$x^2 + x - 56 = 0$$

Jak wiemy z rozwiązania poprzednim sposobem, to równanie ma dwa rozwiązania:

$x_1 = 7$ oraz $x_2 = -8$. Są to jedyne rozwiązania równania

$$\frac{1}{(x-4)(x-1)} + \frac{1}{(x-1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+5)} = \frac{1}{12}$$

Przykład 10

Rozwiążemy równanie

$$\frac{1}{2x+3} + \frac{1}{2x+4} + \frac{1}{2x+5} + \frac{1}{2x+6} = 0$$

Wyrażenia zapisane po obu stronach danego równania są określone, gdy $x \neq -\frac{3}{2}, x \neq -2, x \neq -\frac{5}{2}, x \neq -3$.

Przekształcamy lewą stronę równania. Dodajemy wyrażenia parami: pierwsze do ostatniego, a drugie do trzeciego:

$$\frac{2x+6+2x+3}{(2x+3)(2x+6)} + \frac{2x+5+2x+4}{(2x+4)(2x+5)} = 0$$

Stąd

$$\frac{4x+9}{(2x+3)(2x+6)} + \frac{4x+9}{(2x+4)(2x+5)} = 0$$

$$(4x+9) \left(\frac{1}{(2x+3)(2x+6)} + \frac{1}{(2x+4)(2x+5)} \right) = 0$$

a więc $4x+9=0$ lub $\frac{1}{(2x+3)(2x+6)} + \frac{1}{(2x+4)(2x+5)} = 0$

Rozwiązując równanie $\frac{1}{(2x+3)(2x+6)} + \frac{1}{(2x+4)(2x+5)} = 0$, otrzymujemy

$$\frac{1}{(2x+3)(2x+6)} = \frac{-1}{(2x+4)(2x+5)}$$

$$(2x+4)(2x+5) = -(2x+3)(2x+6)$$

$$4x^2 + 18x + 19 = 0$$

stąd $x_1 = -\frac{9}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}, x_2 = -\frac{9}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}$. Zatem równanie ma dwa rozwiązania: $-\frac{9}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}$ oraz $-\frac{9}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}$.

Ćwiczenie 1

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2

Wyrażenie $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$ jest równe

☐ $\frac{1}{(x+1)(x+2)}$

☐ $\frac{3x}{(x+1)(x+2)}$

☐ $\frac{2x+3}{(x+1)(x+2)}$

☐ $\frac{1}{2x+3}$

Ćwiczenie 3

Rozwiązaniem równania $\frac{2x+1}{x-3} = \frac{3}{2}$ jest liczba

☐ 11

☐ -11

☐ -4

☐ 4

Ćwiczenie 4

Równanie $\frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = 0$

☐ ma dokładnie jedno rozwiązanie

☐ ma dokładnie dwa rozwiązania

☐ ma dokładnie trzy rozwiązania

☐ nie ma rozwiązań

Ćwiczenie 5

Wspólnym pierwiastkiem równań $\frac{2x-6}{x+1} = 0$ oraz $\frac{(x-3)(x+1)}{x-5} = 0$ jest liczba

☐ 3

☐ 5

☐ 1

☐ -1

Ćwiczenie 6

Jeśli $z = \frac{2x}{x+3y}$, to

☐ $x = \frac{z-2}{3yz}$

☐ $x = \frac{3yz}{2-z}$

☐ $x = \frac{3yz}{z-2}$

☐ $x = \frac{2-z}{3yz}$

Ćwiczenie 7

Rozwiązaniem równania $\frac{x+2}{x-2} = \frac{x-4}{x}$ jest liczba

☐ 2

☐ 3

☐ 4

☐ 1

Ćwiczenie 8

Wspólnym pierwiastkiem równań $\frac{x^2-16}{x^2+1} = 0$ oraz $\frac{x^2+4x}{x+2} = 0$ jest liczba

☐ 0

☐ 2

☐ -4

☐ 1

Ćwiczenie 9

Równanie $\frac{x^2+9}{x+9} = 0$

☐ ma dokładnie jedno rozwiązanie

☐ ma dokładnie trzy rozwiązania

☐ nie ma rozwiązań

☐ ma dokładnie dwa rozwiązania

Ćwiczenie 10

Rozwiąż równanie.

$$1. \frac{7}{x-2} = \frac{6}{x+3}$$

$$2. \frac{3}{x-5} = \frac{1}{x+4}$$

$$3. \frac{12}{7x+10} = \frac{5}{3x+4}$$

$$4. \frac{7}{4-3x} = \frac{5}{1-2x}$$

Ćwiczenie 11

Rozwiąż równanie.

$$1. \frac{x}{x+1} = \frac{x-1}{x+3}$$

$$2. \frac{8x+9}{11-4x} = \frac{7-2x}{x+3}$$

$$3. \frac{3x-4}{2-x} = \frac{7-6x}{2x+5}$$

Ćwiczenie 12

Wielkości x , y łączy zależność $xy + 2x - 3y + 5 = 0$. Wyraż

1. x w zależności od y i ustal, dla jakich y otrzymane wyrażenie jest określone

2. y w zależności od x i ustal, dla jakich x otrzymane wyrażenie jest określone

Ćwiczenie 13

Wielkości dodatnie a , b , c łączy zależność $a = \frac{b+2c}{b-c}$. Wyraż

1. b w zależności od a i c

2. c w zależności od a i b

Ćwiczenie 14

Rozwiąż równanie.

1. $\frac{x}{x+1} = x + 4$

2. $\frac{3x-1}{x-5} = 4x - 7$

Ćwiczenie 15

Rozwiąż równanie.

1. $\frac{2x-5}{x-1} = \frac{3x-3}{x+5}$

2. $\frac{2x+5}{x-4} = \frac{5x+12}{3x-6}$

3. $\frac{3x+1}{x+4} = \frac{9x-29}{4x-11}$

Ćwiczenie 16

Rozwiąż równanie.

1. $\frac{4}{x+3} + \frac{6}{x-3} = \frac{5x+11}{x^2-9}$

2. $\frac{3}{x+2} + \frac{4}{x-2} = \frac{7x+2}{x^2-4}$

3. $\frac{5}{x+1} - \frac{2}{x-1} = \frac{3x-7}{x^2-1}$

Ćwiczenie 17

Rozwiąż równanie.

$$1. \frac{4}{x+2} - \frac{7}{2-x} = \frac{11x+6}{x^2-4}$$

$$2. \frac{x}{x+2} - \frac{x-4}{2-x} = \frac{2-5x}{x^2-4}$$

$$3. \frac{x+1}{x+3} - \frac{x-2}{x-3} = \frac{2x-12}{x^2-9}$$

Ćwiczenie 18

Uzasadnij, że żadna liczba całkowita nie jest rozwiązaniem równania $\frac{2x}{3x-2} = 4x + 3$.

Ćwiczenie 19

Uzasadnij, że żadna liczba całkowita nie jest rozwiązaniem równania $\frac{x}{x+1} = 3x - 2$.

Ćwiczenie 20

Rozwiąż równanie.

$$1. \frac{2}{(x-3)(x+3)} - \frac{5}{x(x-3)} = \frac{x+4}{x(x+3)}$$

$$2. \frac{7}{(x-2)(x+5)} + \frac{x-4}{x(x-2)} = \frac{4}{x(x+5)}$$

Ćwiczenie 21

Rozwiąż równanie.

$$1. \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} = 0$$

$$2. \frac{1}{2x-5} + \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{2x+3} + \frac{1}{2x+7} = 0$$

Ćwiczenie 22

Rozwiąż równanie $\frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} = \frac{3}{10}$.

Ćwiczenie 23

Rozwiąż równanie.

$$1. \frac{1}{(x-5)(x-3)} + \frac{1}{(x-3)(x-1)} + \frac{1}{(x-1)(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+3)} = -\frac{1}{3}$$

$$2. \frac{1}{(x-5)(x-3)} + \frac{1}{(x-3)(x-1)} + \frac{1}{(x-1)(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+3)} = -\frac{1}{5}$$

Zastosowanie równań wymiernych do interpretacji zagadnień praktycznych

Praca i czas potrzebny na jej wykonanie

W poniższych przykładach prezentujemy zadania tekstowe dotyczące pracy i czasu potrzebnego na jej wykonanie.

Przypomnijmy, że praca to miara wysiłku włożonego w wytworzenie danego dobra, a efektem pracy jest pewna wartość ekonomiczna; w poniższych zadaniach jest to zazwyczaj wykonany towar lub usługa.

Przez wydajność pracy będziemy rozumieli wartość produkcji wytworzonej w określonym czasie (najczęściej w jednostce czasu, np. w ciągu jednego dnia, w ciągu jednej godziny).

W rozpatrywanych poniżej przykładach i zadaniach zakładamy, że średnia wydajność wykonywanej pracy przez opisanych w zadaniu robotników, firmy, automaty itp. nie zmienia się wraz z upływem czasu.

Przykład 1

Dwie firmy: firma A i firma B otrzymały do wykonania pewną pracę. Firma A samodzielnie wykonałaby tę pracę w ciągu 5 dni, a firma B sama wykonałaby tę pracę w ciągu 20 dni. W ciągu ilu dni wykonałyby tę pracę firmy A i B , pracując razem?

Z treści zadania wynika, że firma A wykonywałaby dziennie $\frac{1}{5}$ zaplanowanej pracy, a firma B – $\frac{1}{20}$ tej pracy. Oznacza to, że razem wykonywałaby dziennie $\frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ całej pracy. Zatem pracując razem, wykonałyby całą tę pracę w ciągu 4 dni.

Przykład 2

W firmie świadczącej usługi obróbki plastycznej są dwa różne automaty, które tłoczą plastikowe pojemniki o takiej samej wielkości i takim samym kształcie. Firma przyjęła zlecenie wykonania pewnej liczby takich pojemników. Gdyby oba automaty pracowały razem, to zlecenie zostałoby wykonane w ciągu 4 godzin. Gdyby zaś najpierw połowę tych detali wytłoczył pierwszy automat, to drugi, do zakończenia zleconej pracy musiałby pracować jeszcze przez 6 godzin. W ciągu ilu godzin pierwszy automat wytłoczyłby wszystkie pojemniki?

Ponieważ drugi automat w ciągu 6 godzin wykonał połowę zleconej pracy, więc na wykonanie wszystkich pojemników potrzebuje 12 godzin. Zatem w ciągu godziny automat ten wykonuje $\frac{1}{12}$ wszystkich pojemników.

Z treści zadania wynika, że oba automaty w ciągu godziny wykonują $\frac{1}{4}$ całej pracy, co oznacza, że pierwszy automat wykonuje w tym czasie $\frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ wszystkich

pojemników. Wobec tego pierwszy automat wytłoczyłby wszystkie pojemniki w ciągu 6 godzin.

Przykład 3

Firma budowlana planowała w ciągu 10 dni wykonać prace wykończeniowe w budowanym bloku mieszkalnym. W tym celu zatrudniła dwa zespoły robotników: zespół A i zespół B . Po 4 dniach od rozpoczęcia wspólnej pracy zespół A zrezygnował z udziału w tym przedsięwzięciu, więc zespół B sam dokończył tę pracę, na co potrzebował jeszcze 9 dni. W ciągu ilu dni każdy z tych zespołów wykonałby tę pracę samodzielnie?

Z treści zadania wynika, że w ciągu 4 dni wspólnej pracy zespoły wykonały $4 \cdot \frac{1}{10}$ całej pracy. Do wykonania zostało jeszcze $\frac{6}{10}$ całej pracy, którą zespół B wykonał w ciągu 9 dni. Zatem zespół B wykonywał w ciągu jednego dnia $\frac{6}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{15}$ całej pracy, czyli samodzielnie wykonałby całe zamówienie w ciągu 15 dni. Oznacza to, że zespół A wykonywał w ciągu jednego dnia $\frac{1}{10} - \frac{1}{15} = \frac{1}{30}$ całej pracy, czyli wykonałby samodzielnie całą tę pracę w ciągu 30 dni.

Przykład 4

Dwie firmy A i B podjęły się wyprodukować wspólnie w ciągu 12 dni ustaloną liczbę jednakowych okien. Firma A po dwóch dniach wycofała się z udziału w realizacji zamówienia, więc pozostałą część okien wyprodukowała firma B . W ciągu ilu dni zostało wykonane zamówienie, jeżeli dzienna produkcja firmy B stanowi $\frac{2}{3}$ dziennej produkcji firmy A ?

Oznaczmy przez a – liczbę okien, które w ciągu jednego dnia produkuje firma A . Wtedy dzienna produkcja firmy B to $\frac{2}{3}a$, a obie firmy produkują razem $a + \frac{2}{3}a = \frac{5}{3}a$ okien dziennie.

Ponieważ według planu całe zamówienie miało być wykonane przez obie firmy w ciągu 12 dni, więc do wykonania było $12 \cdot \frac{5}{3}a = 20a$ okien.

W ciągu dwóch dni obie firmy wykonały razem $2 \cdot \frac{5}{3}a = \frac{10}{3}a$ okien. Zatem firmie B pozostało do wykonania $20a - \frac{10}{3}a = \frac{50}{3}a$ okien.

Ponieważ dzienna wydajność firmy B to $\frac{2}{3}a$, więc firma B wykona tę pracę w ciągu $\frac{50}{3}a : \frac{2}{3}a = 25$ dni.

Oznacza to, że całe zamówienie zostało wykonane w ciągu 27 (dni).

Przykład 5

Dwa zespoły robotników: A i B mają wykonać pewną pracę. Zespół A samodzielnie wykonałby tę pracę o 7 dni szybciej niż pracujący samodzielnie zespół B .

Przyjmując, że x to liczba dni potrzebnych zespołowi A na samodzielne wykonanie tej pracy, wyrazimy za pomocą x tę część pracy, która zostanie wykonana w ciągu jednego dnia przez zespoły A i B pracujące razem.

Z warunków zadania otrzymujemy, że $x + 7$ to liczba dni, które zespół B potrzebuje na wykonanie zleconej pracy.

Zatem

- zespół A w ciągu jednego dnia wykonuje $\frac{1}{x}$ całej pracy,
- zespół B w ciągu jednego dnia wykonuje $\frac{1}{x+7}$ całej pracy.

Oznacza to, że oba zespoły, pracując razem, w ciągu jednego dnia wykonują $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+7}$ całej pracy.

Sprawdzając do wspólnego mianownika ułamki, wyrażenie to zapiszemy w postaci

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+7} = \frac{x+7+x}{x(x+7)} = \frac{2x+7}{x(x+7)}$$

W powyższym przykładzie pojawiły się wyrażenia wymierne $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x+7}$, $\frac{2x+7}{x(x+7)}$.

Zauważmy, że dla każdej wartości x (która jest liczbą dodatnią dni) wyrażenia te są określone.

Gdyby na przykład w opisanej sytuacji zespół A potrzebował na wykonanie całej pracy 21 dni, to zespół B potrzebowałby na jej wykonanie 28 dni. Ponieważ $\frac{1}{21} + \frac{1}{28} = \frac{1}{12}$, więc oba zespoły, pracując razem, wykonałyby całą pracę w ciągu 12 dni.

Zauważmy też, że w przedstawionej sytuacji za pomocą wyrażenia $\frac{x(x+7)}{2x+7}$ opisujemy liczbę dni potrzebnych do wykonania całej pracy przez zespoły A i B pracujące razem.

Przykład 6

Dwa automaty, pracując jednocześnie, wykonały pewną pracę. Pierwszy automat, aby wykonać tę pracę samodzielnie, musiałby pracować trzy razy dłużej, a drugi – o godzinę dłużej niż wtedy, gdy pracowały razem. W jakim czasie każdy z automatów może samodzielnie wykonać tę pracę?

Oznaczmy przez x – czas (w godzinach), w którym oba automaty razem wykonały pracę. Wtedy czas potrzebny pierwszemu automatowi i czas potrzebny drugiemu automatowi na samodzielne wykonanie tej pracy to odpowiednio $3x$ oraz $x + 1$.

Zatem w ciągu godziny:

- razem wykonają $\frac{1}{x}$ całej pracy,
- pierwszy wykona $\frac{1}{3x}$ całej pracy,
- drugi wykona $\frac{1}{x+1}$ całej pracy.

Otrzymujemy więc równanie

$$\frac{1}{3x} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x}$$

stąd

$$\frac{2}{3x} = \frac{1}{x+1}$$

$$(x > 0)$$

a więc $x = 2$.

Zatem pierwszy automat samodzielnie wykonałby pracę w ciągu 6 godzin, a drugi – w ciągu 3 godzin.

Przykład 7

Dwie firmy wykonały prace drogowe w ciągu 32 dni, przy czym najpierw połowę pracy wykonała tylko pierwsza firma, a następnie resztę pracy wykonała tylko druga firma. Gdyby obie firmy pracowały razem, to wykonałyby te prace w ciągu 15 dni. Ilu dni potrzebowałaby każda z tych firm na samodzielne wykonanie całej pracy?

Z treści zadania wynika, że wykonując po połowie pracy, obie firmy pracowały w sumie 32 dni, więc suma liczb dni, w ciągu których każda z firm wykonuje całą pracę, jest równa 64.

Oznaczmy przez x liczbę dni potrzebnych pierwszej firmie na wykonanie całej pracy, wtedy liczba dni potrzebnych drugiej firmie na wykonanie całej pracy to $64 - x$.

Oznacza to, że pierwsza firma wykonuje dziennie $\frac{1}{x}$ całej pracy, a druga $\frac{1}{64-x}$.

Otrzymujemy więc równanie

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{64-x} = \frac{1}{15}$$

stąd

$$15 \cdot (64 - x) + 15 \cdot x = x \cdot (64 - x)$$

$$x^2 - 64x + 960 = 0$$

Równanie to ma dwa rozwiązania: $x_1 = 24$ oraz $x_2 = 40$. Każde z nich spełnia warunki zadania.

Wynika z tego, że jedna z tych firm wykonałaby samodzielnie całe zlecenie w ciągu 24 dni, a druga – w ciągu 40 dni.

Przykład 8

Automat do obróbki plastycznej wykonał 720 metalowych detali, pracując na niższym poziomie wydajności. Gdyby przestawić ten automat na wyższy poziom wydajności, to w ciągu godziny będzie wykonywał o 40 detali więcej i tę samą liczbę detali wykona, pracując o 54 minuty krócej. W ciągu ilu godzin ten automat wykonał 720 detali?

Oznaczmy przez x czas, w ciągu którego automat wykonał wszystkie detale. Wtedy $\frac{720}{x}$ to liczba detali wykonanych przez ten automat w ciągu godziny.

Z treści zadania wynika, że na wyższym poziomie wydajności automat wytwarza

$(\frac{720}{x} + 40)$ detali na godzinę, a do wykonania 720 detali potrzebowalby $(x - \frac{9}{10})$ godziny.

Otrzymujemy więc równanie

$$(x - \frac{9}{10})(\frac{720}{x} + 40) = 720$$

stąd

$$720 - \frac{648}{x} + 40x - 36 = 720$$

$$40x - 36 - \frac{648}{x} = 0$$

$$10x^2 - 9x - 162 = 0$$

Równanie to ma dwa rozwiązania: $x_1 = 4\frac{1}{2}$ oraz $x_2 = -3\frac{3}{5}$. Tylko pierwsze z nich spełnia warunki zadania.

Wynika z tego, że automat wykonał 720 detali w ciągu 4,5 godziny.

Przykład 9

Dwa zespoły robotników w ciągu 14 godzin wykonały zlecone prace murarskie, pracując kolejno: najpierw tylko pierwszy, a następnie tylko drugi. Drugi zespół pracował wtedy $\frac{1}{10}$ tego czasu, w którym pierwszy wykonał tę pracę samodzielnie. Gdyby oba zespoły pracowały razem, to wykonałyby tę pracę w ciągu 4 godzin. Ilu godzin potrzebowalby każdy z tych zespołów, aby wykonać tę pracę samodzielnie?

Oznaczmy przez x – czas (w godzinach), w którym praca zostałaby wykonana, gdyby pracował tylko pierwszy zespół.

Drugi zespół pracował zatem przez $\frac{1}{10}x$ godzin, a więc pierwszy pracował przez $(14 - \frac{1}{10}x)$ godzin.

Ponadto wiemy, że oba zespoły, pracując razem, wykonałyby w ciągu godziny $\frac{1}{4}$ całej pracy i pierwszy zespół wykonałby w tym czasie $\frac{1}{x}$ całej pracy, więc drugi w ciągu godziny wykonałby $(\frac{1}{4} - \frac{1}{x})$ zleconej pracy.

Wobec tego otrzymujemy równanie

$$\frac{1}{10}x(\frac{1}{4} - \frac{1}{x}) + (14 - \frac{1}{10}x) \cdot \frac{1}{x} = 1$$

stąd

$$\frac{1}{40}x + \frac{14}{x} - \frac{6}{5} = 0$$

$$x^2 - 48x + 560 = 0$$

Równanie to ma dwa rozwiązania: $x_1 = 20$ oraz $x_2 = 28$. Oba spełniają warunki zadania. Mam więc dwie możliwości:

1. $x = 20$, wtedy zespół pierwszy do wykonania całej pracy potrzebuje 20 godzin, a drugi – 5 godzin,
2. $x = 28$, wtedy zespół pierwszy do wykonania całej pracy potrzebuje 28 godzin, a drugi – 4 godzin i 40 minut.

Przykład 10

Dwa różne automaty wykonują pewną pracę. Gdyby pierwszy automat pracował sam przez 3,5 godziny, to do zakończenia pracy oba automaty musiałyby pracować razem jeszcze przez 4,5 godziny. Drugi automat pracujący samodzielnie wykonuje tę pracę w czasie o 7 godzin krótszym niż pierwszy. W ciągu ilu godzin każdy z automatów może samodzielnie wykonać tę pracę?

Oznaczmy przez x – czas, w którym praca zostanie wykonana, gdy będzie pracował tylko I automat. Wtedy $(x - 7)$ to czas, w którym praca zostanie wykonana, gdy będzie pracował tylko II automat.

Stąd

$$\frac{3,5}{x} + 4,5\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-7}\right) = 1$$

co prowadzi do równania

$$2x^2 - 39x + 112 = 0$$

Równanie to ma dwa rozwiązania: $x_1 = 16$ oraz $x_2 = 3,5$. Tylko pierwsze z nich spełnia warunki zadania. Wobec tego pierwszy automat może samodzielnie wykonać tę pracę w ciągu 16 godzin, a drugi – w ciągu 9 godzin.

Przykład 11

Dwa automaty wykonały pewną pracę. Najpierw pracował tylko pierwszy, a potem pracę dokończył drugi. Pierwszy automat pracował wtedy $\frac{5}{9}$ tego czasu, w którym drugi automat może wykonać całą pracę.

Gdyby oba automaty pracowały razem, to wówczas wykonałyby całą pracę w czasie o 6 godzin i 40 minut krótszym, przy czym pierwszy automat wykonałby $\frac{4}{5}$ tej pracy, którą wykonałby wówczas drugi.

W jakim czasie każdy z automatów może wykonać tę pracę samodzielnie?

Oznaczmy:

przez x – czas (w godzinach), w którym praca zostanie wykonana, gdy będzie pracował tylko pierwszy automat,

przez y – czas (w godzinach), w którym praca zostanie wykonana, gdy będzie pracował tylko drugi automat.

Ponieważ w czasie wspólnej pracy pierwszy automat wykonuje $\frac{4}{5}$ pracy, którą wykonuje drugi, więc $y = \frac{4}{5}x$.

W ciągu godziny pierwszy automat wykonuje $\frac{1}{x}$ całej pracy, drugi – $\frac{1}{y}$ całej pracy.

Zatem, kiedy automaty pracowały jeden po drugim, to pierwszy automat wykonał $\frac{5}{9}y \cdot \frac{1}{x} = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{5}x \cdot \frac{1}{x} = \frac{4}{9}$ całej pracy.

Wobec tego drugi automat wykonał $\frac{5}{9}$ całej pracy, więc pracował przez $\frac{5}{9}y$ godzin.

Oznacza to, że cała praca została wykonana w ciągu

$$\frac{5}{9}y + \frac{5}{9}y = \frac{10}{9}y \text{ godzin.}$$

Stąd, wynika, że gdyby oba automaty pracowały razem, to wykonałyby całą pracę w ciągu $(\frac{10}{9}y - \frac{20}{3})$ godzin.

Zatem

$$\left(\frac{10}{9}y - \frac{20}{3}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1$$

$$\left(\frac{10}{9} \cdot \frac{4}{5}x - \frac{20}{3}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{4}{5}x}\right) = 1$$

$$\frac{8x-60}{9} \cdot \frac{9}{4x} = 1$$

$$8x - 60 = 4x$$

$$x = 15$$

Oznacza to, że pierwszy automat samodzielnie wykonałby tę pracę w ciągu 15 godzin, a drugi – w ciągu 12 godzin.

Ćwiczenie 1

Firma budująca pewien odcinek autostrady zatrudniła do prac geodezyjnych trzy zespoły: $G1$, $G2$ i $G3$. Zespół $G1$ wykonałby tę pracę w ciągu 12 dni, zespół $G2$ – w ciągu 15 dni, a zespół $G3$ – w ciągu 60 dni. W ciągu ilu dni zostaną wykonane prace geodezyjne, gdy wszystkie trzy zespoły będą pracować jednocześnie?

Ćwiczenie 2

Do wykonania pewnej pracy można użyć każdego z dwóch automatów. Pierwszy z nich samodzielnie wykonuje tę pracę w ciągu 4 godzin, a drugi – w ciągu 5 godzin. Oba automaty włączono do wspólnej pracy na 2 godziny. Ile czasu potrzebowalby każdy z tych automatów, żeby dokończyć pracę samodzielnie?

Ćwiczenie 3

W firmie świadczącej usługi obróbki plastycznej pracują trzy różne automaty, które tłoczą metalowe detale. Firma przyjęła zlecenie wykonania pewnej liczby takich detali. Gdyby automaty pracowały oddzielnie, to pierwszy z nich wykonałby zleconą liczbę detali w ciągu 16 godzin, drugi – w ciągu 10 godzin, a trzeci – w ciągu 24 godzin. Do wykonania tej pracy najpierw włączono na 2 godziny tylko pierwszy automat, następnie drugi pracował sam przez 5 godzin. Ile godzin musiał potem pracować trzeci automat, żeby dokończyć zleconą pracę?

Ćwiczenie 4

Do wykonania pewnej liczby detali można użyć każdego z dwóch automatów. Oba automaty, pracując jednocześnie, wykonałyby tę liczbę detali w ciągu 4 godzin. Gdyby pierwszy pracował samodzielnie przez 5 godzin, to oba automaty, aby wykonać wymaganą liczbę detali, musiałyby pracować jeszcze przez 3 godziny.

W jakim czasie każdy z automatów może samodzielnie wykonać tę liczbę detali?

Ćwiczenie 5

Pewna firma planowała wykonać w ciągu 12 dni prace zbrojeniowe przy budowie wiaduktu drogowego, wykorzystując do tego celu dwa zespoły zbrojarzy: zespół *A* i zespół *B*. Po 3 dniach od rozpoczęcia wspólnej pracy zespół *B* został przeniesiony do pracy w innym miejscu, więc zespół *A* dokończył tę pracę sam. W tych warunkach prace trwały dwa razy dłużej, niż planowano. W ciągu ilu dni każdy z tych zespołów robotników wykonałby samodzielnie zlecone prace zbrojeniowe?

Ćwiczenie 6

Dwa różne automaty wykonują razem daną pracę w ciągu 5 godzin. Gdyby najpierw przez 3 godziny pracował tylko pierwszy automat, a następnie przez 6 godzin pracował tylko drugi, to wykonałyby razem 70% całej pracy. W ciągu ilu godzin każdy z tych automatów wykonuje całą pracę?

Ćwiczenie 7

Dwa zespoły robotników, pracując wspólnie, wykonały pewną pracę. Aby wykonać tę pracę oddzielnie, pierwszy zespół musiałby pracować o 4 godziny dłużej, a drugi 3,5 raza dłużej niż wtedy, gdy pracowały razem. W jakim czasie każdy z tych zespołów może samodzielnie wykonać tę pracę?

Ćwiczenie 8

Do wykonania pewnej liczby detali można użyć każdego z dwóch automatów. Oba automaty, pracując jednocześnie, wykonałyby tę liczbę detali w ciągu 6 godzin. Gdyby pracowały kolejno: najpierw pierwszy samodzielnie wykonałby połowę detali, a następnie drugi samodzielnie dokończyłby pracę, to wymaganą liczbę detali wykonałyby w ciągu 16 godzin. W jakim czasie każdy z tych automatów może samodzielnie wykonać tę liczbę detali?

Ćwiczenie 9

Do zbiornika o pojemności 840 m^3 można doprowadzić wodę dwiema rurami. W ciągu jednej godziny pierwsza rura dostarcza do zbiornika o 7 m^3 wody więcej niż druga rura. Czas napełniania zbiornika wodą tylko z pierwszej rury jest o 6 godzin krótszy od czasu napełniania tego zbiornika wodą tylko z drugiej rury. Oblicz, w ciągu ilu godzin pusty zbiornik zostanie napełniony, jeśli woda będzie doprowadzana przez obie rury jednocześnie.

Ćwiczenie 10

Do zbiornika o pojemności 900 m^3 można doprowadzić wodę dwiema rurami. W ciągu jednej godziny pierwsza rura dostarcza do zbiornika o $7,5\text{ m}^3$ wody mniej niż druga rura. Czas napełniania zbiornika wodą tylko z pierwszej rury jest o 20 godzin dłuższy od czasu napełniania tego zbiornika wodą tylko z drugiej rury. Oblicz, w ciągu ilu godzin pusty zbiornik zostanie napełniony, jeśli woda będzie doprowadzana przez obie rury jednocześnie.

Ćwiczenie 11

Dwa różne automaty wykonują razem pewną pracę w ciągu 2 godzin. Pierwszy automat, pracując samodzielnie, potrzebuje na wykonanie tej pracy o 3 godziny mniej niż drugi automat pracujący samodzielnie. W ciągu ilu godzin każdy z automatów może samodzielnie wykonać tę pracę?

Ćwiczenie 12

Dwa różne automaty mają wykonać pewną pracę. Gdyby pierwszy automat pracował sam przez półtorej godziny, to aby dokończyć pracę oba automaty musiałyby pracować razem jeszcze przez 5,5 godziny. Pierwszy automat pracujący samodzielnie wykonuje tę pracę w czasie o 3 godziny dłuższym niż drugi automat pracujący samodzielnie. W ciągu ilu godzin każdy z automatów może samodzielnie wykonać tę pracę?

Ćwiczenie 13

Dwa różne automaty wykonały pewną liczbę detali, przy czym pierwszy automat najpierw przez godzinę pracował sam, a następnie oba razem pracowały jeszcze przez pewien czas. Po trzech godzinach od momentu rozpoczęcia pracy pierwszego automatu wykonano 45% całej pracy, a po jej zakończeniu okazało się, że każdy z automatów wykonał po tyle samo detali. W ciągu ilu godzin każdy z automatów może samodzielnie wykonać tę liczbę detali?

Ćwiczenie 14

Dwa automaty wykonały pewną pracę, pracując kolejno: najpierw tylko pierwszy, potem tylko drugi. Pierwszy automat pracował wtedy $\frac{5}{6}$ tego czasu, w którym drugi automat może wykonać całą pracę.

Gdyby oba automaty pracowały razem, to wówczas wykonałyby całą pracę w czasie o 8,5 godziny krótszym, przy czym pierwszy automat wykonałby $\frac{3}{5}$ tej pracy, którą wykonałby wówczas drugi. W jakim czasie każdy z automatów może wykonać tę pracę samodzielnie?

Proporcjonalność odwrotna

W rozdziale o funkcjach omówione zostały zależności wprost proporcjonalne. Teraz zajmiemy się wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi.

Przykład 1

Szkoła przeznaczyła kwotę 270 zł na wydruk ulotek promocyjnych. Ceny proponowane za usługę wydruku tej samej ulotki w różnych drukarniach zebrano w tabeli.

Tabela. Dane								
cena wydruku 1 ulotki (p) [zł]	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,40	0,45	0,50
liczba ulotek (r) [szt]	2700	1800	1350	1080	900	675	600	540

Za każdym razem koszt wydruku wszystkich ulotek jest taki sam: $p \bullet r = 270$.
Zauważmy, że im wyższa cena jednostkowa wydruku, tym mniej ulotek możemy wydrukować za podaną kwotę.

Przykład 2

Długość oddanej do użytku (do 2015 roku) autostrady A1 od węzła Łódź Północ (woj. łódzkie) do węzła Rusocin (woj. pomorskie) to ok. 300 km. Czas potrzebny na przejazd tego odcinka jest uzależniony od średniej prędkości, z jaką porusza się pojazd. Zależności między tymi wielkościami przedstawia tabela.

Tabela. Dane								
średnia prędkość (v) [km /h]	80	85	90	95	100	110	120	130
czas przejazdu (t) [h]	3,75	ok. 3,5	ok. 3,3	ok. 3,2	3	ok. 2,7	2,5	ok. 2,3

Zauważmy, że jeśli zwiększa się średnia prędkość samochodu (v), to czas przejazdu (t) jest coraz krótszy.



Czas potrzebny do pokonania tego odcinka jest uzależniony od średniej prędkości, z jaką porusza się pojazd.



średnia prędkość $v \left[\frac{\text{km}}{\text{h}} \right]$	80	85	90	95	100	110	120	130
czas $t \left[\text{h} \right]$	3,75	ok. 3,5	ok. 3,3	ok. 3,2	3	ok. 2,7	2,5	ok. 2,3

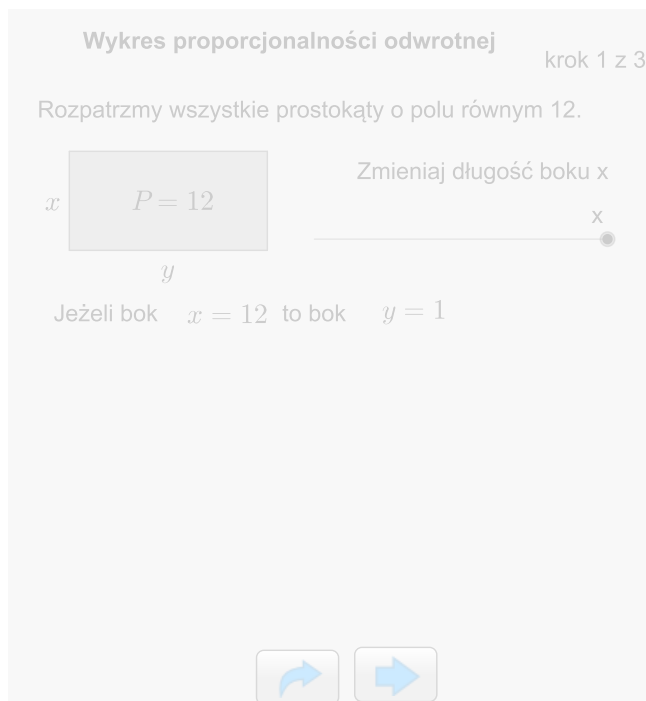
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja prezentuje samochód poruszający się po drodze zaznaczonej na mapie Polski. Długość oddanej do użytku (do 2015 roku) autostrady A1 od węzła Łódź Północ (woj. łódzkie) do węzła Rusocin (woj. pomorskie) to ok. 300 km. Czas przejazdu tego odcinka jest uzależniony od średniej prędkości v , z jaką porusza się pojazd. $v = 80$ kilometrów na godzinę, to czas przejazdu $t = 3,75$ godziny, $v = 85$ kilometrów na godzinę, to czas przejazdu t około 3,5 godziny, $v = 90$ kilometrów na godzinę, to czas przejazdu t około 3,3 godziny, $v = 95$ kilometrów na godzinę, to czas przejazdu t około 3,2 godziny, $v = 100$ kilometrów na godzinę, to czas przejazdu $t = 3$ godziny, $v = 110$ kilometrów na godzinę, to czas przejazdu t około 2,7 godziny, $v = 120$ kilometrów na godzinę, to czas przejazdu $t = 2,5$ godziny, $v = 130$ kilometrów na godzinę, to czas przejazdu t około 2,3 godziny. Zauważmy, że jeśli zwiększa się średnia prędkość samochodu (v), to czas przejazdu (t) jest coraz krótszy.

Przykład 3

Rozpatrzmy wszystkie prostokąty o bokach x , y , których pole jest równe 12.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DcN2NwaMD>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Pola prostokątów są równe $x \bullet y = 12$. Iloczyn jest stały, a zwiększenie długości jednego z boków powoduje proporcjonalne zmniejszenie długości drugiego boku.

Wielkości przedstawione w powyższych przykładach charakteryzują się tym, że wzrost jednej z nich powoduje takie zmniejszenie drugiej, że iloczyn tych wielkości pozostaje stały. O takich wielkościach będziemy mówić, że są odwrotnie proporcjonalne.

Definicja: Wielkości odwrotnie proporcjonalne

Mówimy, że dwie dodatnie wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn jest stały i różny od zera.

Definicja: Proporcjonalność odwrotna

Funkcja f opisująca zależność między dodatnimi wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi x i y nazywana jest proporcjonalnością odwrotną, a iloczyn $x \bullet y = a$ nazywany jest współczynnikiem proporcjonalności odwrotnej.

Z faktu, że liczby x i y są dodatnie, wynika, że współczynnik a także jest dodatni.

Zależność między wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi x i y możemy zapisać również w postaci $y = \frac{a}{x}$.

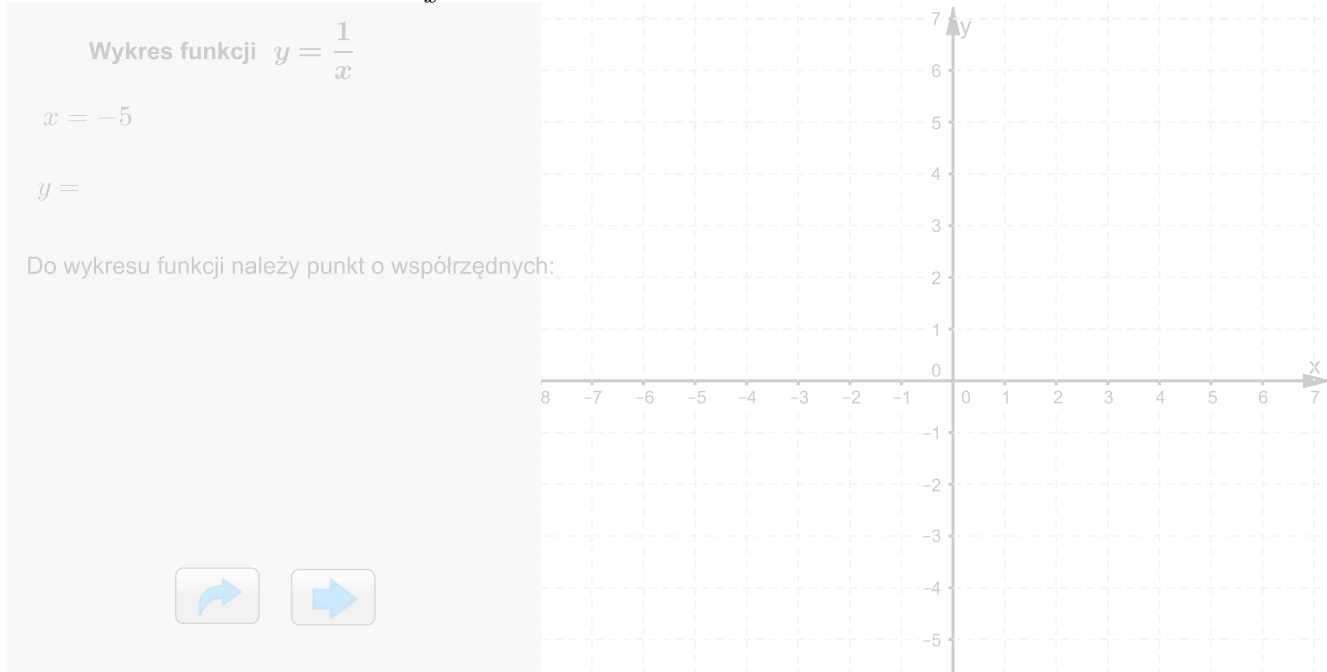
Wykres funkcji

Zajmiemy się teraz funkcjami opisanymi takim samym wzorem jak proporcjonalność odwrotna, czyli $f(x) = \frac{a}{x}$, ale określonymi dla dowolnej liczby $x \neq 0$. Przyjmiemy, że współczynnik $a \neq 0$. Przy $a = 0$ $f(x) = 0$ jest nieokreślona dla $x = 0$, więc jej dziedziną jest $R \setminus \{0\}$.

Zastanówmy się, jak wygląda wykres funkcji opisującej proporcjonalność odwrotną.

Przykład 1

Narysuj wykres funkcji $y = \frac{1}{x}$, gdy $x \neq 0$.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DMjeeayJi>

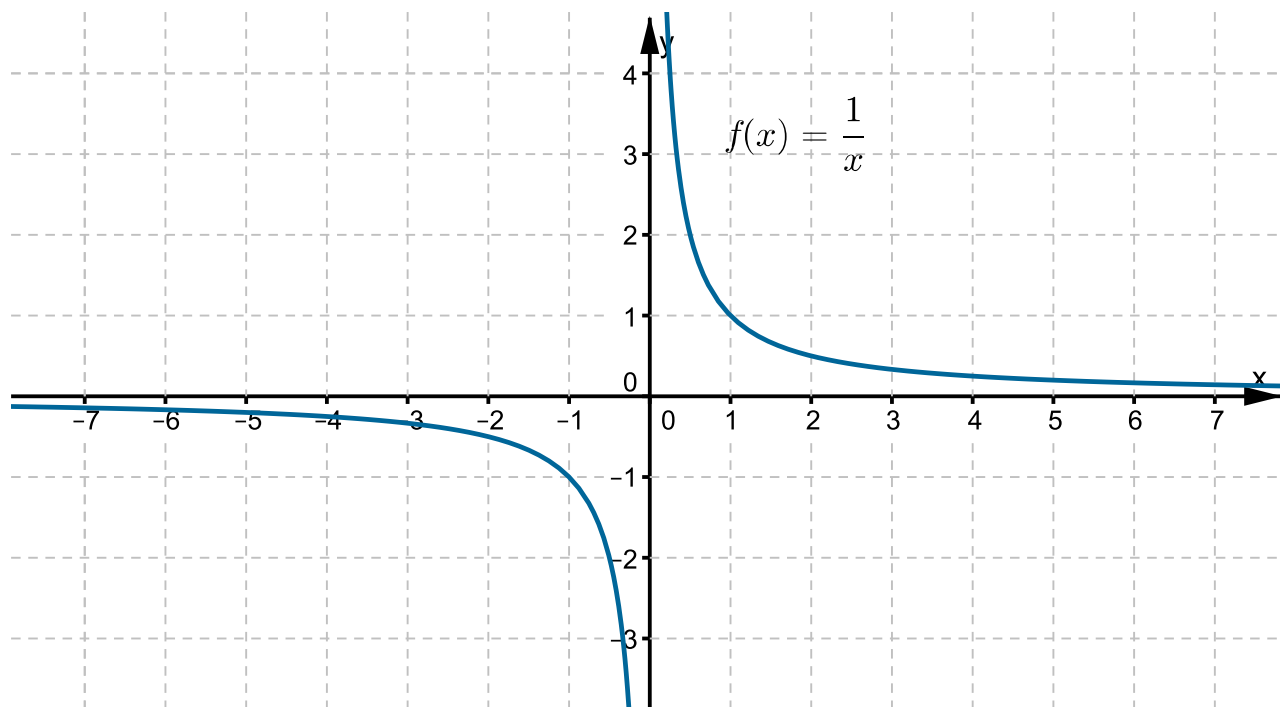
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Otrzymany wykres nazywamy hiperbolą. Hiperbola składa się z dwóch ramion położonych symetrycznie względem punktu $(0,0)$. Charakterystyczne dla tego wykresu jest to, że każde z jego ramion zbliża się do osi układu współrzędnych, ale w żadnym punkcie nie przecina ani osi Ox , ani Oy .

Przyjrzymy się innym własnościom funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$.

Przykład 2

Odczytaj z wykresu własności funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- Ramiona hiperboli leżą w *I* i *III* ćwiartce układu współrzędnych.
- Funkcja f jest określona dla wszystkich $x \neq 0$ (wykres funkcji nie przecina osi Oy).
- Zbiorem wartości jest przedział $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
- Funkcja f nie ma miejsc zerowych (wykres funkcji nie ma punktów wspólnych z osią Ox).
- Funkcja f jest malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$ oraz $(0, +\infty)$.
- Funkcja f przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów z przedziału $(0, +\infty)$ oraz wartości ujemne dla argumentów z przedziału $(-\infty, 0)$.

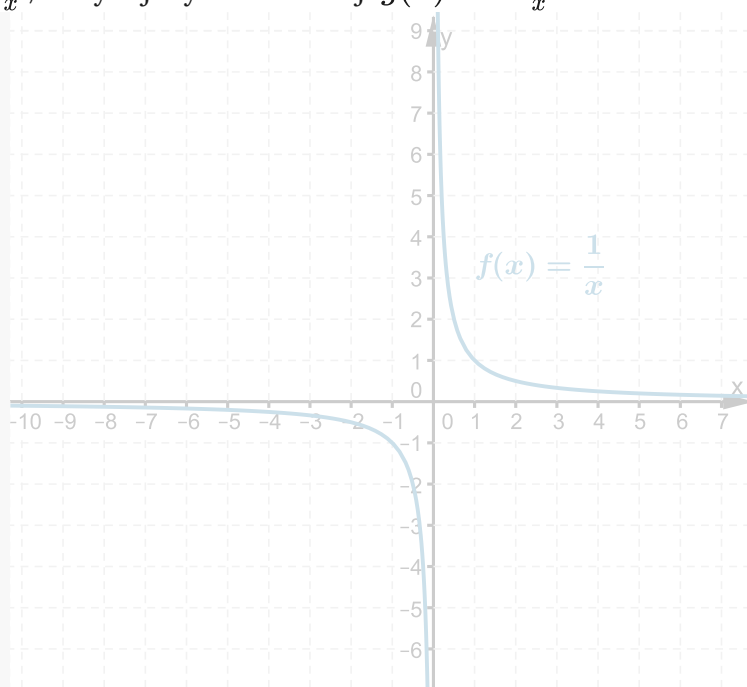
Przykład 3

Korzystając z wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$, narysuj wykres funkcji $g(x) = -\frac{1}{x}$.

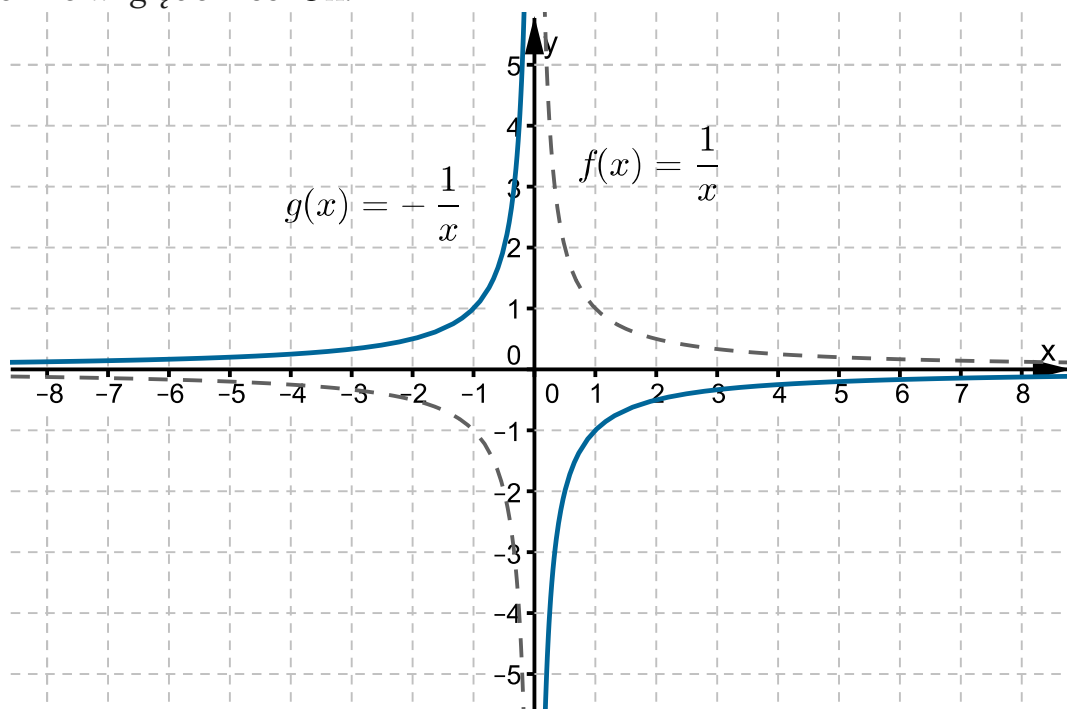
Wykres funkcji $g(x) = -\frac{1}{x}$

Zauważmy, że $g(x) = -f(x)$

zaćm wystarczy przekształćć hiperbolę symetrycznie względem osi Ox



Zauważmy, że $g(x) = -f(x)$, zatem wystarczy przekształcić hiperbolę $f(x) = \frac{1}{x}$ symetrycznie względem osi Ox .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Odczytamy z wykresu własności funkcji $g(x) = -\frac{1}{x}$.

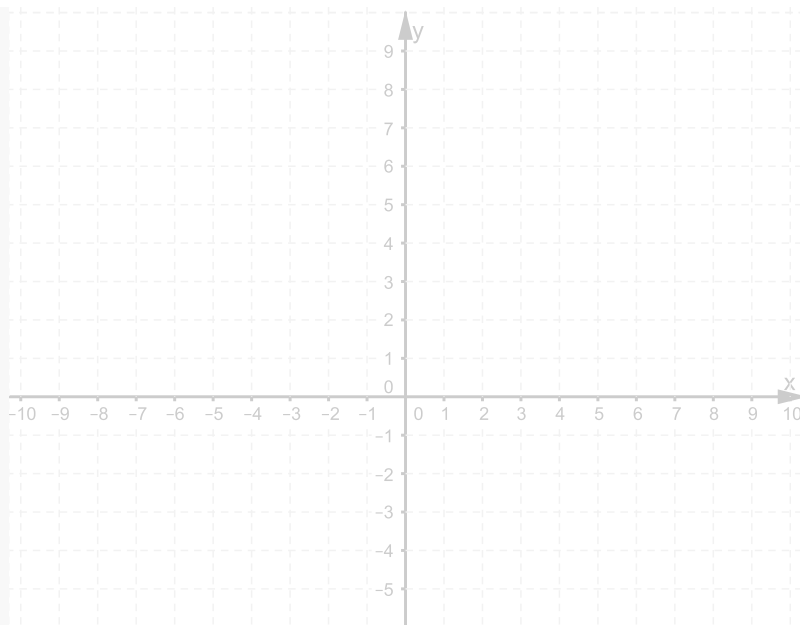
- Ramiona hiperboli leżą w II i IV ćwiartce układu współrzędnych.
- Funkcja g jest określona dla wszystkich $x \neq 0$ (wykres funkcji nie przecina osi Oy).
- Zbiorem wartości jest przedział $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
- Funkcja g nie ma miejsc zerowych (wykres funkcji nie ma punktów wspólnych z osią Ox).
- Funkcja g jest rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$ oraz $(0, +\infty)$.
- Funkcja g przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów z przedziału $(-\infty, 0)$ oraz wartości ujemne dla argumentów z przedziału $(0, +\infty)$.

Przykład 4

Wykres funkcji $y = \frac{a}{x}$
w zależności od współczynnika a

☐ $a > 0$

☐ $a < 0$

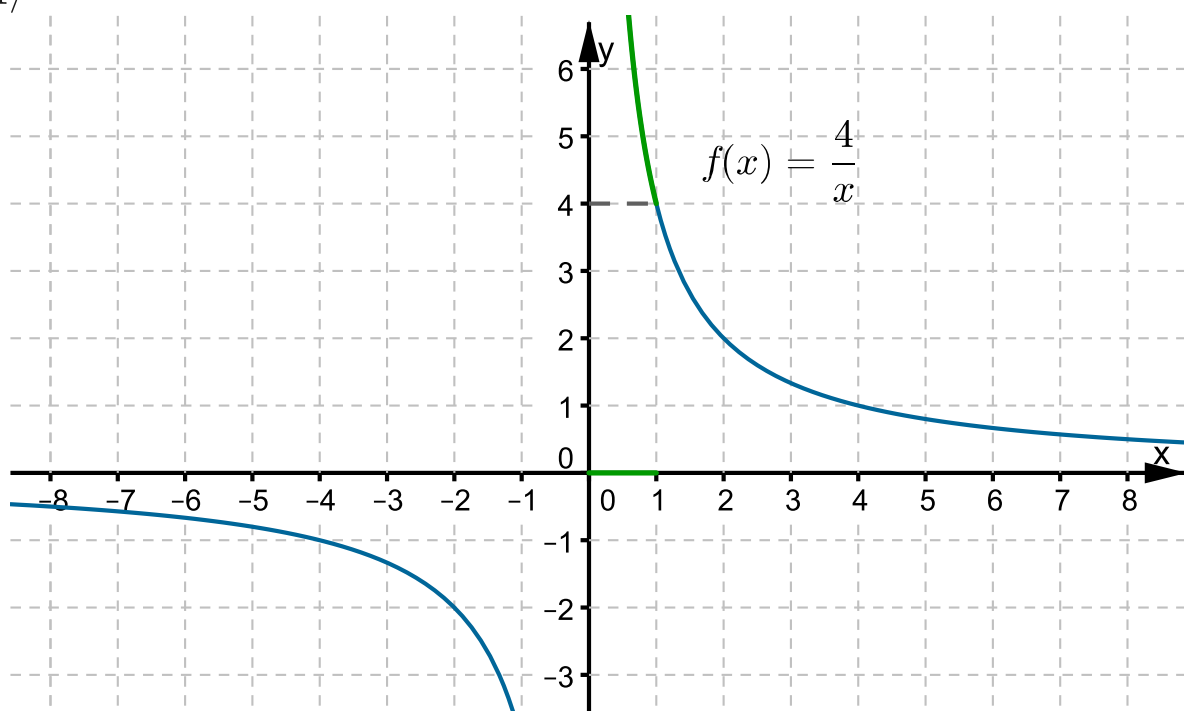


Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DMjeeayJi>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 5

Narysuj wykres $f(x) = \frac{4}{x}$. Odczytaj z wykresu najmniejszą wartość funkcji w przedziale $(0, 1)$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Odpowiedź. Najmniejsza wartość funkcji $f(x) = \frac{4}{x}$ w przedziale $(0, 1)$ jest równa 4.

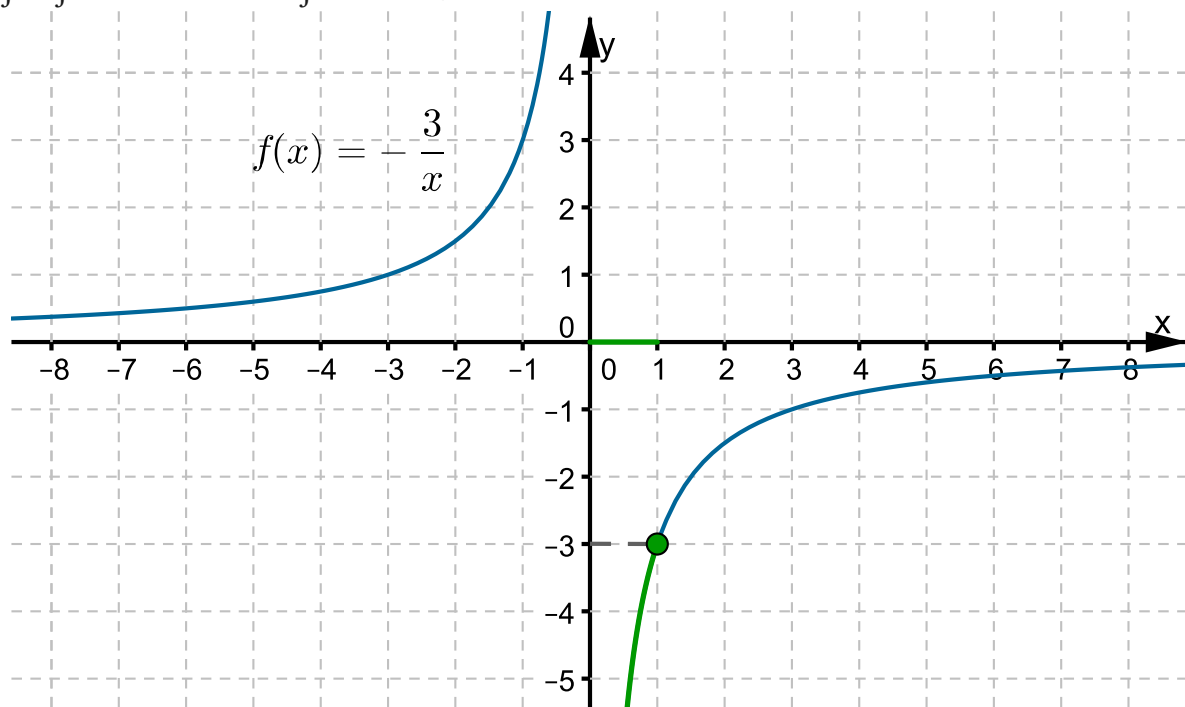
Przykład 6

Punkt $P = (3, -2)$ leży na wykresie proporcjonalności odwrotnej $f(x) = \frac{a}{x}$. Wyznacz wartość współczynnika a .

Z tego, że punkt $P = (3, -2)$ leży na wykresie $f(x) = \frac{a}{x}$, wynika, że $-2 = \frac{a}{3}$, czyli $a = -6$.

Przykład 7

Narysuj wykres funkcji $f(x) = -\frac{3}{x}$. Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości mniejsze od -3 .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Odpowiedź. Funkcja $f(x) = -\frac{3}{x}$ przyjmuje wartości mniejsze od -3 dla argumentów z przedziału $(0, 1)$.

Ćwiczenie 1

Połącz w pary wzór hiperboli z punktem, który do niej należy.

$$y = -\frac{4}{x-1} + 4$$

$$(-1, 1)$$

$$y = \frac{3}{x+2} + 2$$

$$(0, 0)$$

$$y = \frac{2}{x-\frac{1}{2}} + 4$$

$$(-3, -1)$$

$$y = \frac{1}{x} + 2$$

$$(2, 0)$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

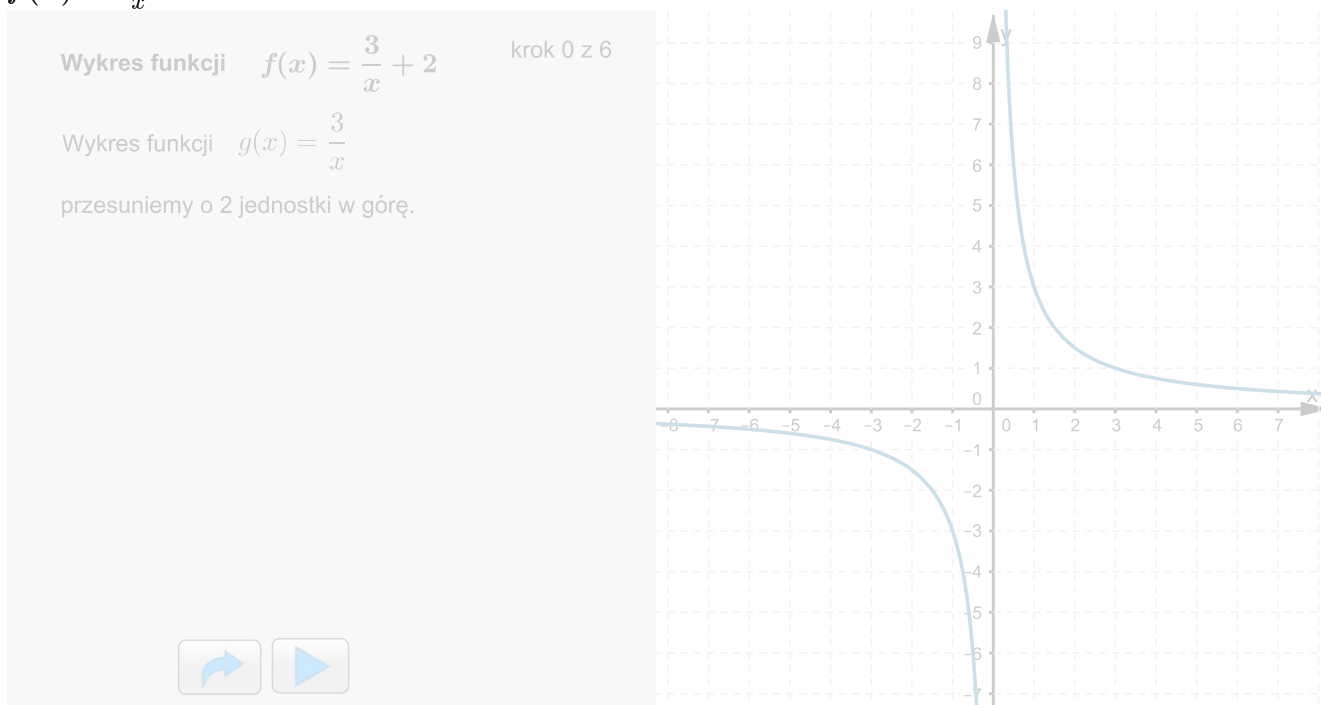
Przesunięcia wykresu wzdłuż osi układu współrzędnych

W rozdziale poświęconym własnościom funkcji mówiliśmy o przesuwaniu wykresu funkcji wzdłuż osi układu współrzędnych. Teraz wykorzystamy te wiadomości do przesuwania hiperboli.

Przykład 1

Narysuj wykres funkcji $f(x) = \frac{3}{x} + 2$.

Zauważmy, że do narysowania wykresu funkcji f możemy wykorzystać hiperbolę $g(x) = \frac{3}{x}$. Jeśli przesuniemy ją o 2 wzdłuż osi Oy, to otrzymamy wykres funkcji $f(x) = \frac{3}{x} + 2$.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DOxgZwRzU>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

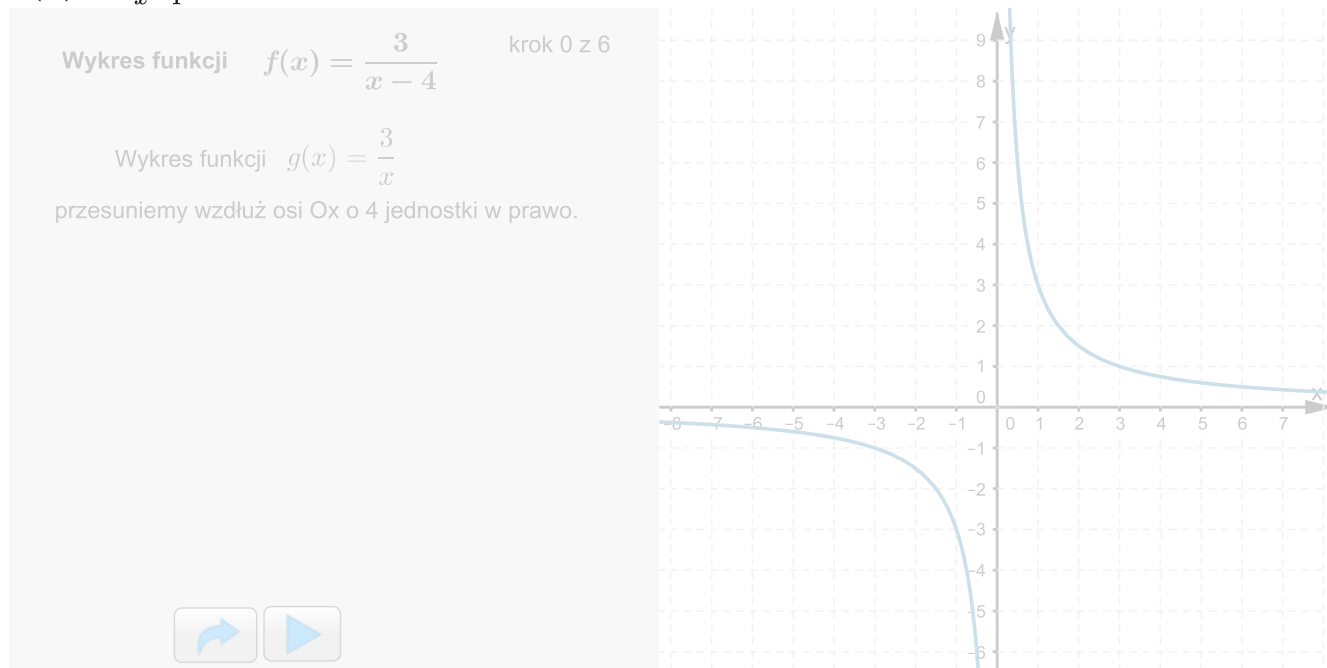
Na podstawie wykresu omówmy własności funkcji $f(x) = \frac{3}{x} + 2$.

- Funkcja f jest określona dla wszystkich $x \neq 0$ (wykres funkcji nie przecina osi Oy).
- Zbiorem wartości jest przedział $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.
- Miejscem zerowym funkcji jest $x_0 = -\frac{3}{2}$.
- Funkcja f jest malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$ oraz $(0, +\infty)$.
- Funkcja f przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów ze zbioru $(-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (0, +\infty)$ oraz wartości ujemne dla argumentów z przedziału $(-\frac{3}{2}, 0)$.

Przykład 2

Narysuj wykres funkcji $f(x) = \frac{3}{x-4}$.

Podobnie jak poprzednio do narysowania wykresu funkcji f wykorzystamy hiperbolę $g(x) = \frac{3}{x}$. Jeśli przesuniemy ją o 4 w prawo wzdłuż osi Ox , to otrzymamy wykres funkcji $f(x) = \frac{3}{x-4}$.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DOxgZwRzU>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Na podstawie wykresu omówmy własności funkcji $f(x) = \frac{3}{x-4}$.

- Funkcja f jest określona dla argumentów z przedziału $(-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$.
- Zbiorem wartości jest przedział $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
- Funkcja nie ma miejsca zerowego.
- Funkcja f jest malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty, 4)$ oraz $(4, +\infty)$.
- Funkcja f przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów z przedziału $(4, +\infty)$ oraz wartości ujemne dla argumentów z przedziału $(-\infty, 4)$.

Przykład 3

Narysuj wykres funkcji $f(x) = -\frac{3}{x-5} - 3$.

Do narysowania tego wykresu wykorzystamy wykres funkcji $g(x) = -\frac{3}{x}$ i jego przesunięcie o 5 wzdłuż osi Ox i -3 wzdłuż osi Oy .

Z wykresu możemy odczytać własności funkcji $f(x) = -\frac{3}{x-5} - 3$.

- Funkcja f jest określona dla argumentów z przedziału $(-\infty, 5) \cup (5, +\infty)$.
- Zbiorem wartości jest przedział $(-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$.
- Miejscem zerowym funkcji jest $x_0 = 4$.
- Funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty, 5)$ oraz $(5, +\infty)$.
- Funkcja f przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów z przedziału $(4, 5)$ oraz wartości ujemne dla argumentów ze zbioru $(-\infty, 4) \cup (5, +\infty)$.

Przykład 4

Przesuwanie hiperboli.

Przesuń wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$

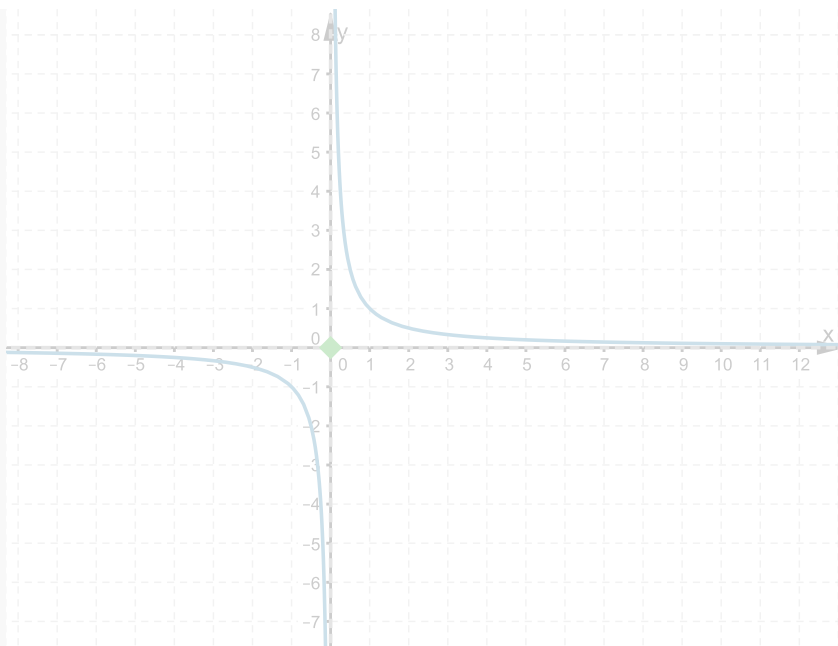
tak, aby otrzymać wykres funkcji g
o następujących własnościach:

1. dziedziną funkcji g jest

$$(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$$

2. zbiorem wartości funkcji g jest

$$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DOxgZwRzU>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Ćwiczenie 1

Sprawdź, który z punktów $A = \left(4, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B = \left(3^{\frac{3}{2}}, 2\right)$, $C = \left(\frac{-3\sqrt{3}}{2}, \frac{-3}{4}\right)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{x}$.

Ćwiczenie 2

Wyznacz współczynnik a tak, aby do wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ należał punkt o współrzędnych

1. $(-4, 2)$

2. $(4\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$

3. $(-\frac{3}{4}, -\frac{8}{27})$

4. $(25, \frac{1}{100})$

5. $(3\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{3})$

Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{-5}{x+3} - 5$. Określ, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości nieujemne.

Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{6}{x} + 3$. Określ jej dziedzinę i zbiór wartości. Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości mniejsze od 6?

Ćwiczenie 5

Określ dziedzinę i zbiór wartości funkcji f opisanej wzorem

$$1. f(x) = \frac{-2}{x+12} - 1$$

$$2. f(x) = \frac{41}{x-5} + 23$$

$$3. f(x) = \frac{-7}{x-8} - 15$$

$$4. f(x) = \frac{-25}{x+2} + 18$$

$$5. f(x) = \frac{5}{x-\sqrt{2}} - \sqrt{5}$$

Ćwiczenie 6

Funkcja f opisana jest wzorem $f(x) = \frac{17}{x-34} + 54$. Wyznacz wartość m , dla której funkcja f nie ma punktów wspólnych z prostą o równaniu $y = m$.

Ćwiczenie 7

Wyznacz takie wartości liczby p , dla których punkt $A = (4,12)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = \frac{-12}{x-p^2}$.

Zastosowania funkcji wymiernych do interpretacji zagadnień praktycznych

Zadania tekstowe z zastosowaniem równań wymiernych

W poniższych przykładach prezentujemy zadania tekstowe dotyczące pracy i czasu potrzebnego na jej wykonanie.

Praca to miara wysiłku włożonego w wytworzenie danego dobra.

Efektom pracy jest pewna wartość ekonomiczna. W poniższych zadaniach jest to najczęściej towar lub usługa.

Wydajność pracy to wartość produkcji wytworzonej w określonym czasie (najczęściej w jednostce czasu, np. w ciągu jednego dnia, w ciągu jednej godziny).

Przykład 1

Dwa różne automaty wykonują razem daną pracę w ciągu 5 godzin. Gdyby pierwszy automat pracował sam 3 godziny, a następnie drugi pracował sam przez 6 godzin, to wykonałyby razem 70% całej pracy. W ciągu ilu godzin każdy automat wykonuje całą pracę samodzielnie?

Oznaczmy:

- przez x – czas, w którym praca zostanie wykonana, gdy będzie pracował tylko pierwszy automat,
- przez y – czas, w którym praca zostanie wykonana, gdy będzie pracował tylko drugi automat.

Ponieważ w ciągu godziny pierwszy automat wykonuje $\frac{1}{x}$ całej pracy, drugi – $\frac{1}{y}$ całej pracy, a razem wykonują całą pracę w ciągu 5 godzin, to

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$$

W ciągu 3 godzin pierwszy automat wykonuje $\frac{3}{x}$ całej pracy, a drugi w ciągu 6 godzin wykonuje $\frac{6}{y}$ całej pracy.

Ponadto po 3 godzinach samodzielnej pracy pierwszego automatu i po 6 godzinach samodzielnej pracy drugiego automatu wykonane zostanie 70% całej pracy, zatem

$$\frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{7}{10}$$

Wówczas

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{5} - \frac{1}{x}$$

więc

$$\frac{3}{x} + 6\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{x}\right) = \frac{7}{10}$$

Po rozwiązaniu otrzymanego równania mamy $x = 6$, stąd $y = 30$.

Odpowiedź. Pierwszy automat – 6 godzin, drugi automat – 30 godzin.

Przykład 2

Dwa różne automaty wykonują pewną pracę. Gdyby pierwszy automat pracował sam przez 3,5 godziny, to do zakończenia pracy musiałyby razem pracować jeszcze przez 4,5 godziny. Drugi automat pracujący samodzielnie wykonuje tę pracę w czasie o 7 godzin krótszym niż pierwszy automat pracujący samodzielnie. W ciągu ilu godzin każdy z automatów może samodzielnie wykonać tę pracę?

Szkic. Oznaczmy przez x – czas, w którym praca zostanie wykonana, gdy będzie pracował tylko pierwszy automat. Wtedy $x - 7$ to czas, w którym praca zostanie wykonana, gdy będzie pracował tylko drugi automat.

Stąd

$$\frac{3,5}{x} + 4,5\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-7}\right) = 1$$

co prowadzi do równania

$$2x^2 - 39x + 112 = 0$$

Tylko jedno rozwiązanie ($x = 16$) otrzymanego równania spełnia warunki zadania.

Odpowiedź. Pierwszy automat – 16 godzin, drugi automat – 9 godzin.

Przykład 3

Dwa automaty wykonały pewną pracę, pracując kolejno: najpierw tylko pierwszy, potem tylko drugi. Pierwszy automat pracował wtedy $\frac{5}{9}$ tego czasu, w którym drugi automat może wykonać całą pracę.

Gdyby oba automaty pracowały razem, to wówczas wykonałyby całą pracę w czasie o 6 godzin i 40 minut krótszym, przy czym pierwszy automat wykonałby $\frac{4}{5}$ pracy, którą wykonałby wówczas drugi.

W jakim czasie każdy z automatów może wykonać tę pracę samodzielnie?

Oznaczmy:

- przez x – czas (w godzinach), w którym praca zostanie wykonana, gdy będzie pracował tylko pierwszy automat,
- przez y – czas (w godzinach), w którym praca zostanie wykonana, gdy będzie pracował tylko drugi automat.

Ponieważ w ciągu wspólnej pracy godziny I automat wykonuje $\frac{4}{5}$ tego, co wykonuje drugi, to $y = \frac{4}{5}x$.

W ciągu godziny pierwszy automat wykonuje $\frac{1}{x}$ całej pracy, drugi – $\frac{1}{y}$ całej pracy.

Zatem kiedy automaty pracowały jedno po drugim, to pierwszy automat wykonał $\frac{5}{9}y \cdot \frac{1}{x} = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{5}x \cdot \frac{1}{x} = \frac{4}{9}$ całej pracy.

Wobec tego drugi automat pracował wtedy przez $\frac{5}{9}y$ godzin, czyli cała praca została wykonana w ciągu $\frac{5}{9}y + \frac{5}{9}y = \frac{10}{9}y$ godzin.

Stąd gdyby oba automaty pracowały razem, to pracowałyby przez $\frac{10}{9}y - \frac{20}{3}$ godzin.

Ponieważ wtedy wykonałyby całą pracę, to

$$\left(\frac{10}{9}y - \frac{20}{3}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1$$

$$\left(\frac{10}{9} \cdot \frac{4}{5}x - \frac{20}{3}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{4}{5}x}\right) = 1$$

$$\frac{8x-60}{9} \cdot \frac{9}{4x} = 1$$

$$8x - 60 = 4x$$

$$x = 15.$$

Odpowiedź. I automat – 15 godzin, II automat – 12 godzin.

Przykład 4

Dwa różne automaty wykonują razem zadaną pracę w ciągu 5 godzin. Gdyby pierwszy automat pracował sam 3 godziny, a następnie drugi pracował sam przez 6 godzin, to wykonałyby razem 70% całej pracy. W ciągu ilu godzin każdy automat wykonuje całą pracę samodzielnie?

Oznaczmy

- przez x – czas, w którym praca zostanie wykonana, gdy będzie pracował tylko I automat,
- przez y – czas, w którym praca zostanie wykonana, gdy będzie pracował tylko II automat.

Ponieważ w ciągu godziny I automat wykonuje $\frac{1}{x}$ całej pracy, drugi – $\frac{1}{y}$ całej pracy, a razem wykonują całą pracę w ciągu 5 godzin, to

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$$

W ciągu 3 godzin I automat wykonuje $\frac{3}{x}$ całej pracy, a drugi w ciągu 6 godzin wykonuje $\frac{6}{y}$ całej pracy.

Ponadto po 3 godzinach samodzielnej pracy I automatu i po 6 godzinach samodzielnej pracy II automatu wykonane zostanie 70% całej pracy, zatem

$$\frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{7}{10}$$

Wówczas

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{5} - \frac{1}{x}$$

więc

$$\frac{3}{x} + 6\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{x}\right) = \frac{7}{10}$$

Po rozwiązaniu otrzymanego równania dostajemy $x = 6$, skąd $y = 30$.

Odpowiedź. I automat – 6 godzin, II automat – 30 godzin.

Przykład 5

Automat wykonał 720 detali, pracując na niższym poziomie wydajności. Gdyby przestawić ten automat na wyższy poziom wydajności, to w ciągu godziny będzie wykonywał o 40 detali więcej i wtedy wykona 720 detali, pracując o 54 minuty krócej. W ciągu ilu godzin ten automat wykonał 720 detali?

Rozwiązanie.

$$\begin{cases} xy = 720 \\ \left(x - \frac{9}{10}\right)(y + 40) = 720 \end{cases}$$

stąd $10x^2 - 9x - 162 = 0$, $x = 4\frac{1}{2}$ ($x = -3\frac{3}{5}$ nie spełnia).

Odpowiedź. 4,5 godziny.

Przykład 6

Dwa automaty, pracując jednocześnie wykonały pewną liczbę detali. Aby wykonać taką liczbę detali, pracując samodzielnie pierwszy automat musiałby pracować 3 razy dłużej, a drugi – o 1 godzinę dłużej.

W jakim czasie każdy z automatów może samodzielnie wykonać tę liczbę detali?

Rozwiązanie.

$$\frac{1}{3x} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x},$$

stąd $\frac{2}{3x} = \frac{1}{x+1}$ i $x = 2$.

Odpowiedź. I: 4 godziny, II: 12 godzin.

Ćwiczenie 1

Do wykonania pewnej liczby detali można użyć każdego z dwóch automatów. Oba automaty, pracując jednocześnie, wykonałyby tę liczbę detali w ciągu 4 godzin. Gdyby pierwszy pracował samodzielnie przez 5 godzin, to aby wykonać wymaganą liczbę detali oba automaty musiałyby pracować jeszcze przez 3 godziny.

W jakim czasie każdy z automatów może samodzielnie wykonać tę liczbę detali?

Ćwiczenie 2

Do wykonania pewnej liczby detali można użyć każdego z dwóch automatów. Oba automaty, pracując jednocześnie, wykonałyby tę liczbę detali w ciągu 6 godzin. Gdyby pracowały kolejno: najpierw pierwszy samodzielnie wykonał połowę detali, a następnie drugi również samodzielnie dokończył pracę, to wymaganą liczbę detali wykonałyby przez 16 godzin.

W jakim czasie każdy z tych automatów może samodzielnie wykonać tę liczbę detali?

Ćwiczenie 3

Dwa automaty, pracując razem, wykonały pewną pracę w ciągu 3 godzin. Gdyby pracowały kolejno i najpierw tylko pierwszy wykonał połowę pracy, a następnie tylko drugi wykonał resztę, to wykonałyby całą pracę w ciągu 8 godzin. W ciągu ilu godzin każdy z automatów może samodzielnie wykonać tę pracę?

Ćwiczenie 4

Dwa automaty wykonały pewną pracę, pracując kolejno: najpierw tylko pierwszy, potem tylko drugi. Pierwszy automat pracował wtedy $\frac{5}{6}$ tego czasu, w którym drugi automat może wykonać całą pracę.

Gdyby oba automaty pracowały razem, to wówczas wykonałyby całą pracę w czasie o 8 i pół godziny krótszym, przy czym pierwszy automat wykonałby $\frac{3}{5}$ tego, co wykonałby wówczas drugi. W jakim czasie każdy z automatów może wykonać tę pracę samodzielnie?

Ćwiczenie 5

Dwa różne automaty wykonały pewną liczbę detali, przy czym pierwszy automat najpierw przez godzinę pracował sam, a następnie oba razem pracowały jeszcze przez pewien czas. Po trzech godzinach od momentu rozpoczęcia pracy pierwszego automatu wykonano 45 % całej pracy, a po jej zakończeniu okazało się, że każdy z automatów wykonał po tyle samo detali.

W ciągu ilu godzin każdy z automatów może samodzielnie wykonać tę liczbę detali?

Ćwiczenie 6

Dwa różne automaty mają wykonać pewną pracę. Gdyby pierwszy automat pracował sam przez półtorej godziny, to do zakończenia pracy musiałyby pracować razem jeszcze przez 5,5 godziny. Pierwszy automat pracujący samodzielnie wykonuje tę pracę w czasie o 3 godziny dłuższym niż drugi automat pracujący samodzielnie. W ciągu ilu godzin każdy z automatów może samodzielnie wykonać tę pracę?

Ćwiczenie 7

Dwa różne automaty wykonują razem pewną pracę w ciągu 2 godzin. Pierwszy automat, pracując samodzielnie, potrzebuje na wykonanie tej pracy o 3 godziny mniej niż drugi automat pracujący samodzielnie. W ciągu ilu godzin każdy z automatów może samodzielnie wykonać tę pracę?

Ćwiczenie 8

Trzy różne automaty, pracując razem, wykonały pewną pracę. Gdyby każdy z tych automatów miał wykonać tę pracę sam, to pierwszy wykonałby ją w czasie o 1 godzinę dłuższym, drugi – w czasie o 17 godzin dłuższym, a trzeci – w czasie o 27 godzin dłuższym, niż gdy wykonały tę pracę razem. W ciągu ilu godzin każdy z automatów może samodzielnie wykonać tę pracę?

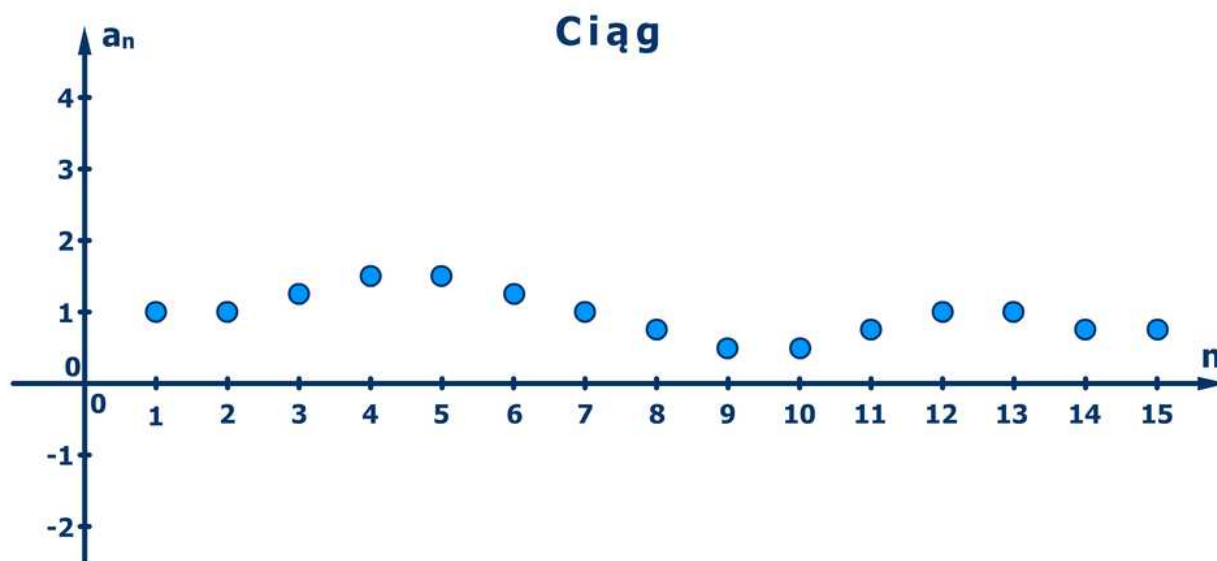
Ćwiczenie 9

Trzy różne automaty, pracując razem, wykonały pewną pracę. Gdyby każdy z tych automatów miał wykonać tę pracę sam, to pierwszy wykonałby ją w czasie o 2 godziny dłuższym, drugi – w czasie o 4 godziny dłuższym, a trzeci – w czasie o 10 godzin dłuższym, niż wtedy gdy wykonały tę pracę razem. W ciągu ilu godzin każdy z automatów może samodzielnie wykonać tę pracę?

Ćwiczenie 10

Trzy różne automaty, pracując razem, wykonały pewną pracę. Gdyby każdy z tych automatów miał wykonać tę pracę sam, to pierwszy wykonałby ją w czasie o 1 godzinę dłuższym, drugi – w czasie o 7 godzin dłuższym, a trzeci – w czasie o 16 godzin dłuższym, niż wtedy gdy wykonały tę pracę razem. W ciągu ilu godzin każdy z automatów może samodzielnie wykonać tę pracę?

Pojęcie ciągu. Ciąg jako funkcja zmiennej naturalnej



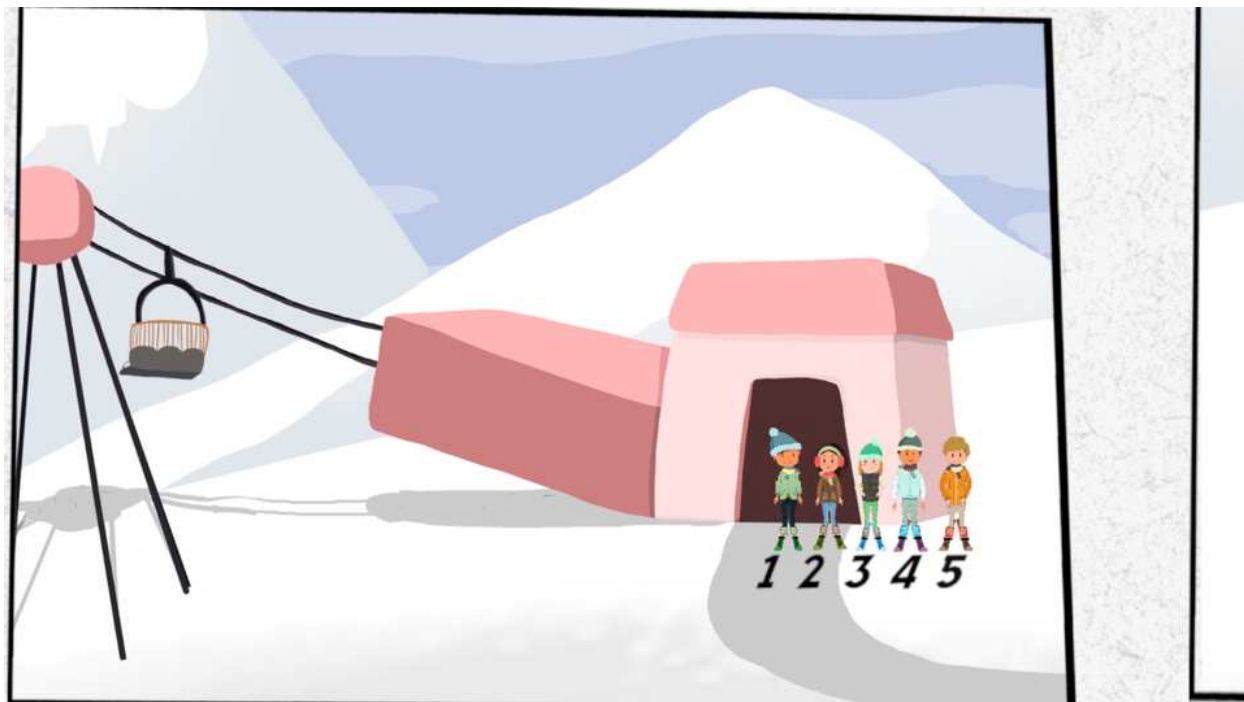
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Klasa IIb pojechała na białą szkołę. Tomek, Małgosia, Julka, Franek i Jurek stoją w kolejce do wyciągu narciarskiego. Każde z nich zajmuje konkretną pozycję w kolejce. Możemy powiedzieć, że każdej z pozycji, czyli kolejnej liczbie naturalnej od 1 do 5, przyporządkowana jest konkretna osoba. Takie przyporządkowanie nazywamy ciągiem. Liczbie 1 (pierwszemu miejscu w kolejce) przyporządkowany jest Tomek. Liczbie 2 (drugiemu miejscu w kolejce) przyporządkowana jest Małgosia. Liczbie 3 (trzeciemu miejscu w kolejce) przyporządkowana jest Julka. Liczbie 4 (czwartemu miejscu w kolejce) przyporządkowany jest Franek. Liczbie 5 (piątym miejscu w kolejce) przyporządkowany jest Jurek.

Przykład 1



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Definicja: Definicja ciągu

- Ciągiem nazywamy funkcję, określoną w zbiorze liczb całkowitych dodatnich. Wartości tej funkcji dla kolejnych liczb naturalnych nazywamy **wyrazami ciągu**.
- Jeżeli ciąg jest nieskończony, to jego dziedziną jest zbiór dodatnich liczb całkowitych. **Dziedziną ciągu** skończonego jest zbiór $\{1, 2, \dots, n\}$, gdzie n jest ustaloną dodatnią liczbą całkowitą.
- **Ciąg dwuwyrazowy** jest parą uporządkowaną, z którą spotkaliśmy się, np. podając współrzędne punktu w prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie. Zwróćmy uwagę, że pary uporządkowane $(1, 3)$ i $(3, 1)$ są różne.
- Ciąg opisany w przykładzie powyżej jest skończony, ponieważ w kolejce stoi 5 osób, czyli skończona liczba osób. Dziedziną tego ciągu jest zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Jeżeli elementy jakiegoś zbioru ponumerujemy, a więc ustalimy kolejność tych elementów, to w ten sposób otrzymamy ciąg.

W praktyce będziemy zajmować się najczęściej ciągami liczbowymi, czyli takimi, których wyrazy są liczbami. Ciąg oznaczamy zazwyczaj (a_n) , (b_n) , (c_n) , itd. Natomiast a_n oznacza n -ty wyraz ciągu (a_n) , na przykład drugi wyraz ciągu (a_n) to a_2 .

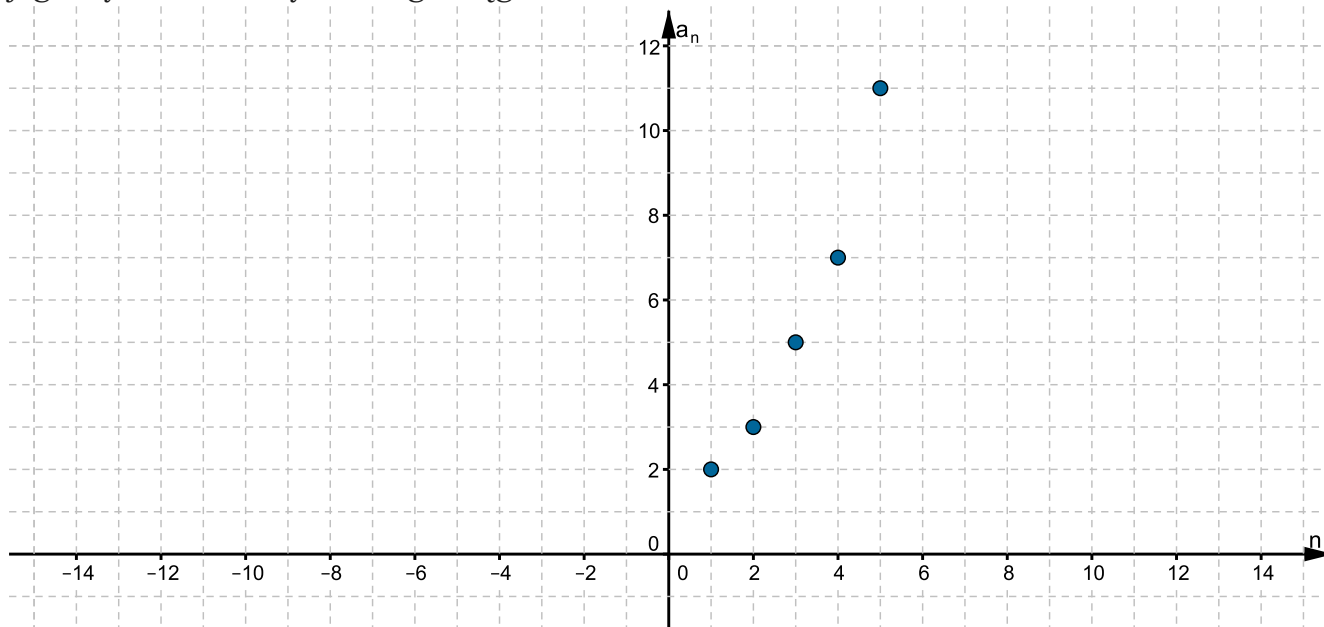
Jeżeli ciąg z podanego wyżej przykładu 1 oznaczymy (a_n) , to a_1 = Tomek, a_2 = Małgosia, a_3 = Julka, a_4 = Franek, a_5 = Jurek.

Przykład 2

Rozpatrzmy ciąg (a_n) składający się z 5 wyrazów, które są kolejnymi początkowymi liczbami pierwszymi. Przypomnijmy, że najmniejszą liczbą pierwszą jest 2. Zatem

$$a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7, a_5 = 11$$

Ciąg liczbowy, podobnie jak inne funkcje, można opisać na różne sposoby, np. narysować jego wykres. Oto wykres tego ciągu:



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 3

Oblicz sześć początkowych wyrazów ciągu określonego wzorem $a_n = n^2 + 3n$. Aby obliczyć wyraz o numerze n , należy podnieść numer wyrazu do kwadratu i dodać do niego potrojony numer tego wyrazu.

W ten sposób obliczamy

$$a_1 = 1^2 + 3 \cdot 1 = 4$$

$$a_2 = 2^2 + 3 \cdot 2 = 10$$

$$a_3 = 3^2 + 3 \cdot 3 = 18$$

$$a_4 = 4^2 + 3 \cdot 4 = 28$$

$$a_5 = 5^2 + 3 \cdot 5 = 40$$

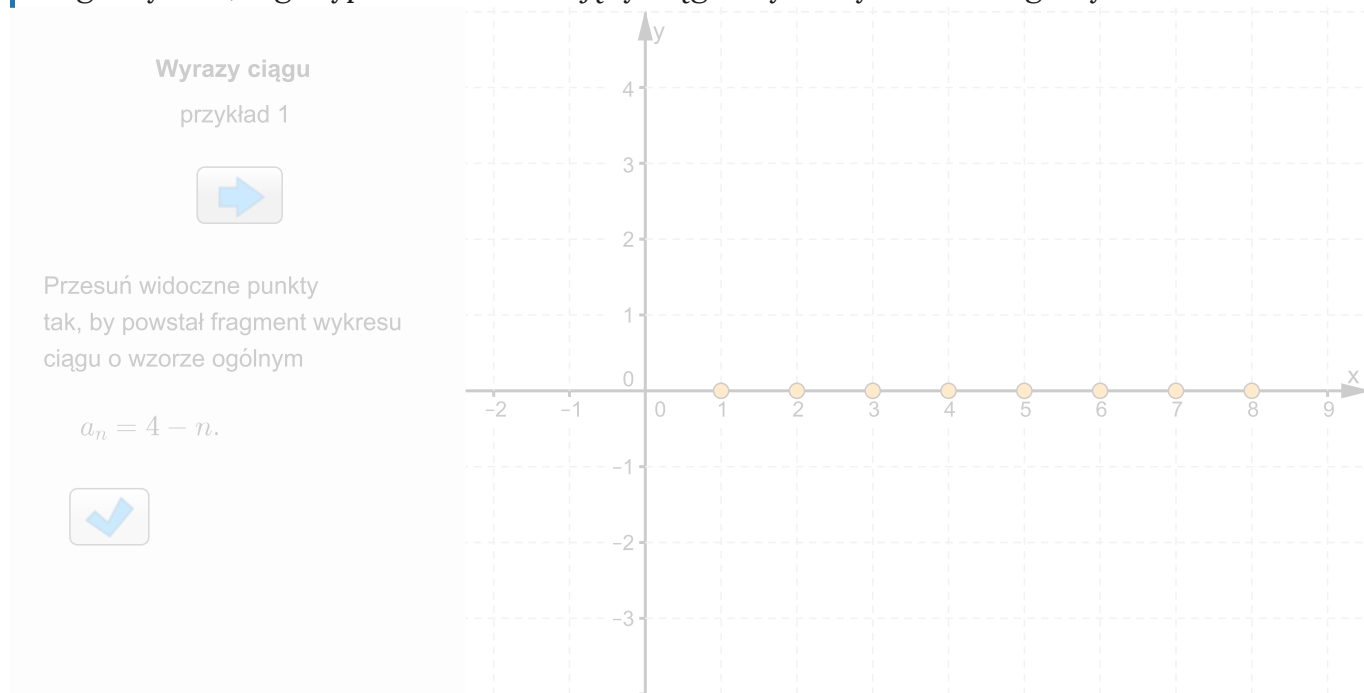
$$a_6 = 6^2 + 3 \cdot 6 = 54$$

Tak samo możemy obliczyć wyraz o dowolnie wybranym numerze, np.

$$a_{65} = 65^2 + 3 \cdot 65 = 4420$$

$$a_{100} = 100^2 + 3 \cdot 100 = 10\,300$$

Podany przez nas wzór ma tę własność, że każdy wyraz ciągu jest uzależniony od numeru tego wyrazu, tego typu wzór określający ciąg nazywamy wzorem ogólnym.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DpLrb1VJR>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 4

Dany jest ciąg ułamków takich, że licznik każdego z tych ułamków, a więc każdego wyrazu tego ciągu równy jest numerowi, a mianownik jest o 1 większy od licznika. Zatem ciąg ten ma postać $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots)$. Jego n -ty wyraz możemy opisać wzorem ogólnym $a_n = \frac{n}{n+1}$. Znając wzór, możemy obliczyć dowolny wyraz tego ciągu, np.

$$a_{73} = \frac{73}{73+1} = \frac{73}{74}$$

Przykład 5

Dany jest ciąg nieskończony (a_n) o wzorze ogólnym $a_n = \frac{n+1}{2n-7}$. Wypiszmy wszystkie wyrazy ujemne tego ciągu.

Zauważmy, że każdy wyraz ciągu to ułamek $\frac{n+1}{2n-7}$, którego licznik, czyli $n+1$, jest dodatni, gdyż $n \geq 1$. Zatem ułamek jest ujemny, gdy jego mianownik jest ujemny, czyli gdy $2n-7 < 0$, a więc $n < 3,5$. Wynika stąd, że ujemnymi wyrazami są tylko trzy początkowe wyrazy:

$$a_1 = \frac{1+1}{2-7} = -\frac{2}{5}, a_2 = \frac{2+1}{4-7} = -1, a_3 = \frac{3+1}{6-7} = -4$$

Przykład 6

Ciąg (a_n) określony jest wzorem ogólnym $a_n = \frac{(-1)^n \cdot (n^2 - 25)}{n+2}$.

1. Oblicz wyrazy a_1, a_2, a_3, a_{10} .

Korzystając z wzoru ogólnego, mamy:

$$a_1 = \frac{(-1)^1 \cdot (1^2 - 25)}{1+2} = 8$$

$$a_2 = \frac{(-1)^2 \cdot (2^2 - 25)}{2+2} = -\frac{21}{4} = -5\frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{(-1)^3 \cdot (3^2 - 25)}{3+2} = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}$$

$$a_{10} = \frac{(-1)^{10} \cdot (10^2 - 25)}{10+2} = \frac{75}{12} = 6\frac{1}{4}$$

1. Wykaż, że $a_5 < a_6$ oraz $a_6 > a_7$.

Obliczmy

$$a_5 = \frac{(-1)^5 \cdot (5^2 - 25)}{5+2} = 0, \quad a_6 = \frac{(-1)^6 \cdot (6^2 - 25)}{6+2} = \frac{11}{8}, \quad a_7 = \frac{(-1)^7 \cdot (7^2 - 25)}{7+2} = -\frac{24}{9} = -2\frac{2}{3},$$

co oznacza, że $a_5 < a_6$ oraz $a_6 > a_7$.

Przykład 7

Ciąg (a_n) określony jest wzorem ogólnym $a_n = (n + 3)(2n - 5)$.

1. Uzasadnij, że żaden wyraz ciągu (a_n) nie jest równy zero.

Przypuśćmy, że któryś z wyrazów jest równy zero, a więc $a_n = 0$. Zatem

$(n + 3)(2n - 5) = 0$, czyli $n + 3 = 0$ lub $2n - 5 = 0$. Stąd $n = -3$ lub $n = 2,5$.

Żadna z tych równości nie jest prawdziwa, gdyż n to numer wyrazu ciągu i jest dodatnią liczbą całkowitą. To oznacza, że żaden wyraz tego ciągu nie jest równy 0.

2. Który wyraz tego ciągu jest równy 6?

Podobnie jak poprzednio, rozwiązujemy równanie $a_n = 6$, czyli $(n + 3)(2n - 5) = 6$.

Po przekształceniu tego równania otrzymujemy równanie kwadratowe

$2n^2 + n - 21 = 0$, które ma dwa rozwiązania $n = -3,5$ lub $n = 3$. Tylko drugie

z tych rozwiązań jest to dodatnia liczba całkowita, więc $n = 3$. Oznacza to, że tylko trzeci wyraz tego ciągu jest równy 6.

Przykład 8

Ciąg (a_n) określony jest wzorem ogólnym $a_n = \sqrt{3n + 6}$. Który wyraz tego ciągu jest równy $2\sqrt{3}$?

Rozwiązujemy równanie $\sqrt{3n + 6} = 2\sqrt{3}$, czyli $\sqrt{3n + 6} = \sqrt{12}$. Stąd wynika, że $3n + 6 = 12$, więc $n = 2$. Zatem jedynie $a_2 = 2\sqrt{3}$.

Przykład 9

Ciąg (a_n) określony jest wzorem ogólnym $a_n = \sqrt[3]{n-2}$. Oblicz a_1, a_2, a_3 .

Obliczamy

$$a_1 = \sqrt[3]{1-2} = \sqrt[3]{-1} = -1, \quad a_2 = \sqrt[3]{2-2} = 0, \quad a_3 = \sqrt[3]{3-2} = 1$$

Zauważmy, że podanie kilku początkowych wyrazów ciągu nie pozwala jednoznacznie obliczyć kolejnych jego wyrazów ani określić wzoru ogólnego tego ciągu. Rozpatrzmy

nieskończony ciąg $(-1, 0, 1, \dots)$. Można byłoby przypuszczać, że jest to ciąg z poprzedniego przykładu, a więc ciąg określony wzorem ogólnym $a_n = \sqrt[3]{n-2}$. Można byłoby też przyjąć, że wzór ogólny tego ciągu to $a_n = n - 2$ lub $a_n = (n - 2)^5$. Wówczas jednak inne byłyby już czwarte wyrazy tych ciągów. W pierwszym $a_4 = \sqrt[3]{2}$, w drugim $a_4 = 2$, a w ostatnim $a_4 = 32$.

Jeżeli oprócz podania początkowych wyrazów ciągu określimy również zasadę opisującą tworzenie kolejnych jego wyrazów z poprzednich wyrazów, to wtedy ciąg określimy w sposób jednoznaczny. Na przykład gdybyśmy przy określaniu ciągu nieskończonego $(-1, 0, 1, \dots)$ podali jeszcze, że każdy jego wyraz, począwszy od wyrazu drugiego, jest o 1 większy od wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego, to wówczas obie te informacje moglibyśmy zapisać krótko w postaci $a_1 = -1$, $a_{n+1} = a_n + 1$ dla $n \geq 1$. W ten sposób można obliczyć kolejne wyrazy ciągu:

$$a_2 = a_1 + 1 = -1 + 1 = 0, a_3 = a_2 + 1 = 0 + 1 = 1, a_4 = a_3 + 1 = 1 + 1 = 2$$

Jednak aby obliczyć np. $a_{100} = a_{99} + 1$, musimy najpierw obliczyć a_{99} , a_{98} , a_{97} itd. Zauważmy jednak, że ten sam ciąg opisuje wzór ogólny $a_n = n - 2$, który pozwala obliczyć dowolny wyraz ciągu, np.

$$a_{100} = 100 - 2 = 98$$

Przykład 10

Wyznacz wzór ogólny ciągu, którego pierwszy wyraz jest równy 7, a każdy następny wyraz jest o 3 większy od poprzedniego.

Informacje podane w poleceniu możemy zapisać w postaci $a_1 = 7$, $a_{n+1} = a_n + 3$ dla $n \geq 1$.

Pierwszy wyraz ciągu to $a_1 = 7$. Obliczmy kilka następnych wyrazów tego ciągu:

$$a_2 = a_1 + 3 = 7 + 1 \bullet 3 = 10$$

$$a_3 = a_2 + 3 = a_1 + 3 + 3 = 7 + 2 \bullet 3 = 13$$

$$a_4 = a_3 + 3 = a_1 + 2 \bullet 3 + 3 = 7 + 3 \bullet 3 = 16$$

Zauważmy, że trzeci wyraz jest większy od pierwszego wyrazu o dwie trójki, czyli o $2 \bullet 3$, czwarty jest większy od pierwszego o trzy trójki, czyli o $3 \bullet 3$. Zatem wyraz o numerze n jest większy od wyrazu pierwszego o $n - 1$ trójek. Wzór ogólny tego ciągu możemy więc zapisać w postaci

$$a_n = 7 + (n - 1) \bullet 3$$

Zbadamy teraz, rozpatrując kilka przykładów, jak zachowują się kolejne wyrazy ciągu. Interesować nas będzie, czy wyrazy ciągu rosną, maleją, czy nie zmieniają się.

Przykład 11

Rozpatrzmy nieskończone ciągi (a_n) , (b_n) , (c_n) określone wzorami ogólnymi $a_n = \frac{1}{2} \cdot n - 5$, $b_n = \frac{2}{n} - 3$, $c_n = (n - 4)^2$. Obliczymy trzy pierwsze wyrazy każdego z tych ciągów:

$$a_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 - 5 = -4\frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 - 5 = -4, a_3 = \frac{1}{2} \cdot 3 - 5 = -3\frac{1}{2}$$

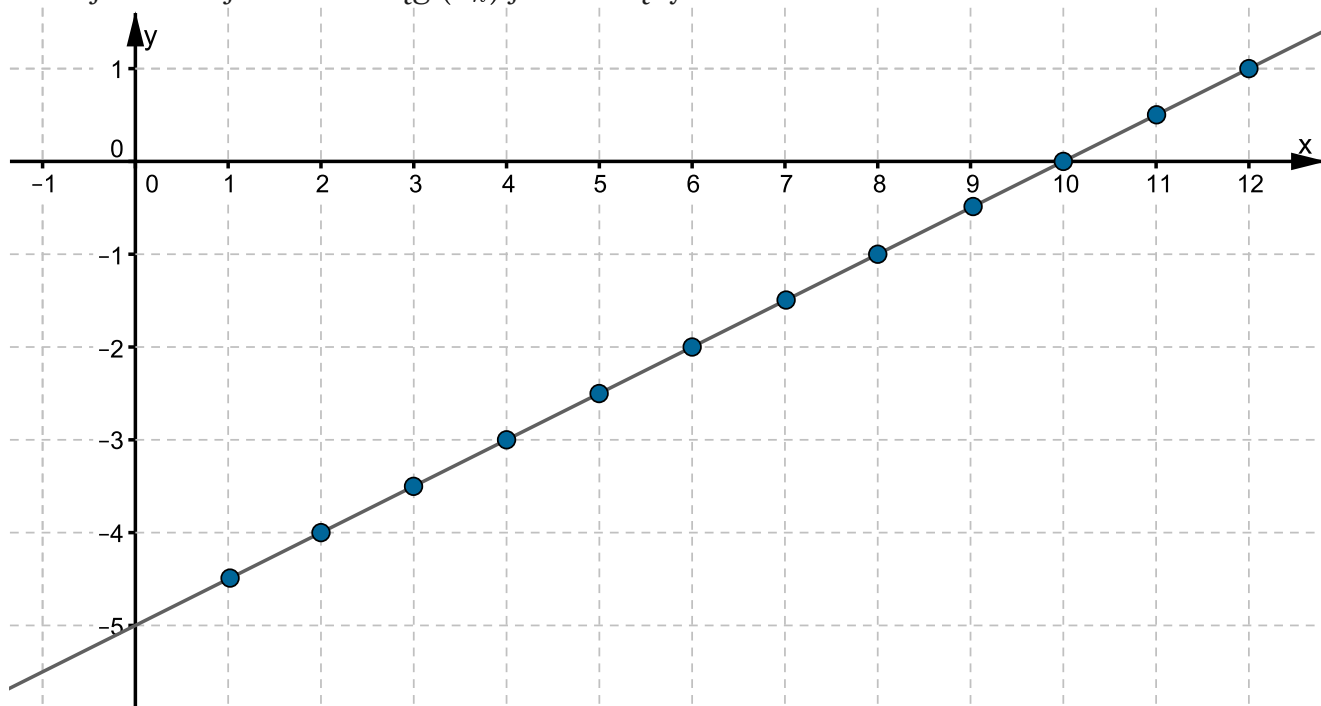
$$b_1 = \frac{2}{1} - 3 = -1, b_2 = \frac{2}{2} - 3 = -2, b_3 = \frac{2}{3} - 3 = -2\frac{1}{3}$$

$$c_1 = (1 - 4)^2 = 9, c_2 = (2 - 4)^2 = 4, c_3 = (3 - 4)^2 = 1$$

Zauważmy, że

- Obliczone wyrazy ciągu (a_n) są coraz większe, a więc rosną. Tak też się dzieje z kolejnymi wyrazami tego ciągu, gdyż przy coraz większym n rośnie też wartość wyrażenia $\frac{1}{2}n - 5$. Mówimy wówczas, że ciąg jest rosnący.

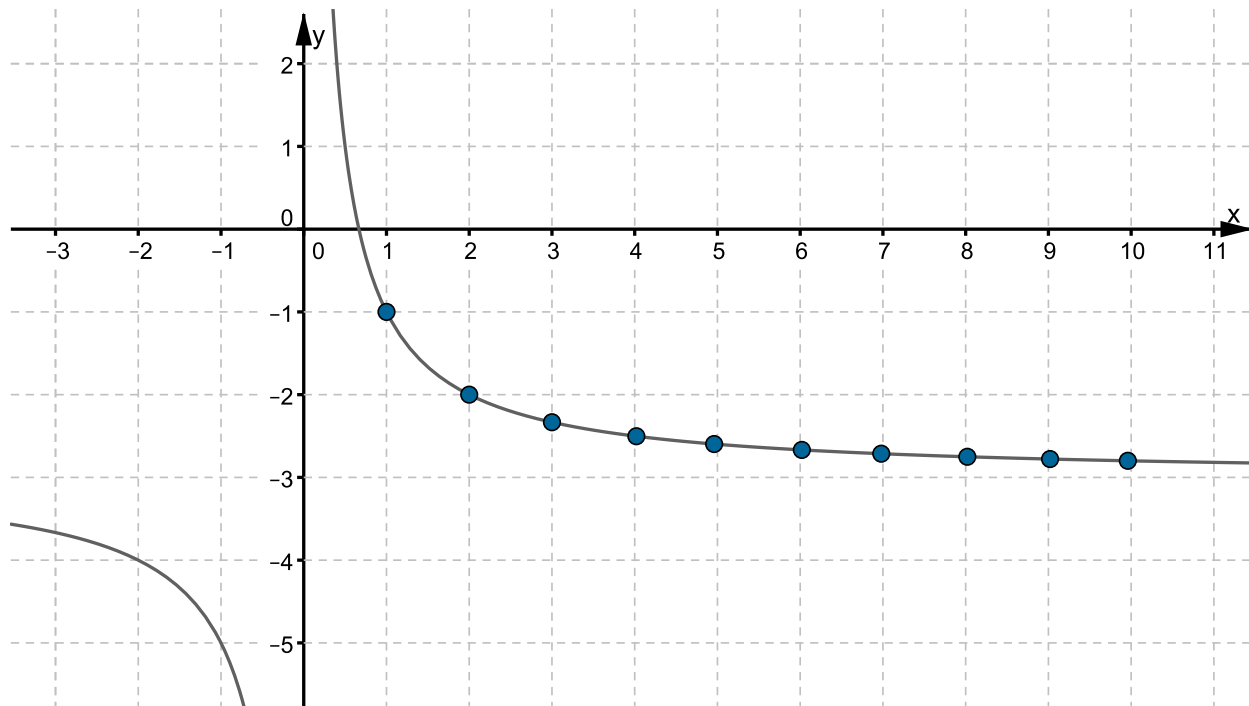
To samo możemy też stwierdzić, gdy zauważymy, że wykres ciągu (a_n) składa się z punktów leżących na prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x - 5$. Ta prosta jest wykresem rosnącej funkcji liniowej. Zatem i ciąg (a_n) jest rosnący.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

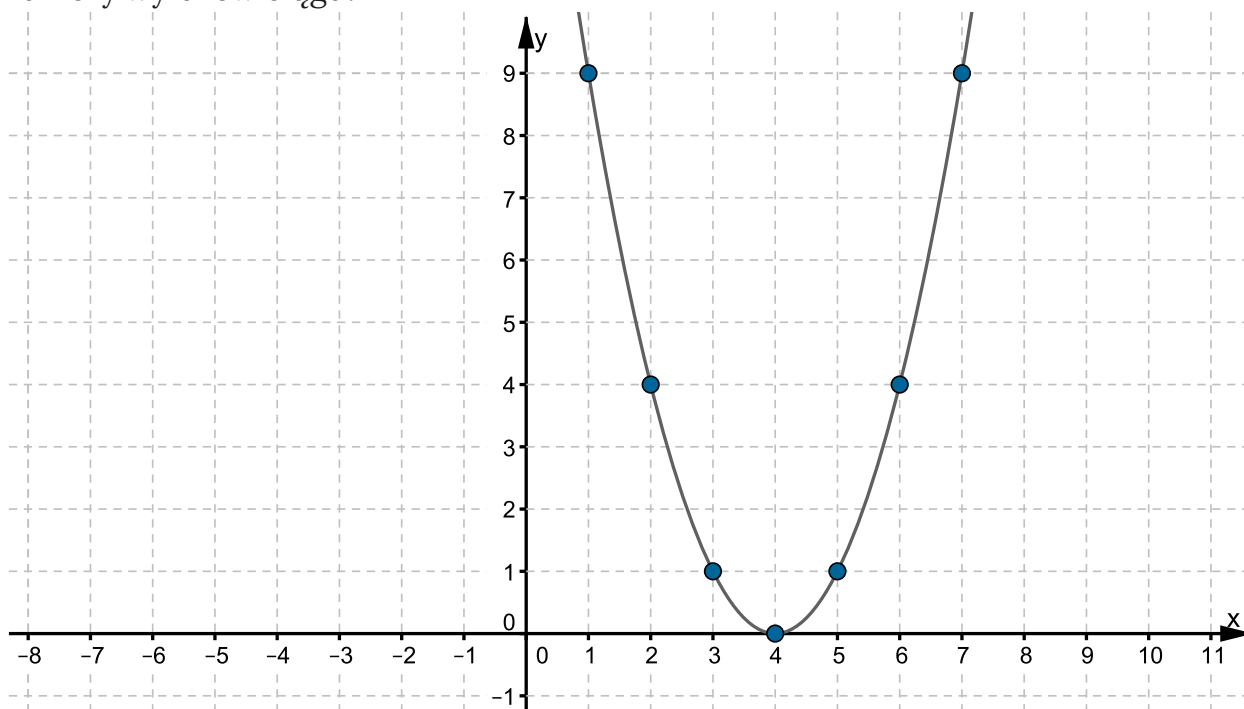
- Obliczone wyrazy ciągu (b_n) są coraz mniejsze, następne również maleją. Jest tak dlatego, że przy zwiększaniu n maleje ułamek $\frac{2}{n}$, a to oznacza, że maleje też różnica $\frac{2}{n} - 3$. Ciąg (b_n) jest więc malejący.

Podobnie jak poprzednio do tego samego wniosku możemy dojść, zauważając, że wykres ciągu (b_n) składa się z punktów leżących na hiperboli o równaniu $y = \frac{2}{x} - 3$. Ta hiperbola jest wykresem funkcji, która w przedziale $(0, +\infty)$ jest malejąca. Zatem i ciąg (b_n) jest malejący.



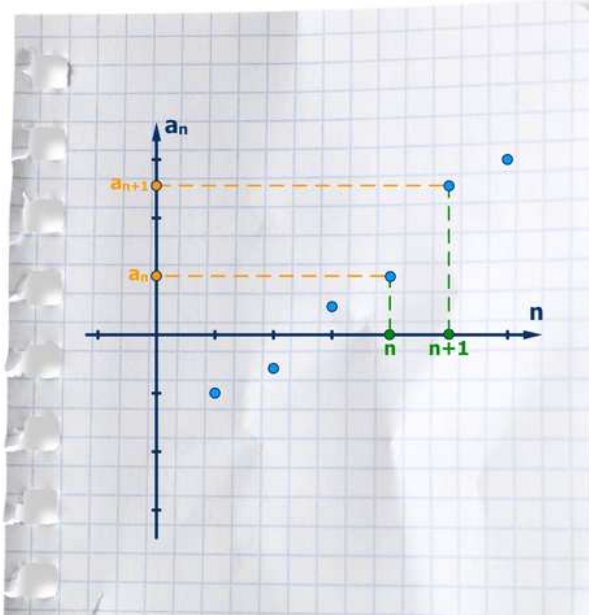
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- Obliczone wyrazy ciągu (c_n) maleją, czwarty wyraz jest mniejszy od trzeciego ($c_4 = 0 < 1 = c_3$), ale już kolejne wyrazy nie są coraz mniejsze. Piąty wyraz jest większy od czwartego ($c_5 = 1 > 0 = c_4$). Ciąg ten nie jest więc malejący, nie jest też rosnący. To samo możemy zauważyć, patrząc na wykres (c_n) , który składa się z punktów leżących na paraboli o równaniu $y = (x - 4)^2$. Parabola ta jest wykresem funkcji malejącej w przedziale $(-\infty, 4)$, a rosnącej w przedziale $(4, +\infty)$. Funkcja ta nie jest więc monotoniczna w przedziale $(1, +\infty)$, a w tym przedziale leżą wszystkie numery wyrazów ciągu.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ciąg rosnący



Ciąg (a_n) jest rosnący,
jeżeli dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n

$$a_n < a_{n+1}.$$

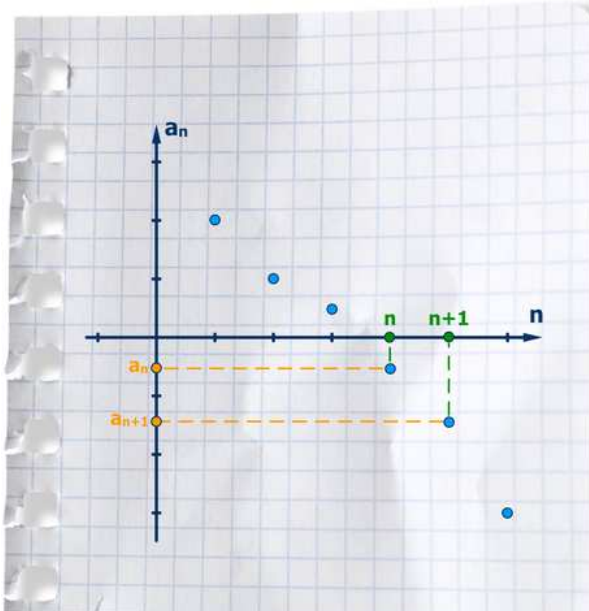


Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja prezentuje punkty w układzie współrzędnych, które ilustrują ciąg rosnący. Dla argumentów n oraz $n+1$ (n

Ciąg malejący



Ciąg (a_n) jest malejący,
jeżeli dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n

$$a_n > a_{n+1}.$$

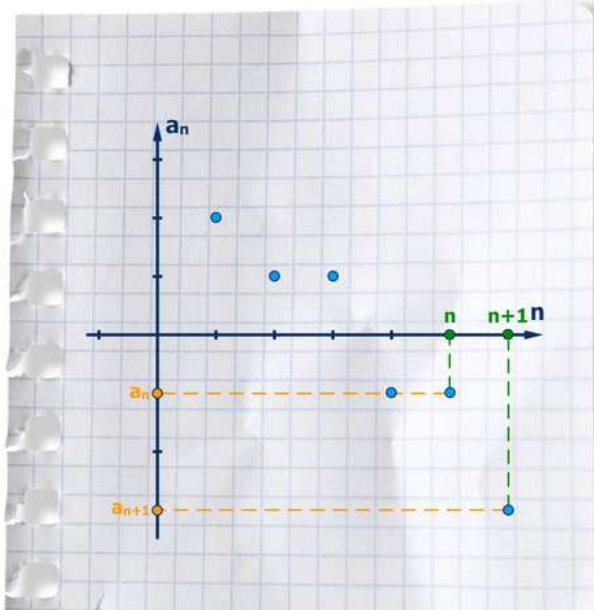


Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja prezentuje punkty w układzie współrzędnych, które ilustrują ciąg malejący. Dla argumentów n oraz $n+1$ (n (a z indeksem dolnym $n+1$)).

Ciąg nierosnący



Ciąg (a_n) jest nierosnący,
jeżeli dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n

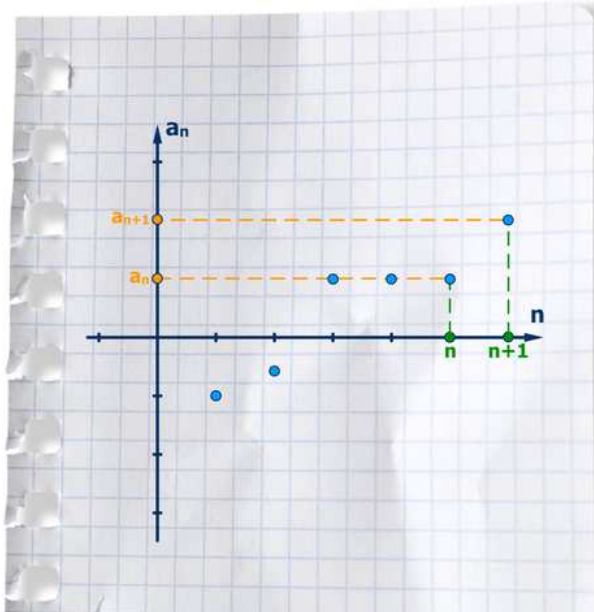
$$a_n \geq a_{n+1}.$$

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja prezentuje punkty w układzie współrzędnych, które ilustrują ciąg nierosnący. Dla argumentów n oraz $n+1$ (n

Ciąg niemalejący



Ciąg (a_n) jest niemalejący,
jeżeli dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n

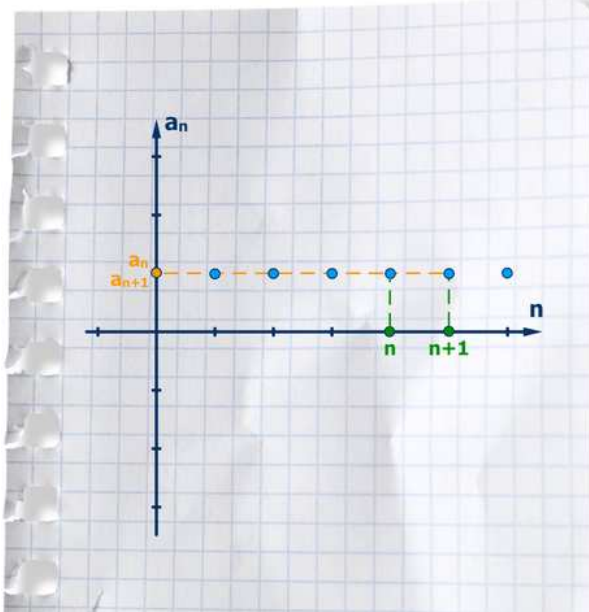
$$a_n \leq a_{n+1}.$$

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja prezentuje punkty w układzie współrzędnych, które ilustrują ciąg niemalejący. Dla argumentów n oraz $n+1$ (n

Ciąg stały



Ciąg (a_n) jest stały,
jeżeli dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n

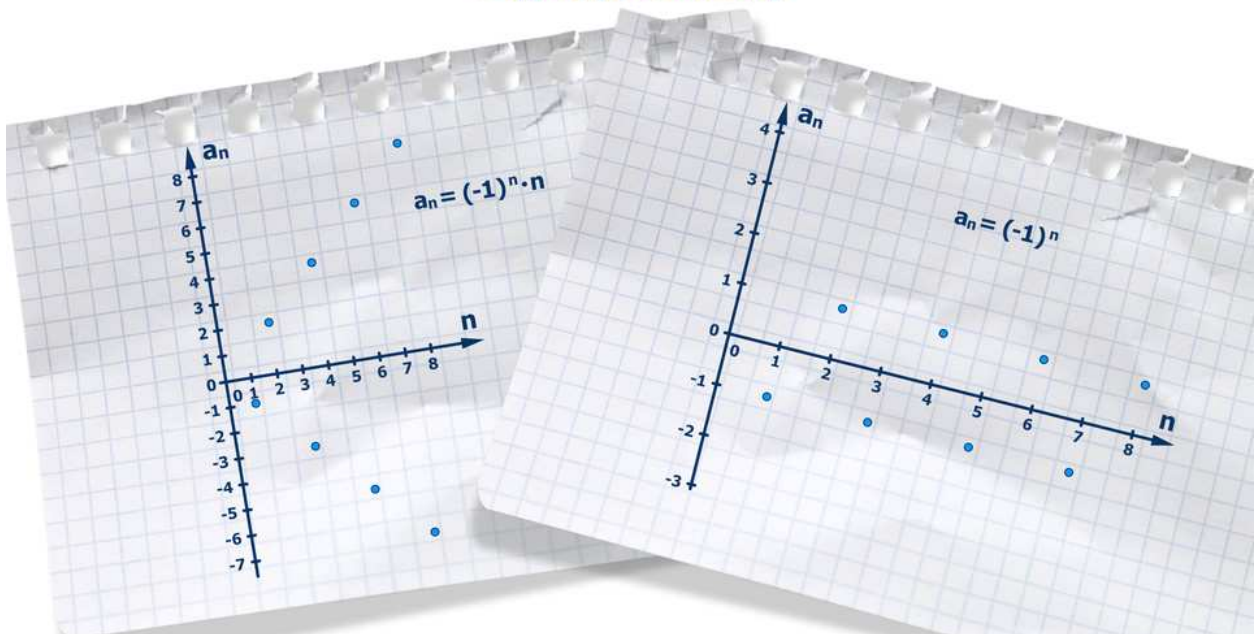
$$a_n = a_{n+1}.$$

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja prezentuje punkty w układzie współrzędnych, które ilustrują ciąg stały. Dla argumentów n oraz $n+1$ (n

Ciąg naprzemienny



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja w dwóch układach współrzędnych prezentuje punkty, które ilustrują ciągi naprzemienne o wzorach: $(a \text{ z indeksem dolnym } n) = (-1)^n$ do potęgi n , $(a \text{ z indeksem dolnym } n) = (-1)^n \cdot n$.

$n) = [(-1) \text{ do potęgi } n] \text{ razy } n.$

Definicja: Ciągi monotoniczne

- Ciąg nazywamy **rosnącym**, jeżeli jego każdy wyraz, począwszy od drugiego, jest większy od wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego, a więc jeżeli dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi nierówność

$$a_{n+1} > a_n$$

- Ciąg nazywamy **malejącym**, jeżeli jego każdy wyraz, począwszy od drugiego, jest mniejszy od wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego, a więc jeżeli dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi nierówność

$$a_{n+1} < a_n$$

- Ciąg nazywamy **stałym**, jeżeli wszystkie wyrazy tego ciągu są sobie równe, a więc jeżeli dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi równość

$$a_{n+1} = a_n$$

- Ciąg nazywamy **niemalejącym**, jeżeli jego każdy wyraz, począwszy od drugiego, jest nie mniejszy od wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego, a więc jeżeli dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi nierówność

$$a_{n+1} \geq a_n$$

- Ciąg nazywamy **nierosnącym**, jeżeli jego każdy wyraz, począwszy od drugiego, jest nie większy od wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego, a więc jeżeli dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi nierówność

$$a_{n+1} \leq a_n$$

Jeżeli ciąg jest rosnący, malejący, nierosnący, niemalejący lub stały, to mówimy, że ten ciąg jest **monotoniczny**. O innych ciągach mówimy, że nie są monotoniczne.

Przykład 12

Ciąg określony wzorem $a_n = (-1)^n \cdot n$ nie jest monotoniczny. Wystarczy obliczyć trzy pierwsze wyrazy tego ciągu: $a_1 = -1$, $a_2 = 2$, $a_3 = -3$. Ponieważ $a_2 > a_1$ i $a_3 < a_2$, więc ciąg nie jest monotoniczny.

Ćwiczenie 1

W tabeli podane zostały wszystkie wyrazy ciągu (a_n) .

Tabela. Dane

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	-3	-1	0	1	3	5	4

1. Narysuj wykres ciągu (a_n) .
2. Rozstrzygnij, czy ciąg (a_n) jest monotoniczny.

Ćwiczenie 2

Ile wyrazów ujemnych występuje w ciągu $a_n = (n - 20)(2n + 5)$?

Ćwiczenie 3

Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = n^2 - 5n + 1$.

☐ Pierwszym wyrazem dodatnim tego ciągu jest a_5 .

☐ Siódmy wyraz tego ciągu jest równy 15.

Ćwiczenie 4

Podaj wzór ogólny, jakim może być określony

1. ciąg siedmiowyrazowy (a_n) : $(4, 6, 8, 10, 12, 14, 16)$
2. ciąg ośmiowyrazowy (b_n) : $(2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65)$
3. ciąg sześciowyrazowy (c_n) : $(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6})$
4. ciąg dziewięciowyrazowy (d_n) : $(2\sqrt{3}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}, 4, \sqrt{17}, 3\sqrt{2}, \sqrt{19}, 2\sqrt{5})$

Ćwiczenie 5

Które wyrazy nieskończonego ciągu opisanego wzorem $a_n = \frac{n^2+5n+6}{n}$ dla $n \geq 1$ są liczbami całkowitymi?

Ćwiczenie 6

Nieskończony ciąg opisany jest wzorem $a_n = n^2 - 6n + 5$.

1. Wyznacz wyraz a_7 i wyraz a_{10} .
2. Wyznacz wszystkie ujemne wyrazy tego ciągu.
3. Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n mamy $a_n \geq -4$.

Ćwiczenie 7

Dany jest ciąg $a_n = \frac{n+12}{7}$. Czy istnieje wyraz tego ciągu równy $3\frac{2}{5}$?

Ćwiczenie 8

Dany jest nieskończony ciąg (a_n) określony wzorem ogólnym $a_n = \frac{n+3}{4n+1}$. Które wyrazy tego ciągu są większe od $\frac{1}{3}$?

Ćwiczenie 9

Oblicz piąty wyraz ciągu (a_n) określonego następująco $a_1 = 3$ oraz $a_{n+1} = (-1)^n \cdot a_n + n$ dla dowolnej liczby całkowitej $n \geq 1$.

Ćwiczenie 10

Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

1. Oblicz wartość wyrażenia $a_5 + 2a_6$.
2. Określ monotoniczność ciągu (a_n) .

Ćwiczenie 11

Ile wyrazów nieskończonego ciągu określonego wzorem $a_n = \frac{3}{n+2}$ należy do przedziału $(\frac{1}{3}, 2)$?

Ćwiczenie 12

Niech a_n oznacza liczbę wszystkich naturalnych dzielników dodatniej liczby całkowitej n , gdzie $1 \leq n \leq 7$. Sporządź wykres ciągu (a_n) . Który wyraz tego ciągu jest największy?

Ćwiczenie 13

Dane są ciągi (a_n) i (b_n) o wzorach ogólnych $a_n = n + 5$ i $b_n = 3n - 7$.

Sumą ciągów (a_n) i (b_n) nazywamy ciąg (c_n) o wzorze ogólnym $c_n = a_n + b_n$.

Różnicą ciągów (a_n) i (b_n) nazywamy ciąg (d_n) o wzorze ogólnym $d_n = a_n - b_n$.

Iloczynem ciągów (a_n) i (b_n) nazywamy ciąg (e_n) o wzorze ogólnym $e_n = a_n b_n$.

Ilorazem ciągów (a_n) i (b_n) nazywamy ciąg (f_n) o wzorze ogólnym $f_n = \frac{a_n}{b_n}$. Ciąg (f_n) jest określony dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n , ponieważ żaden wyraz ciągu (b_n) nie jest równy 0.

1. Ile wyrazów dodatnich ma ciąg (d_n) ?
2. Który wyraz ciągu (e_n) jest równy zero?
3. Czy liczba 1 jest jednym z wyrazów ciągu (f_n) ?
4. Które wyrazy ciągu (c_n) są mniejsze od 10?
5. Czy ciąg (f_n) jest monotoniczny?
6. Wyznacz wszystkie wartości n , dla których prawdziwa jest równość $c_{n+4} = e_{n-4} + 1$.
7. Wykaż, że trzeci wyraz ciągu (e_n) jest kwadratem liczby naturalnej.

Ćwiczenie 14

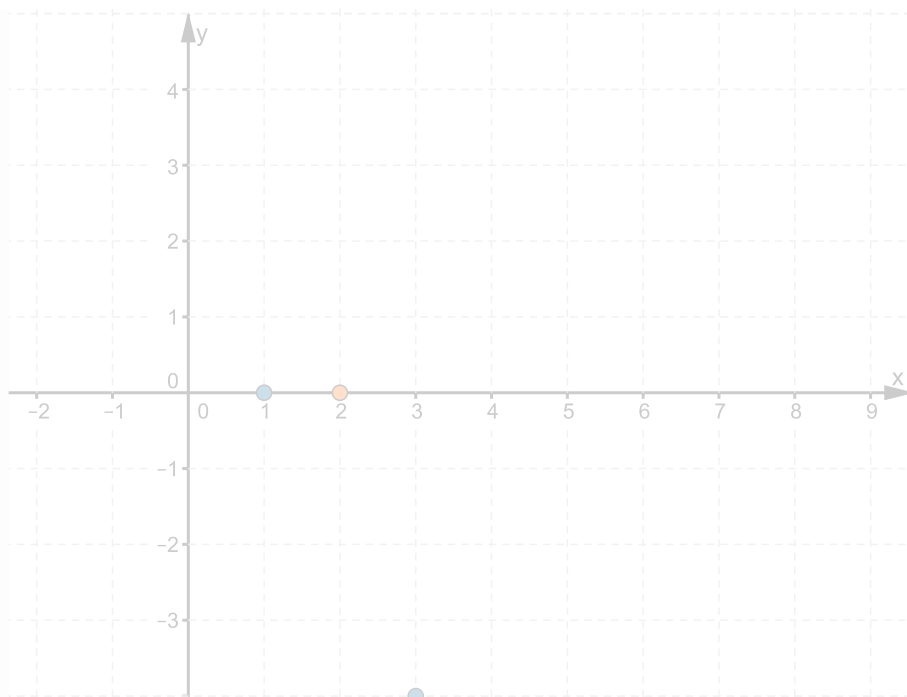
W nieskończonym ciągu (a_n) każdy wyraz, począwszy od drugiego, jest dwa razy większy od różnicy wyrazu poprzedniego i liczby 1. Wyraz $a_7 = 66$. Oblicz wyrazy ciągu od pierwszego do szóstego.

Brakujące wyrazy ciągu

przykład 1 z 5



Na wykresie zaznaczone są pewne wyrazy ciągu arytmetycznego. Zmień położenie punktów tak, by stały się wyrazami tego ciągu.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DpLrb1VJR>

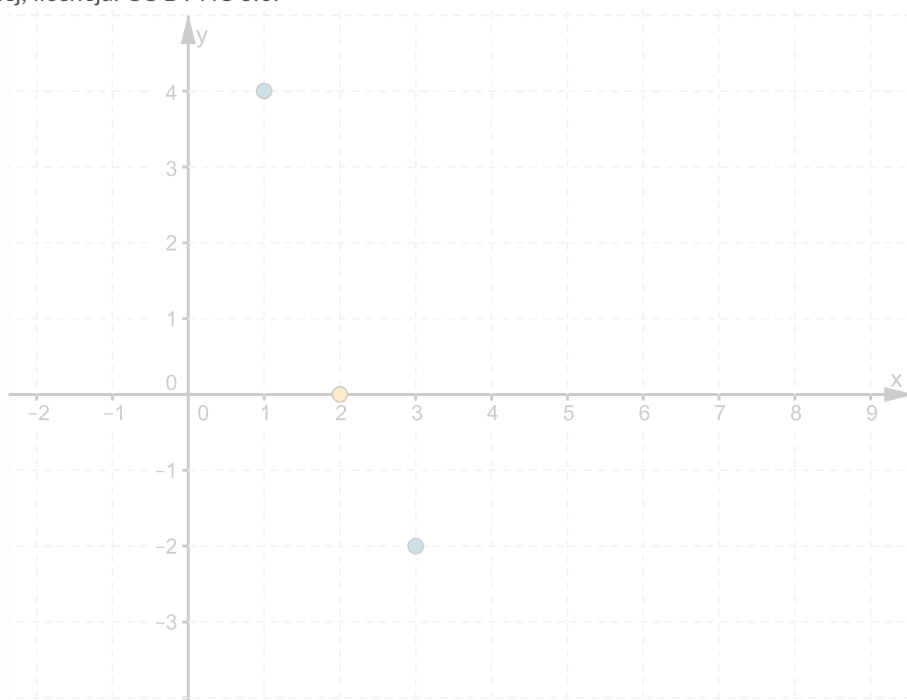
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Średnia arytmetyczna

przykład 1



Dane są dwa punkty. Zmień położenie punktu  tak, by jego współrzędne były średnimi arytmetycznymi współrzędnych podanych punktów.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DpLrb1VJR>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

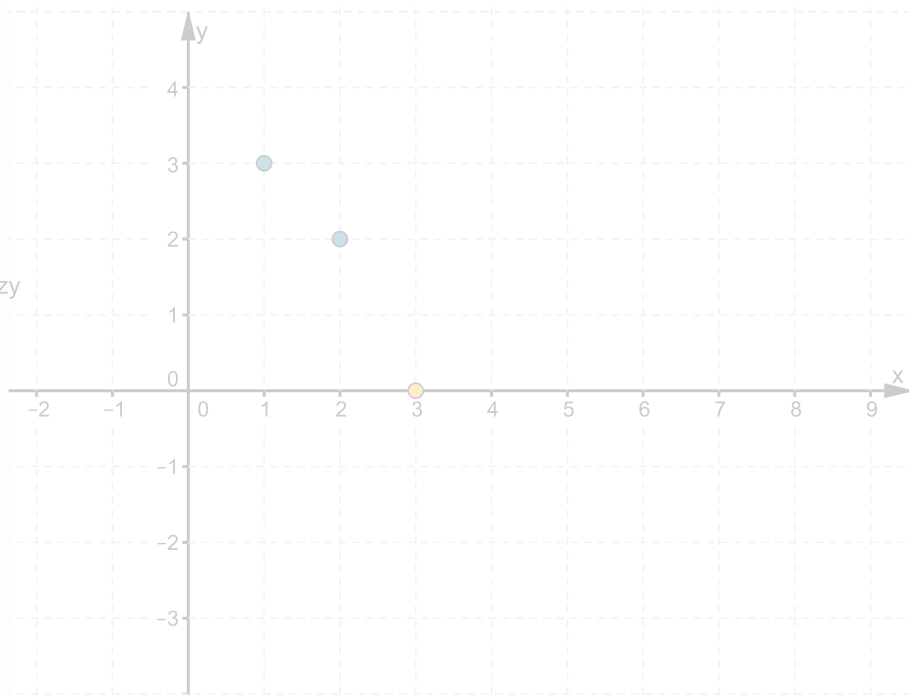
Trzeci wyraz ciągu

przykład 1 z 5



Na wykresie zaznaczone są dwa wyrazy ciągu arytmetycznego.

Zmień położenie punktu  tak, by stał się trzecim wyrazem tego ciągu.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DpLrb1VJR>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Ćwiczenie 15

Połącz w pary.

$$(2, 1, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \dots)$$

$$2 - \frac{1}{n}$$

$$(0, 1\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\frac{1}{4}, \dots)$$

$$1 + \frac{(-1)^n}{n}$$

$$(1, 2\frac{1}{2}, 1\frac{2}{3}, 1\frac{1}{4}, \dots)$$

$$\frac{2}{n}$$

$$(1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{2}{3}, 1\frac{3}{4}, \dots)$$

$$2 + \frac{(-1)^n}{n}$$

$$(2, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{4}, \dots)$$

$$1 + \frac{1}{n}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 16

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 17

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

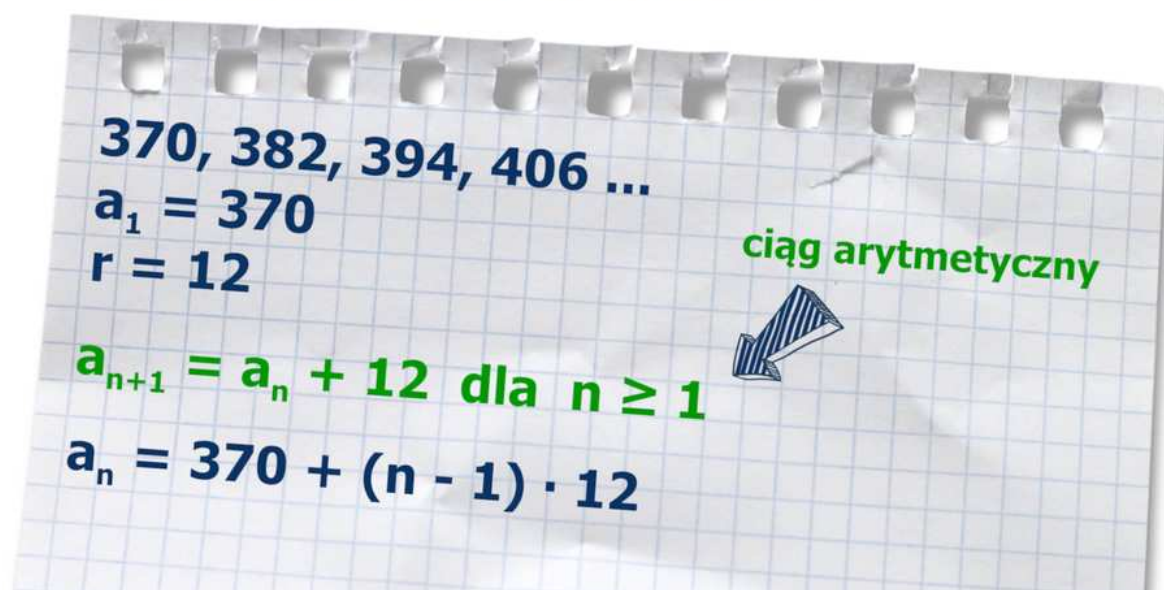
Ciąg arytmetyczny

Ciąg arytmetyczny

Przykład 1



Otrzymaliśmy ciąg, w którym pierwszy wyraz jest równy 370, a każdy następny wyraz jest większy od poprzedniego o 12.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja pokazuje chłopca uczącego się języka angielskiego. Pierwszego dnia nauki powtórzył wszystkie znane mu słowa, które znał i okazało się, że łącznie pamięta 370 słów. Postanowił, że każdego następnego dnia nauczy się 12 nowych słów. Ile słów Tomek będzie znał po 3 dniach, a ile po 15 dniach nauki? Po pierwszym dniu nauki Tomek znał 370 słów. Po drugim dniu będzie znał $370 + 12 = 382$ słowa, po trzecim $370 + 12 + 12 = 370 + 2$ razy 12 $= 394$ słowa, po czwartym $370 + 3$ razy 12 $= 406$ słów, i tak dalej. Jeżeli przez (a z indeksem dolnym n) oznaczymy liczbę słów, które Tomek będzie znał po n dniach nauki, to otrzymujemy: a z indeksem dolnym jeden $= 370$, a z indeksem dolnym dwa $= 382$, a z indeksem dolnym trzy $= 394$, a z indeksem dolnym cztery $= 406$, Zastanówmy się, ile słów będzie znał Tomek po 15 dniach nauki. Każdego dnia (poza pierwszym) Tomek poznaje 12 nowych słów, więc przez 14 dni (od drugiego do piętnastego włącznie) pozna 14 razy 12 nowych słów, a więc po 15 dniach nauki będzie znał a z indeksem dolnym piętnaście $= 370 + 14$ razy 12 $= 538$ słów. W ogólnym przypadku, po n dniach nauki Tomek

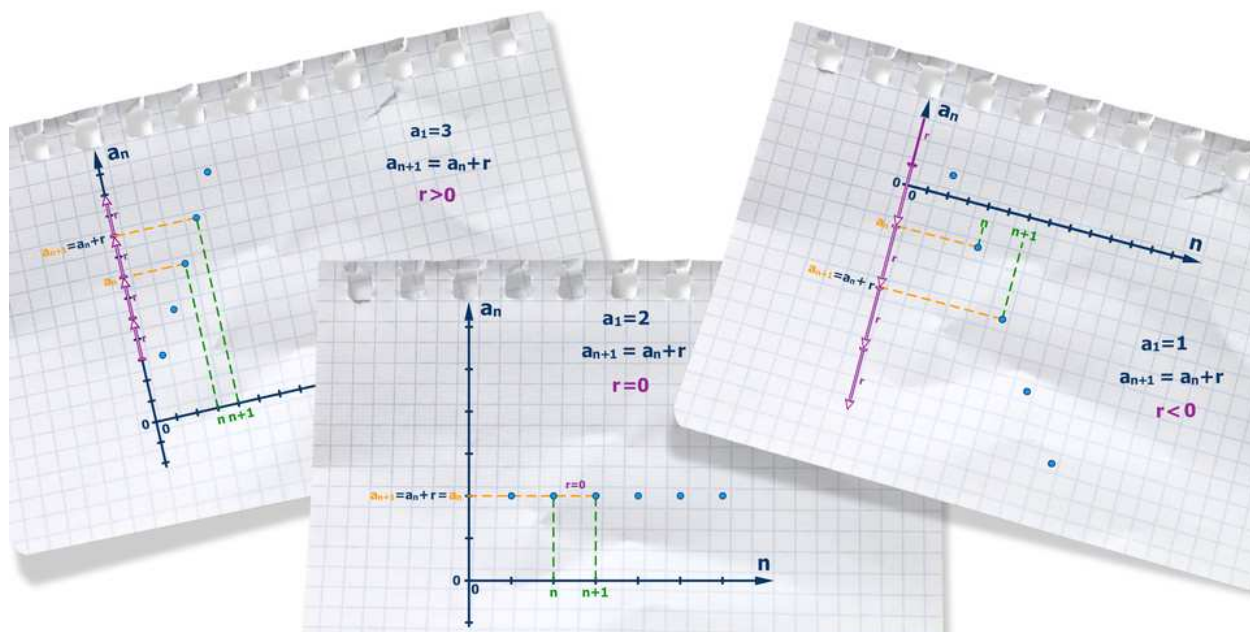
będzie znał (a z indeksem dolnym n) $=370 + (n-1) \cdot 12$ razy 12 słów. Otrzymaliśmy ciąg, w którym pierwszy wyraz jest równy 370, a każdy następny wyraz jest większy od poprzedniego o 12. Zatem ciąg ten możemy opisać za pomocą dwóch równości: a z indeksem dolnym jeden $=370$ i a z indeksem dolnym $n+1 = a$ z indeksem dolnym $n + 12$ dla n większe lub równe 1. Rozpatrywany przez nas ciąg, to przykład ciągu arytmetycznego.

Definicja: Ciąg arytmetyczny

Ciąg (a_n) nazywamy **arytmetycznym**, jeżeli ma co najmniej 3 wyrazy i każdy jego wyraz, począwszy od drugiego, jest sumą wyrazu poprzedniego i pewnej ustalonej liczby. Liczbę tę nazywamy różnicą ciągu i oznaczamy ją r .

Jeśli więc ciąg jest skończony i ma $k \geq 3$ wyrazów, to $a_{n+1} = a_n + r$ dla dowolnej liczby całkowitej $1 \leq n \leq k - 1$. Jeśli natomiast ciąg jest nieskończony, to $a_{n+1} = a_n + r$ dla dowolnej liczby całkowitej $n \geq 1$.

Ciąg arytmetyczny



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja prezentuje trzy wykresy ciągu arytmetycznego w układach współrzędnych. Przykład 1. Dany jest pierwszy wyraz ciągu a z indeksem dolnym jeden $=3$, kolejny wyraz ciągu a z indeksem dolnym $n+1 = (a$ z indeksem dolnym $n) + r$, gdzie r różnica ciągu arytmetycznego. Dla $r = 2$ otrzymano kolejne wyrazy ciągu a z indeksem dolnym dwa $=5$, a z indeksem dolnym trzy $=7$, a z indeksem dolnym cztery $=9$. Jeżeli $r > 0$, to punkty będące wyrazami ciągu leżą na prostej, która ilustruje funkcję rosnącą. Przykład 2. Dany jest pierwszy wyraz ciągu a z indeksem dolnym jeden $=2$, kolejny wyraz ciągu a z indeksem dolnym $n+1 = (a$ z indeksem dolnym $n) + r$, gdzie r różnica ciągu arytmetycznego. Dla $r = 0$ otrzymano kolejne wyrazy ciągu a z indeksem dolnym dwa $=2$, a z indeksem dolnym trzy $=2$,

a z indeksem dolnym cztery =2. Jeżeli $r = 0$, to punkty będące wyrazami ciągu leżą na prostej, która ilustruje funkcję stałą. Przykład 3. Dany jest pierwszy wyraz ciągu a z indeksem dolnym jeden =1, kolejny wyraz ciągu a z indeksem dolnym $n + 1 = (a$ z indeksem dolnym $n) + r$, gdzie r różnica ciągu arytmetycznego. Dla $r = -1,5$ otrzymano kolejne wyrazy ciągu a z indeksem dolnym dwa =-0,5, a z indeksem dolnym trzy =-2, a z indeksem dolnym cztery =-3,5. Jeżeli r

Zauważmy, że jeżeli znamy a_1 , czyli pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego, oraz różnicę r tego ciągu, to możemy wyznaczyć dowolny wyraz tego ciągu.

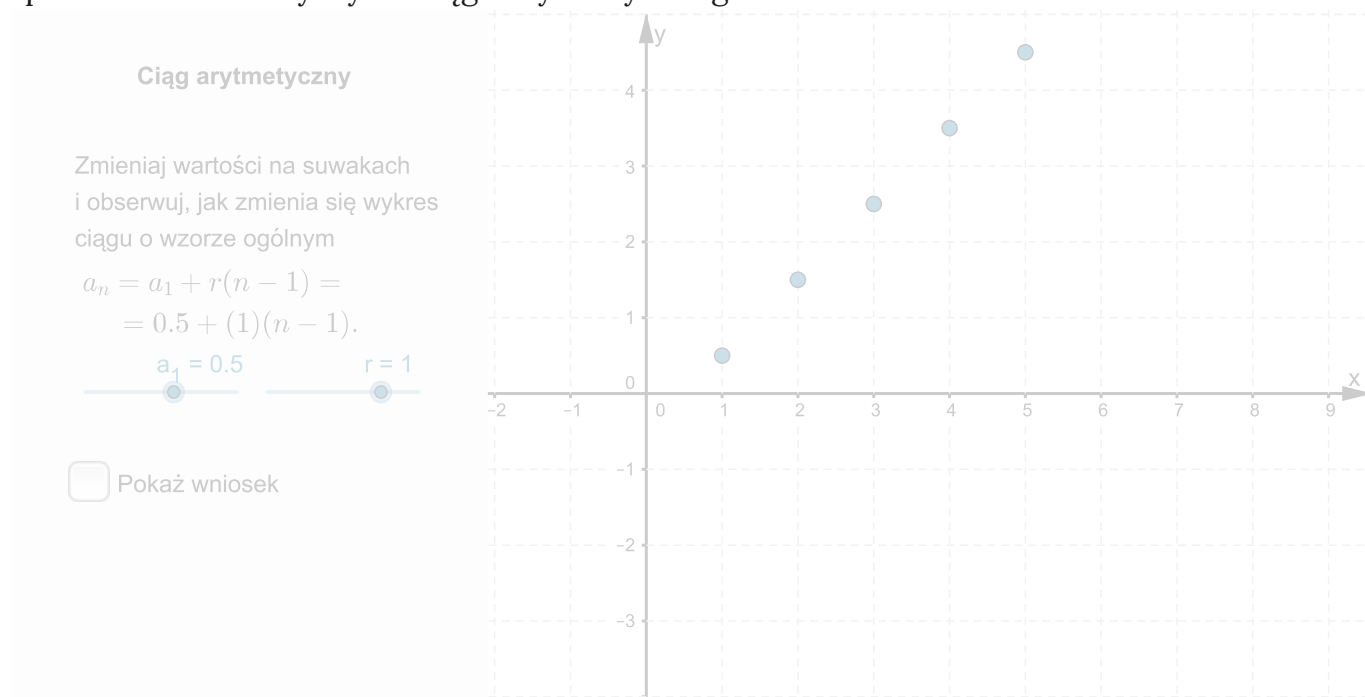
$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r$$

$$a_5 = a_4 + r = a_1 + 4r \dots$$

Wystarczy zatem do wyrazu a_1 dodać $(n - 1)$ razy różnicę r tego ciągu. Otrzymaliśmy w ten sposób wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego.

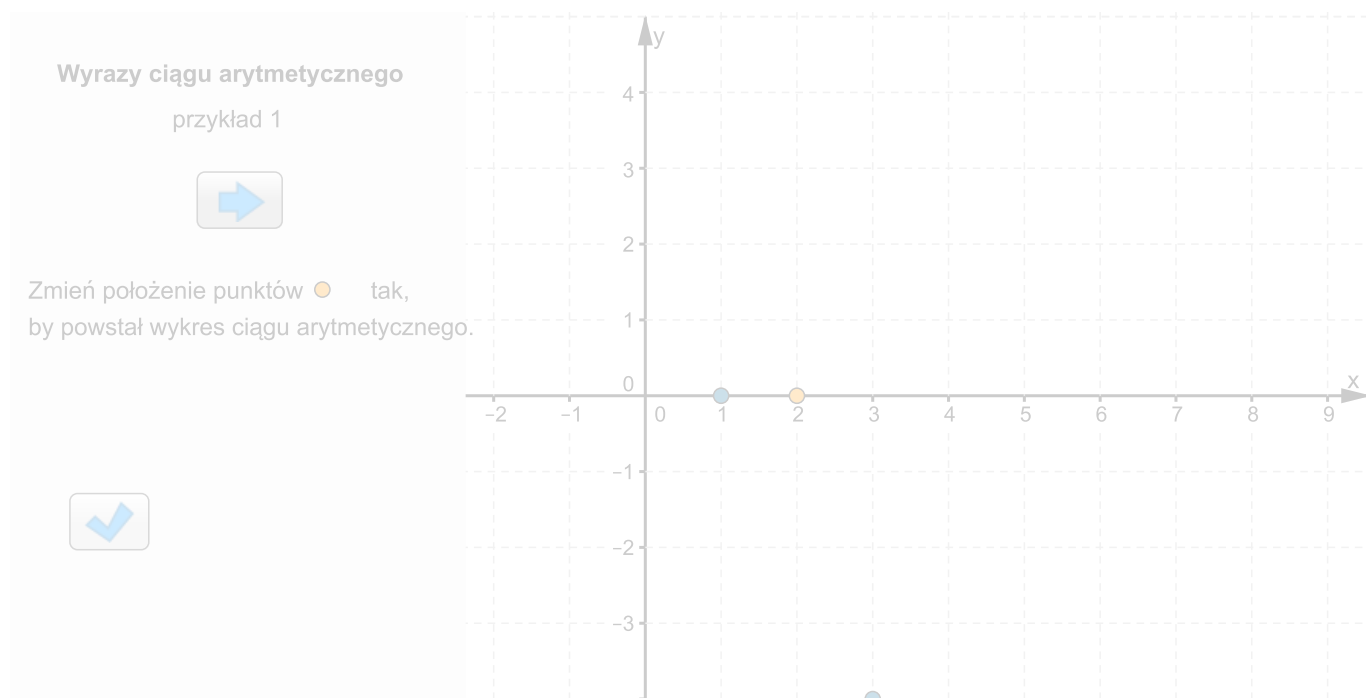


Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DyliBdW4j>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

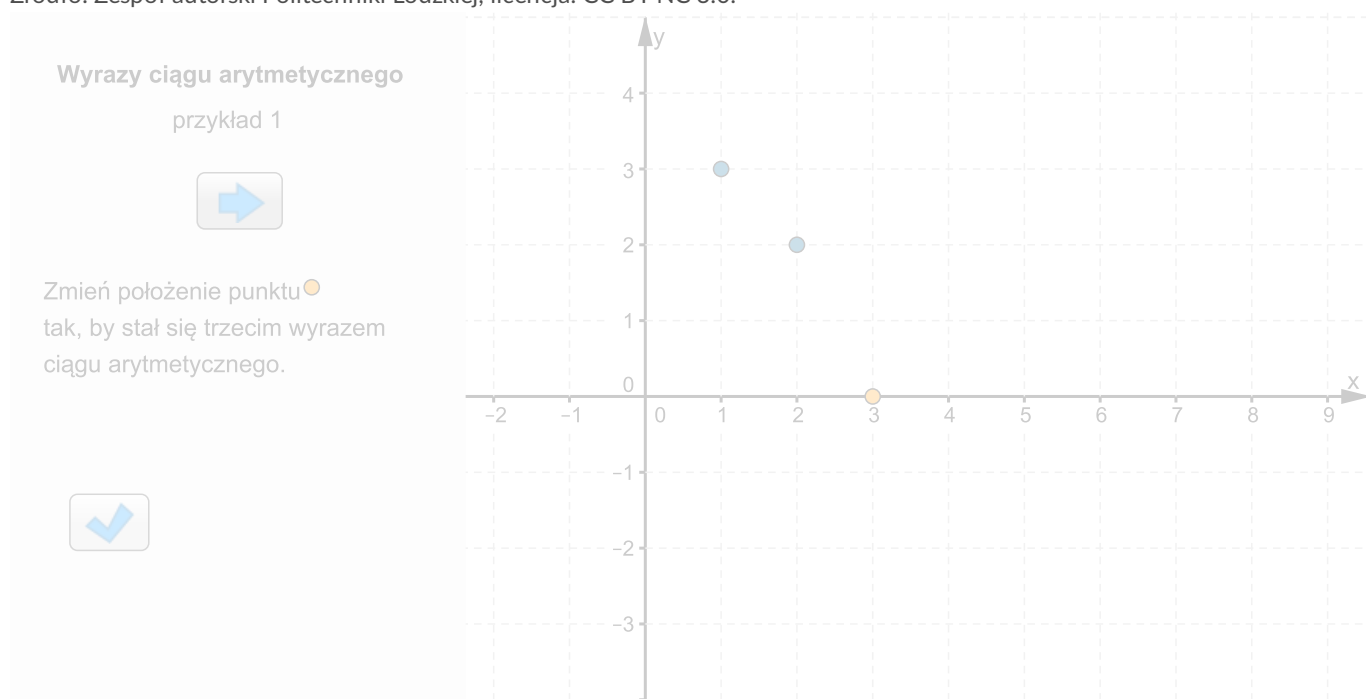
Twierdzenie: Wzór ogólny ciągu arytmetycznego

Każdy wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r jest równy $a_n = a_1 + (n - 1)r$. Zależność między dwoma kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, a więc równość $a_{n+1} = a_n + r$ możemy też zapisać w postaci równoważnej $a_{n+1} - a_n = r$.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DyliBdW4j>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DyliBdW4j>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 2

Sprawdź, czy nieskończony ciąg określony wzorem ogólnym $a_n = 2 - 3n$ jest ciągiem arytmetycznym. Jeżeli tak, to oblicz jego różnicę.

Zbadamy różnicę $a_{n+1} - a_n$ dwóch kolejnych wyrazów ciągu (a_n) . Wyznamy najpierw

$$a_{n+1} = 2 - 3(n + 1) = 2 - 3n - 3 = -3n - 1$$

Wtedy

$$a_{n+1} - a_n = -3n - 1 - (2 - 3n) = -3n - 1 - 2 + 3n = -3$$

Otrzymana różnica jest stała (nie zależy od n), co oznacza, że rozważany ciąg jest arytmetyczny, a otrzymana liczba -3 to właśnie różnica tego ciągu.

Zauważmy, że

$$a_1 = 2 - 3 \bullet 1 = -1$$

Wzór na n -ty wyraz to $a_n = -1 + (n - 1)(-3)$, co jest zgodne z tym, że $a_n = 2 - 3n$.

Przykład 3

Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy 7, a różnica tego ciągu jest równa -2 . Oblicz dziesiąty oraz trzydziesty drugi wyraz tego ciągu.

Korzystając ze wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego, mamy

$$a_{10} = 7 + (10 - 1)(-2) = 7 - 18 = -11$$

$$a_{32} = 7 + (32 - 1)(-2) = 7 - 62 = -55$$

Przykład 4

Piąty wyraz pewnego ciągu arytmetycznego jest równy $5\frac{2}{3}$, a siódmy wyraz tego ciągu jest równy 7. Podaj wyraz jedenasty tego ciągu.

Obliczymy jedenasty wyraz ciągu dwoma sposobami.

- sposób I

Zapiszemy, korzystając ze wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego, wyrazy a_5 i a_7

$$a_5 = a_1 + 4r$$

oraz

$$a_7 = a_1 + 6r$$

Otrzymujemy układ równań z dwiema niewiadomymi a_1 i r

$$\begin{cases} a_1 + 4r = 5\frac{2}{3} \\ a_1 + 6r = 7 \end{cases}$$

Rozwiążmy ten układ:

$$\begin{cases} a_1 + 4r = 5\frac{2}{3} \\ a_1 = 7 - 6r \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7 - 6r + 4r = 5\frac{2}{3} \\ a_1 = 7 - 6r \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2r = -7 + 5\frac{2}{3} \\ a_1 = 7 - 6r \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2r = -\frac{4}{3} \\ a_1 = 7 - 6r \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \frac{2}{3} \\ a_1 = 7 - 6 \cdot \frac{2}{3} = 3 \end{cases}$$

Możemy teraz, ponownie stosując wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego, obliczyć wyraz jedenasty

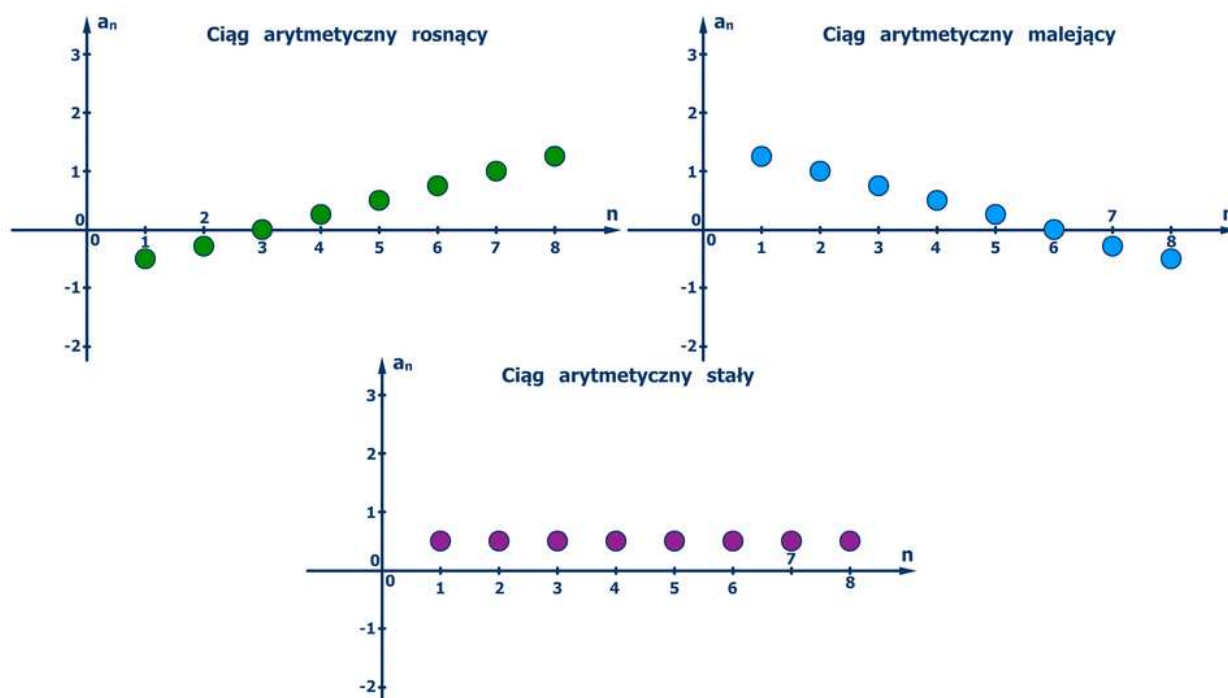
$$a_{11} = a_1 + 10r = 3 + 10 \cdot \frac{2}{3} = 9\frac{2}{3}$$

- sposób II

Zauważmy, że wyraz siódmy różni się od piątego wyrazu o $2r$, gdyż $a_7 - a_6 = r$ oraz $a_6 - a_5 = r$. Zatem $2r = 7 - 5\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$. Szukany wyraz jedenasty różni się od wyrazu siódmego o $4r$. Zatem

$$a_{11} = a_7 + 4r = 7 + 2 \cdot \frac{4}{3} = 9\frac{2}{3}$$

Zwróćmy uwagę, że każdy ciąg arytmetyczny jest monotoniczny.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

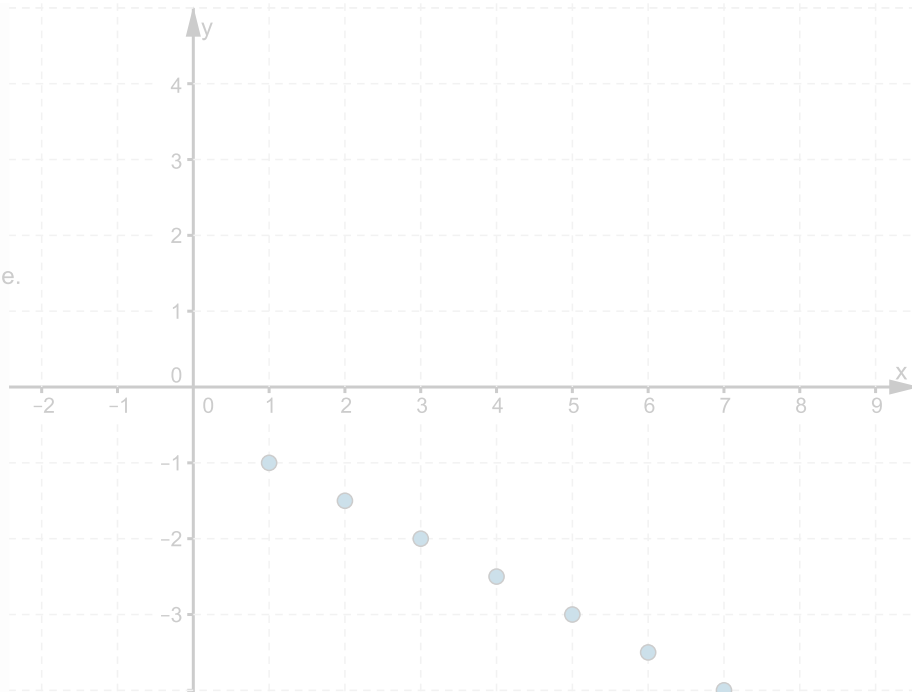
Twierdzenie: Monotoniczność ciągu arytmetycznego

Jeżeli różnica ciągu arytmetycznego jest dodatnia, to ciąg ten jest rosnący. Jeżeli różnica ciągu arytmetycznego jest ujemna, to ciąg ten jest malejący. Jeżeli różnica ciągu arytmetycznego jest równa zero, to ciąg jest stały i jego wszystkie wyrazy są równe a_1 .

Wzór ogólny



Napisz wzór ogólny ciągu arytmetycznego o pokazanym wykresie.

 $a_n =$ 

Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DyliBdW4j>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Zauważmy, że każdy punkt wykresu ciągu arytmetycznego $a_n = a_1 + (n - 1)r$ leży na prostej o równaniu $y = a_1 + (x - 1)r$, czyli $y = rx + a_1 - r$, gdzie r oraz a_1 (różnica i pierwszy wyraz ciągu) to ustalone dla danego ciągu liczby. Współczynnik kierunkowy tej prostej jest równy różnicy ciągu. Tak więc ciąg (a_n) jest:

- rosnący, gdy rosnąca jest funkcja liniowa, której wykresem jest ta prosta, a więc gdy współczynnik kierunkowy r tej prostej jest dodatni, czyli $r > 0$;
- malejący, gdy malejąca jest funkcja liniowa, której wykresem jest ta prosta, a więc gdy współczynnik kierunkowy r tej prostej jest ujemny, czyli $r < 0$;
- stały, gdy stała jest funkcja liniowa, której wykresem jest ta prosta, a więc gdy współczynnik kierunkowy r tej prostej jest równy zero, czyli $r = 0$.

Przykład 5

Ciąg (a_n) jest arytmetyczny oraz $a_1 + a_5 = 8$ i $a_2 \cdot a_8 = 19$. Oblicz pierwszy wyraz oraz różnicę ciągu (a_n) .

Ze wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego możemy zapisać wyrazy a_2 , a_5 i a_8 w zależności od a_1 i r . Możemy wtedy zapisać równanie $a_1 + a_5 = 8$, podane w treści zadania, w postaci $a_1 + (a_1 + 4r) = 8$. Stąd $a_1 = 4 - 2r$. Podobnie możemy zapisać

równanie $a_2 \bullet a_8 = 19$ w postaci $(a_1 + r)(a_1 + 7r) = 19$. W ten sposób otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą r

$$(4 - 2r + r)(4 - 2r + 7r) = 19$$

Przekształcamy je w sposób równoważny

$$(4 - r)(4 + 5r) = 19$$

$$16 + 16r - 5r^2 = 19$$

$$-5r^2 + 16r - 3 = 0$$

Obliczamy wyróżnik tego równania $\Delta = 256 - 60 = 196 > 0$. Zatem równanie to ma dwa rozwiązania $r_1 = 3$ oraz $r_2 = \frac{1}{5}$.

To oznacza, że istnieją dwa ciągi arytmetyczne, których wyrazy spełniają podane w treści zadania warunki. Gdy $r = 3$, to $a_1 = 4 - 2r = 4 - 2 \bullet 3 = -2$, a gdy $r = \frac{1}{5}$, to $a_1 = 4 - 2r = 4 - 2 \bullet \frac{1}{5} = \frac{18}{5}$.

Ćwiczenie 1

Połącz w pary wzór ogólny ciągu arytmetycznego z odpowiednimi wartościami a_1 i r .

$$a_n = 5n - 4\frac{1}{2}$$

$$a_1 = 5, \quad r = -\frac{1}{2}$$

$$a_n = -\frac{1}{2}n - 4\frac{1}{2}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad r = 5$$

$$a_n = -\frac{1}{2}n + 5\frac{1}{2}$$

$$a_1 = -5, \quad r = -\frac{1}{2}$$

$$a_n = -5n + 5\frac{1}{2}$$

$$a_1 = 5, \quad r = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{2}n - 5\frac{1}{2}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad r = -5$$

$$a_n = \frac{1}{2}n + 4\frac{1}{2}$$

$$a_1 = -5, \quad r = \frac{1}{2}$$

Ćwiczenie 2

Uporządkuj tak, aby uzyskać malejący ciąg arytmetyczny.

$1\frac{1}{10}$



$2\frac{3}{5}$



$2\frac{1}{10}$



$-\frac{2}{5}$



$\frac{3}{5}$



$1\frac{3}{5}$



$\frac{1}{10}$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3

Wyrazami nieskończonego ciągu (a_n) są kolejne liczby naturalne, które przy dzieleniu przez 6 dają resztę 2, a trzeci wyraz tego ciągu $a_3 = 56$. Oblicz siedemdziesiąty wyraz tego ciągu.

Ćwiczenie 4

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐ Ciąg $c_n = 2n - 3$ jest ciągiem arytmetycznym rosnącym.

☐ Ciąg $a_n = n^2 + 7$ jest ciągiem arytmetycznym.

☐ Ciąg $b_n = \frac{n}{7} + 2$ jest ciągiem arytmetycznym o różnicy 2.

Ćwiczenie 5

Liczby $a, 2, b, c, 3, d$ w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny. Wyznacz a , b , c i d .

Ćwiczenie 6

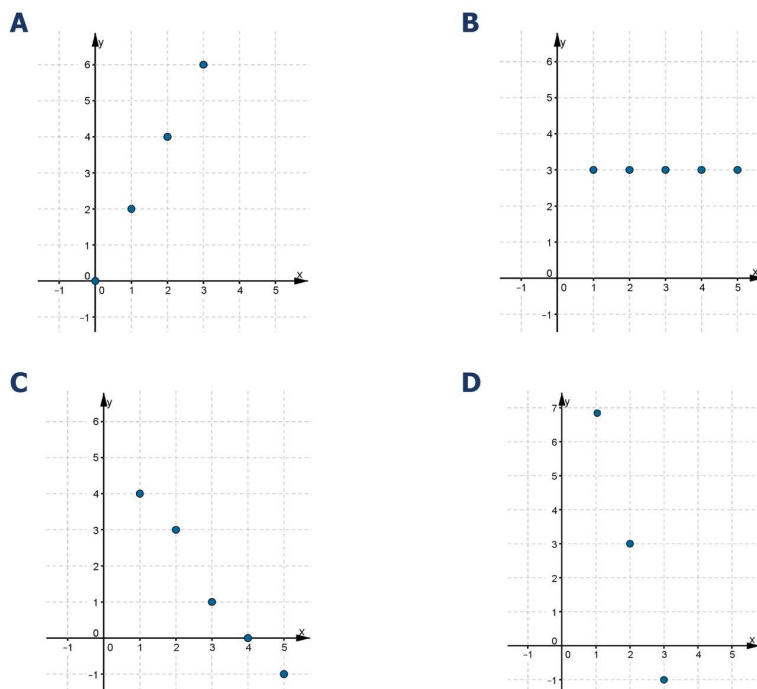
Pomiędzy liczby 6 i 30 wstaw siedem liczb, tak aby razem z liczbami 6 i 30 tworzyły ciąg arytmetyczny.

Ćwiczenie 7

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) , w którym $a_{10} = 10\sqrt{2} + 9$ oraz $r = \sqrt{2} + 1$. Wyznacz równanie prostej, w której zawarty jest wykres ciągu (a_n) .

Ćwiczenie 8

Który z rysunków przedstawia wykres ciągu arytmetycznego?



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9

Wyrazy każdego nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n) spełniają warunek

☐ $a_4 + a_5 = a_2 + a_7$

☐ $a_6 + a_8 = 2a_7$

☐ $a_3 + a_7 = a_{10}$

Ćwiczenie 10

Liczby 5, -2 , -9 są trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego określonego dla $n \geq 1$. Wzór ogólny tego ciągu ma postać.

☐ $-7n + 12$

☐ $7n - 12$

☐ $-7n - 12$

☐ $7n + 12$

Ćwiczenie 11

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) , w którym $r = 6$ i $a_{10} = 55$. Wtedy pierwszy wyraz ciągu jest równy

☐ -5

☐ 5

☐ 1

☐ -1

Ćwiczenie 12

Ciąg arytmetyczny (a_n) jest określony wzorem $a_n = 2n + 6$. Wtedy

☐ $a_6 + a_{12} = 38$

☐ $a_6 + a_{12} = 48$

☐ $a_6 + a_{12} = 28$

☐ $a_6 + a_{12} = 18$

Ćwiczenie 13

Ciąg arytmetyczny jest określony wzorem $a_n = 4n - 21$. Ile wyrazów tego ciągu jest dodatnich?

☐ 7

☐ 4

☐ 5

☐ 6

Ćwiczenie 14

Sprawdź, czy podany ciąg jest arytmetyczny. Jeżeli tak, to podaj jego różnicę.

$$a_n = \frac{2n}{n+1}$$

$$b_n = 3 - \frac{n+2}{5}$$

$$c_n = n^2 + 5n$$

Ćwiczenie 15

Połącz w pary ciąg arytmetyczny z odpowiadającą mu różnicą.

$$-\frac{1}{2}$$

$$(5\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots)$$

$$\frac{1}{2}$$

$$(2\frac{1}{3}, 4\frac{1}{3}, 6\frac{1}{3}, 8\frac{1}{3}, \dots)$$

$$-2$$

$$(4\frac{1}{2}, 4\frac{5}{6}, 5\frac{1}{6}, 5\frac{1}{2}, \dots)$$

$$\frac{1}{3}$$

$$(3\frac{1}{2}, 3, 2\frac{1}{2}, 2, \dots)$$

$$-\frac{1}{3}$$

$$(3\frac{1}{3}, 3\frac{5}{6}, 4\frac{1}{3}, 4\frac{5}{6}, \dots)$$

$$2$$

$$(5\frac{1}{6}, 4\frac{5}{6}, 4\frac{1}{2}, 4\frac{1}{6}, \dots)$$

Ćwiczenie 16

Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego, wiedząc, że $a_3 = \frac{4}{5}$ oraz $a_{10} = 5$.

Ćwiczenie 17

Oblicz pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) , którego różnica jest równa $r = -7$ oraz ósmy wyraz jest równy $a_8 = 23$.

Ćwiczenie 18

Wyznacz takie liczby a , b , c i d , żeby ciąg $(3, a, b, c, 8, d)$ był arytmetyczny.

Ćwiczenie 19

Oblicz pierwszy wyraz i różnicę malejącego ciągu arytmetycznego (a_n) , w którym $a_2 + a_7 = -17$ oraz $a_3 \cdot a_5 = 11$.

Ćwiczenie 20

Ciąg arytmetyczny składa się z trzech wyrazów. Ich suma jest równa 12, a suma ich kwadratów jest równa 66. Oblicz wyrazy tego ciągu.

Ćwiczenie 21

Miary kątów w pewnym czworokącie tworzą ciąg arytmetyczny. Największy z kątów ma miarę 105° . Oblicz miary pozostałych kątów tego czworokąta.

Ćwiczenie 22

Rozważmy ciąg trójkątów równobocznych, których długości boków tworzą ciąg arytmetyczny.

1. Czy obwody tych trójkątów tworzą ciąg arytmetyczny?
2. Czy pola tych trójkątów tworzą ciąg arytmetyczny?

Ćwiczenie 23

Wykaż, że jeżeli cyfry liczby trzycyfrowej tworzą ciąg arytmetyczny, to liczba ta jest podzielna przez 3.

Ćwiczenie 24

Oblicz, ile wyrazów ma ciąg arytmetyczny, w którym suma dwóch pierwszych wyrazów jest równa 23, suma dwóch ostatnich wyrazów jest równa 119, a wyraz jedenasty jest równy 40.

Ćwiczenie 25

Wykaż, że jeżeli w ciągu arytmetycznym prawdziwe są zależności $a_n = m$ oraz $a_m = n$ dla $n \neq m$, to różnica tego ciągu jest równa -1 .

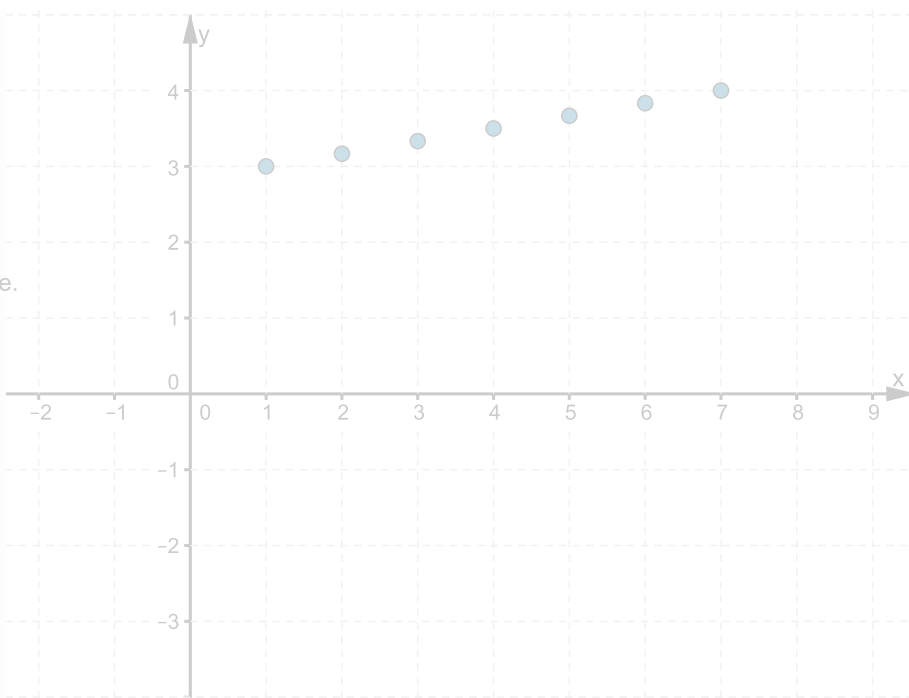
Wzór ogólny



Napisz wzór ogólny ciągu arytmetycznego o pokazanym wykresie.

Uwaga: Wzór $2 + \frac{n}{3}$ wpisz w postaci $2 + n/3$

$a_n =$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DyliBdW4j>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Ciągi – własności ciągów arytmetycznych

Własności ciągu arytmetycznego

Przykład 1

Rozważmy dowolny ciąg arytmetyczny (a_n) określony dla $n > 1$ i dowolnie wybrany jego wyraz a_n .

Poszukamy zależności pomiędzy wyrazem a_n ciągu oraz wyrazami z nim sąsiadującymi, czyli wyrazem o numerze o jeden mniejszym a_{n-1} oraz wyrazem o numerze o jeden większym a_{n+1} . Zauważmy, że są to trzy kolejne wyrazy ciągu. Różnica pomiędzy kolejnymi dwoma wyrazami jest stała.

Mamy więc

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$$

stąd

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$$

Własność: Własności wyrazów ciągu arytmetycznego

Ciąg (a_n) jest arytmetyczny wtedy i tylko wtedy, gdy dowolny wyraz tego ciągu (poza pierwszym i ostatnim, jeśli ciąg jest skończony) jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2} \text{ dla } n > 1$$

Niekiedy łatwiej korzystać z tej równości zapisanej w postaci

$$2a_n = a_{n+1} + a_{n-1}$$

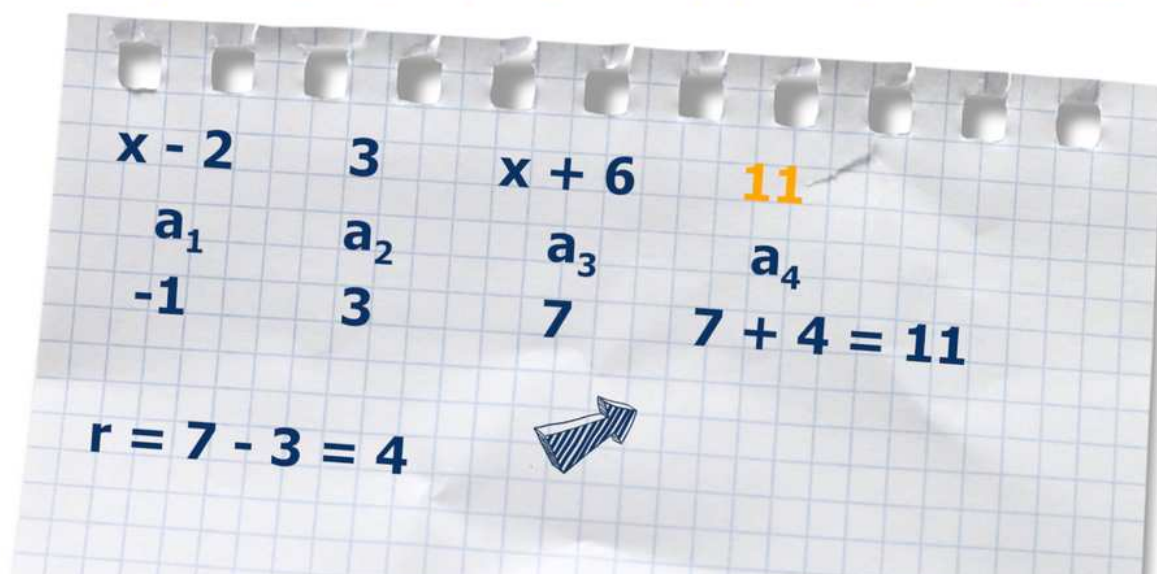
Przykład 2

Liczby $x - 2$, 3 , $x + 6$ są w podanej kolejności pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz czwarty wyraz tego ciągu.

Korzystając z własności ciągu arytmetycznego, mamy $3 = \frac{x-2+x+6}{2}$, stąd $6 = 2x + 4$, czyli $x = 1$. Zatem trzy pierwsze wyrazy tego ciągu to -1 , 3 , 7 . Różnica ciągu jest równa $7 - 3 = 4$. Czwarty wyraz ciągu jest zatem równy $a_4 = 11$.



Liczby $x - 2$, 3 , $x + 6$ są w podanej kolejności pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Obliczmy czwarty wyraz tego ciągu.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

E-podręczniki z matematyki

Przykład 3

Sprawdź, czy ciąg $\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)$ jest arytmetyczny.

Ponieważ $\frac{\frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{2}+1}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}+1}{2-1} + \frac{\sqrt{2}-1}{2+1}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, więc ten ciąg jest arytmetyczny.

Przykład 4

Wyznacz kilka początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) , wiedząc, że jego początkowe wyrazy spełniają warunki $a_1 + a_2 + a_3 = 12$ oraz $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 28$.

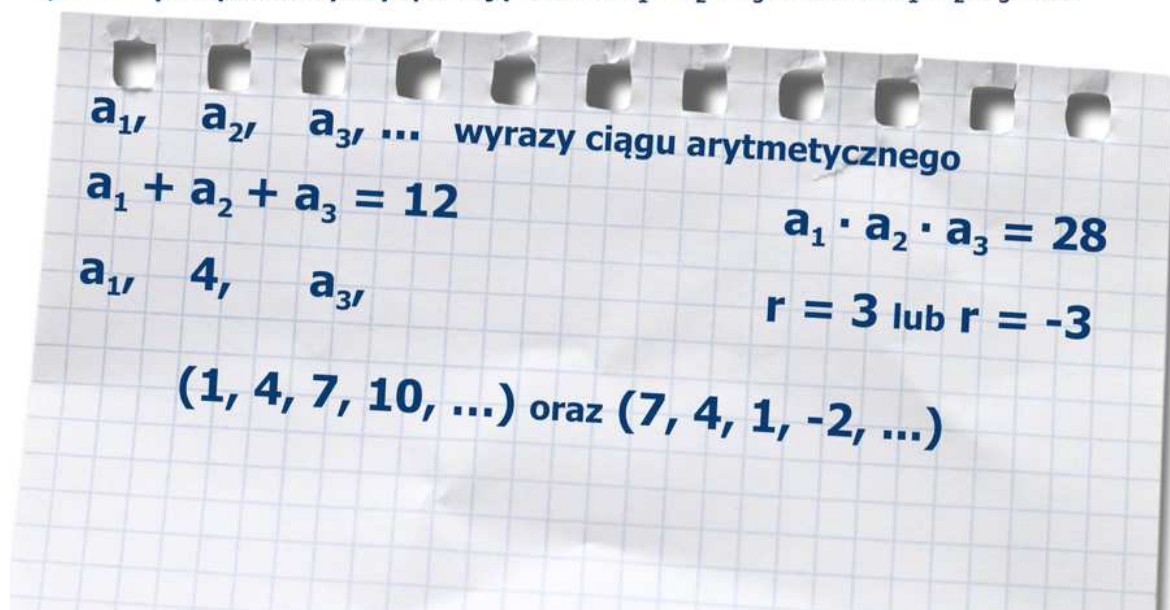
Ponieważ $2a_2 = a_1 + a_3$, to pierwsze równanie możemy zapisać w postaci $3a_2 = 12$, stąd $a_2 = 4$. Ponieważ $a_1 = a_2 - r = 4 - r$ oraz $a_3 = a_2 + r = 4 + r$, równanie $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 28$ zapisujemy w postaci

$$4(4 - r)(4 + r) = 28$$

$16 - r^2 = 7$, stąd $r = 3$ lub $r = -3$. Otrzymaliśmy więc dwa ciągi arytmetyczne postaci $(1, 4, 7, 10, \dots)$ oraz $(7, 4, 1, -2, \dots)$.



Wyznamy kilka pocątkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) wiedzác, że jego pocątkowe wyrazy spełniajå warunki $a_1 + a_2 + a_3 = 12$ oraz $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 28$.



Film dostępný na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

E-podręczniki z matematyki

Zauważmy, że twierdzenie możemy uogólnić. Wybierzmy dowolny wyraz a_n , który nie jest pierwszym ani ostatnim wyrazem ciągu, a następnie całkowitå dodatnią liczbę $k < n$. Mamy wówczas

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

$$a_{n+k} = a_1 + (n + k - 1)r$$

$$a_{n-k} = a_1 + (n - k - 1)r$$

Wtedy

$$\frac{a_{n+k} + a_{n-k}}{2} = \frac{a_1 + (n+k-1)r + a_1 + (n-k-1)r}{2} = \frac{2a_1 + 2(n-1)r}{2} = a_1 + (n-1)r = a_n$$

Możemy zatem sformułować twierdzenie.

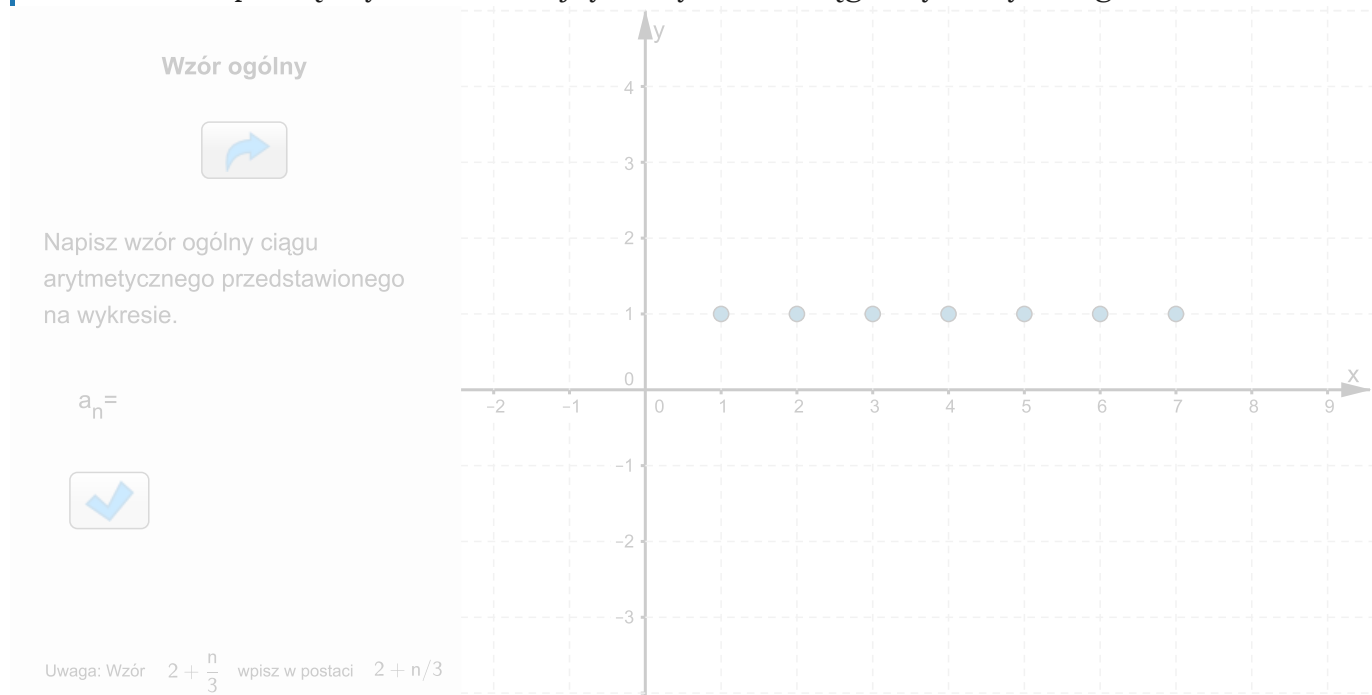
Własność: Uogólnienie własności wyrazów ciągu arytmetycznego

Dla dowolnego wyrazu ciągu arytmetycznego $n > 1$ oraz dowolnej dodatniej liczby całkowitej $k < n$ mamy

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$$

Zauważmy, że wyrazy a_{n-k} , a_n , a_{n+k} są trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy kr . Zatem twierdzenie to wynika także z twierdzenia

o zależności pomiędzy trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D11SU2yUM>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 5

W pewnym ciągu arytmetycznym wyraz piąty jest równy 23, a wyraz piętnasty 37. Oblicz wyraz dziesiąty.

$$a_{10} = \frac{a_5 + a_{15}}{2} = \frac{23 + 37}{2} = 30$$

Ćwiczenie 1

Jaką liczbę należy wpisać pomiędzy liczby 7 i 20, żeby otrzymać trzywyrazowy ciąg arytmetyczny?

Ćwiczenie 2

Liczby a , b , 22 w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym $a + b = 26$. Oblicz a i b .

Ćwiczenie 3

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4

Liczby $5x - 3$, $x^2 + 3x$, $3x^2 - 3$ są w podanej kolejności trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Oblicz różnicę tego ciągu.

Ćwiczenie 5

Dla pewnych liczb x i y wartości wyrażeń $x + 4y$, $3x + 2y$, $x + 2y + 2$, $3x + y - 3$ są czterema początkowymi, kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) . Wyznacz liczby x i y , a następnie piąty wyraz tego ciągu.

Ćwiczenie 6

Nieskończony ciąg liczbowy (a_n) określony jest wzorem $a_n = 3 - \frac{2}{n}$. Wyznacz taką liczbę x , dla której ciąg (a_3, a_9, x) jest arytmetyczny.

Ćwiczenie 7

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej m ciąg $(\frac{m+4}{6}, \frac{m+2}{4}, \frac{m+1}{3})$ jest arytmetyczny.

Ćwiczenie 8

Liczby 5, a , 25 w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny. Zatem a jest równe

☐ 15

☐ 20

☐ 30

☐ 10

Ćwiczenie 9

Jaką liczbę należy wstawić pomiędzy liczby $\sqrt{3} + 2$ oraz $3\sqrt{3} - 4$, żeby wraz z nimi utworzyła trzywyrazowy ciąg arytmetyczny?

Ćwiczenie 10

Wyznacz liczbę x , dla której liczby $x + 7$, $2x + 9$, $3x + 11$ w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny.

Ćwiczenie 11

Liczby $6x^2 + 8$, $2x^2 + 5x - 3$, $7 - 7x$ są w podanej kolejności trzema pierwszymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Wyznacz x .

Ćwiczenie 12

Ciąg $(\frac{1}{x+1}, \frac{2x+1}{3x}, \frac{x+2}{x+1})$ jest arytmetyczny dla pewnej liczby $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. Wyznacz tę liczbę.

Ćwiczenie 13

Ciąg $(x + 3y - 4, -x + y + 1, x + y, 3x + 2y, \dots)$ jest arytmetyczny. Wyznacz x i y oraz oblicz dwudziesty wyraz tego ciągu.

Ćwiczenie 14

Znajdź wszystkie liczby dwucyfrowe x , dla których liczba x , podwojona cyfra jej jednośc i podwojona cyfra jej dziesiątek są trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

Ćwiczenie 15

Wiedząc, że w pewnym ciągu arytmetycznym (a_n) mamy $a_4 = 1$ oraz $a_9 = 17$, wyznacz czternasty wyraz tego ciągu.

Ćwiczenie 16

W pewnym ciągu arytmetycznym $a_1 = 4$ oraz $a_5 = 17$. Znajdź $a_2 + a_3 + a_4$.

Ćwiczenie 17

Niech a, b, c będą dowolnymi dodatnimi liczbami, takimi że ciąg (a^2, b^2, c^2) jest arytmetyczny. Udowodnij, że ciąg liczb $(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b})$ też jest arytmetyczny.

Ciągi – suma wyrazów ciągu arytmetycznego

Suma wyrazów ciągu arytmetycznego

Przykład 1

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja ilustruje sumę S z indeksem dolnym n początkowych n wyrazów ciągu arytmetycznego a z indeksem dolnym n . Suma S z indeksem dolnym n początkowych n = ułamek w liczniku a z indeksem dolnym jeden plus a z indeksem dolnym n mianownik 2 koniec ułamka razy n .

Przykład 2

Podobną metodę możemy zastosować do zsumowania n początkowych wyrazów dowolnego ciągu arytmetycznego. Oznaczmy symbolem S_n sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n) , czyli $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Zapiszmy zatem sumę S_n dwukrotnie: raz składniki zapiszemy od pierwszego do ostatniego, drugi raz odwrotnie, czyli

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1$$

Każdy wyraz ciągu (a_n) możemy zapisać w postaci $a_n = a_1 + (n - 1)r$, więc

$$S_n = a_1 + (a_1 + r) + \dots + (a_1 + (n - 2)r) + (a_1 + (n - 1)r)$$

$$S_n = (a_1 + (n - 1)r) + (a_1 + (n - 2)r) + \dots + (a_1 + r) + a_1$$

Zauważ, że w każdej kolumnie otrzymujemy sumę $2a_1 + (n - 1)r$, a to jest suma $a_1 + a_n$.

Ponieważ kolumn jest n , więc $2S_n = n \cdot (2a_1 + (n - 1)r) = n \cdot (a_1 + a_n)$.

W ten sposób udowodniliśmy twierdzenie o sumie wyrazów ciągu arytmetycznego.

Twierdzenie: O sumie wyrazów ciągu arytmetycznego

Suma S_n początkowych n wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Przykład 3

Oblicz sumę $1 + 2 + 3 + \dots + 100$.

Sumowane liczby tworzą ciąg arytmetyczny, w którym $a_1 = 1$ oraz $a_{100} = 100$. Mamy więc

$$S_{100} = \frac{1+100}{2} \cdot 100 = 5050$$

Przykład 4

Oblicz sumę stu początkowych liczb naturalnych, które podzielone przez 3 dają resztę 2.

Pierwszą liczbą naturalną, która podzielona przez 3 daje resztę 2 jest 2, drugą 5, trzecią 8. Liczby te tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 3. Suma początkowych wyrazów tego ciągu jest równa

$$S_{100} = \frac{2a_1 + 99r}{2} \bullet 100 = \frac{2 \bullet 2 + 99 \bullet 3}{2} \bullet 100 = 15050.$$

Przykład 5

Rozwiąż równanie $3 + 7 + 11 + \dots + (4n - 1) = 595$ z niewiadomą n .

Liczby, które sumujemy po lewej stronie równania, są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie $a_1 = 3$, różnicy $r = 4$. Suma ta składa się z n wyrazów. Ponieważ n jest liczbą wyrazów, więc jest liczbą całkowitą dodatnią. Ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego mamy

$$S_n = \frac{2 \bullet 3 + (n-1)4}{2} \bullet n = 3n + 2n(n-1) = 2n^2 + n$$

Z treści zadania wynika, że

$$2n^2 + n = 595$$

Otrzymaliśmy równanie kwadratowe $2n^2 + n - 595 = 0$, które ma dwa rozwiązania $n_1 = -17,5$ oraz $n_2 = 17$. Tylko druga z liczb jest całkowita dodatnia. Zatem rozwiązaniem równania jest liczba 17.

Przykład 6

Liczby 9, 5, 1 są w podanej kolejności trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) .

Oblicz sumę $a_{10} + a_{11} + a_{12} + \dots + a_{30}$.

Pierwszy wyraz ciągu (a_n) jest równy $a_1 = 9$, a różnica ciągu jest równa $r = a_2 - a_1 = 5 - 9 = -4$.

- sposób I

Zauważmy, że

$$+ a_{11} + a_{12} + \dots + a_{30} = a_1 + a_2 + \dots + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + \dots + a_{30} - (a_1 + a_2 + \dots + a_9) = S_{30}$$

Ponieważ

$$S_{30} = \frac{2a_1 + 29r}{2} \bullet 30 = (18 - 116) \bullet 15 = -1470$$

oraz

$$S_9 = \frac{2a_1 + 8r}{2} \bullet 9 = \frac{18 - 32}{2} \bullet 9 = -63,$$

więc

$$a_{10} + a_{11} + a_{12} + \dots + a_{30} = -1470 + 63 = -1407$$

- sposób II

Możemy zauważyć, że wyrazy $a_{10}, a_{11}, a_{12}, \dots, a_{30}$, które mamy zsumować, są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego (b_n) , który składa się z 21 wyrazów i w którym

$$b_1 = a_{10} = a_1 + 9r = -27$$

oraz

$$b_{21} = a_{30} = a_1 + 29r = -107$$

Suma 21 początkowych wyrazów tego ciągu jest więc równa

$$S_{21} = \frac{b_1 + b_{21}}{2} \cdot 21 = \frac{-27 - 107}{2} \cdot 21 = -1407$$

Ćwiczenie 1

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2

Suma kolejnych 100 liczb naturalnych jest równa 7250. Jakie to liczby?

Ćwiczenie 3

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐

Suma n wyrazów ciągu arytmetycznego o wyrazie ogólnym $a_n = 2n - 7$ jest równa 352. Ciąg składa się z 22 wyrazów.

☐

Suma n wyrazów ciągu arytmetycznego o wyrazie ogólnym $a_n = 2n - 7$ dla $n \geq 1$ jest równa 352. Ciąg składa się z 22 wyrazów.

Ćwiczenie 4

Oblicz sumę wszystkich liczb trzycyfrowych podzielnych przez 3.

Ćwiczenie 5

Długości kolejnych boków pewnego wielokąta tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 5. Najdłuższy bok wielokąta ma długość 28, a obwód wielokąta jest równy 93. Ile boków ma ten wielokąt?

Ćwiczenie 6

Suma n początkowych wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa $S_n = \frac{3n^2 - 13n}{2}$ dla każdego $n \geq 1$. Wtedy

☐

Różnica tego ciągu jest równa 3

☐

Piąty wyraz tego ciągu jest równy 5

Ćwiczenie 7

Różnica pewnego ciągu arytmetycznego jest równa 2, natomiast sumy n oraz $n + 2$ jego początkowych wyrazów są równe $S_n = 176$ oraz $S_{n+2} = 240$. Oblicz n .

Ćwiczenie 8

Sumę pewnego ciągu arytmetycznego można zapisać wzorem: $2n^2 - 12n$.

Połącz w pary.

-10	a_5
6	a_3
2	a_1
-2	a_2
-6	a_4

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9

W ciągu arytmetycznym $a_1 = 5$ oraz $a_{30} = 9$. Wtedy suma $S_{30} = a_1 + a_2 + \dots + a_{30}$ jest równa

☐ 1890

☐ 210

☐ 225

☐ 270

Ćwiczenie 10

Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, które podzielone przez 5 dają resztę 2.

Ćwiczenie 11

Oblicz sumę wszystkich trzycyfrowych liczb naturalnych.

Ćwiczenie 12

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) , w którym $a_1 = 3$ oraz $r = 4$. Wyznacz największe n , dla którego $S_n < 80$.

Ćwiczenie 13

W pewnym ciągu arytmetycznym $a_9 = 11$ oraz $a_{14} = 1$ znajdź sumę początkowych dwudziestu jeden wyrazów tego ciągu.

Ćwiczenie 14

Oblicz sumę piętnastu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, którego wzór ogólny jest postaci $a_n = \frac{2n-1}{5}$.

Ćwiczenie 15

Suma piętnastu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa $S_{15} = 135$, a różnica tego ciągu jest równa $r = 3$. Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu od wyrazu szesnastego do wyrazu trzydziestego.

Ćwiczenie 16

Ile liczb trzeba wstawić między liczby -13 oraz 8 , aby otrzymać ciąg arytmetyczny, którego suma jest równa -25 ?

Ćwiczenie 17

Wyznacz pierwszy wyraz i różnicę ciągu arytmetycznego, w którym sumy ośmiu i trzynastu początkowych wyrazów są równe $S_8 = -2\frac{2}{3}$, $S_{13} = 6\frac{1}{2}$.

Ćwiczenie 18

Rozwiąż równanie $4^2 \cdot 4^4 \cdot 4^6 \cdot \dots \cdot 4^{2n} = 0,25^{-30}$

Ćwiczenie 19

Wykaż, że $n + 2n + 3n + \dots + n^2 = \frac{n^2(n+1)}{2}$.

Ćwiczenie 20

Wyznacz sumę dwudziestu pięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) , wiedząc, że $a_8 + a_{10} + a_{16} + a_{18} = 20$.

Ćwiczenie 21

Wiedząc, że siódmy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 0, oblicz sumę trzynastu pierwszych wyrazów tego ciągu.

Ćwiczenie 22

Wykaż, że $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + 96^2 - 95^2 + \dots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2 = 5050$.

Ciąg geometryczny

Ciąg geometryczny

Przykład 1

Spotykamy się czasem ze stwierdzeniem, że zeszyt, w którym piszemy, ma format A4 albo A5. Co to oznacza? Międzynarodowa norma definiuje 3 serie formatów A, B i C, przy czym formaty C związane są z określeniami formatów kopert.

Format A0 odpowiada prostokątowi o powierzchni 1 m^2 , przy czym jego wymiary są tak dobrane, żeby stosunek dłuższego boku do krótszego był równy $\sqrt{2}$. Mamy więc wymiary arkusza formatu A0: 1188 mm i $\frac{1188}{\sqrt{2}}$ mm. Format A1 jest połową formatu A0, czyli krótszy bok arkusza formatu A0 to dłuższy bok arkusza formatu A1 i stosunek dłuższego boku do krótszego jest równy $\sqrt{2}$. Zatem kartka formatu A1 ma wymiary: $\frac{1188}{\sqrt{2}}$ mm i $\frac{1188}{(\sqrt{2})^2}$ mm.

Otrzymujemy ciąg liczb, z których każda następna, oprócz pierwszej, jest $\sqrt{2}$ razy mniejsza od poprzedniej, czyli $\left(1188, \frac{1188}{\sqrt{2}}, \frac{1188}{(\sqrt{2})^2}, \frac{1188}{(\sqrt{2})^3}, \frac{1188}{(\sqrt{2})^4}, \dots\right)$. Jakie wymiary będzie miał arkusz formatu A5?

Wymiary arkusza formatu A5 będą szóstą i siódmą liczbą w tym ciągu. Obliczamy

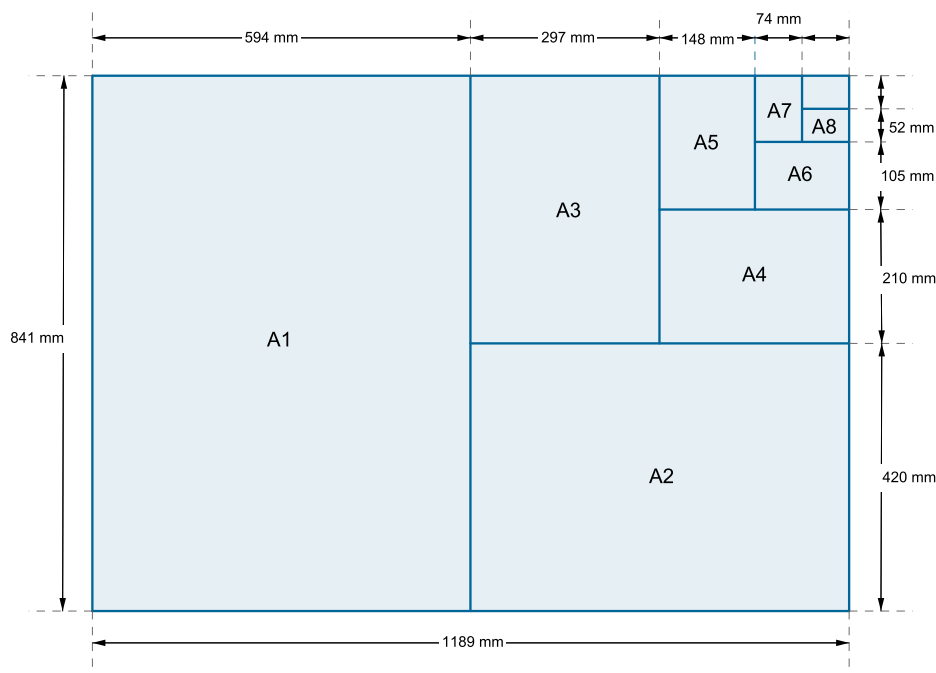
$$a_6 = \frac{a_5}{\sqrt{2}} = \frac{1188}{(\sqrt{2})^5} = \frac{297}{\sqrt{2}}$$

oraz

$$a_7 = \frac{a_6}{\sqrt{2}} = \frac{1188}{(\sqrt{2})^6} = \frac{1188}{8} = 148,5$$

Zatem kartka formatu A5 ma wymiary $\frac{297}{\sqrt{2}}$ mm i $\frac{1188}{(\sqrt{2})^6} = 148,5$ mm.

W praktyce wymiary arkuszy są zaokrąglane do pełnych milimetrów. Otrzymujemy w ten sposób ciąg $(1188, 840, 594, 420, 297, \dots)$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Oba przykłady opisują ciągi, w których każdy kolejny wyraz jest iloczynem wyrazu poprzedniego przez pewną ustaloną liczbę. Takie ciągi nazywamy ciągami geometrycznymi.

Definicja: Ciąg geometryczny

Ciąg (a_n) nazywamy **ciąg geometryczny**, jeżeli ma przynajmniej 3 wyrazy, jego pierwszy wyraz jest różny od 0, a każdy następny wyraz jest iloczynem poprzedniego wyrazu i pewnej ustalonej liczby. Liczbę tę nazywamy ilorazem ciągu geometrycznego i oznaczamy przez q .

- Jeśli ciąg jest skończony i ma $k \geq 3$ wyrazów, to $a_1 \neq 0$ i $a_{n+1} = a_n \cdot q$ dla dowolnej liczby całkowitej $1 \leq n \leq k - 1$. Jeśli natomiast ciąg jest nieskończony, to $a_1 \neq 0$ i $a_{n+1} = a_n \cdot q$ dla dowolnej liczby całkowitej $n \geq 1$.
Z definicji wynika, że
- jeśli $q \neq 0$, to, wobec warunku $a_1 \neq 0$, wszystkie wyrazy ciągu geometrycznego (a_n) są różne od zera
- jeśli $q = 0$, to wyrazy ciągu $a_2, a_3, a_4, \dots$ są równe 0, czyli jest to ciąg postaci $a_1, 0, 0, 0, \dots$
- Ciąg geometryczny w pewnym sensie jest podobny do ciągu arytmetycznego. W ciągu arytmetycznym kolejny wyraz jest sumą poprzedniego wyrazu i pewnej ustalonej liczby. W ciągu geometrycznym kolejny wyraz jest iloczynem poprzedniego wyrazu oraz pewnej ustalonej liczby. Dlatego techniki, którymi będziemy się posługiwać w rozwiązywaniu zadań dotyczących ciągów geometrycznych i ciągów arytmetycznych, będą podobne, lecz wykonywane obliczenia będą inne.
- Żeby sprawdzić, czy ciąg jest geometryczny, postępujemy podobnie jak w przypadku ciągu arytmetycznego. Tam badaliśmy, czy różnica pomiędzy kolejnymi wyrazami jest

stała. W przypadku ciągu geometrycznego, którego iloraz jest różny od zera, wystarczy zbadać, czy iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest stały dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$.

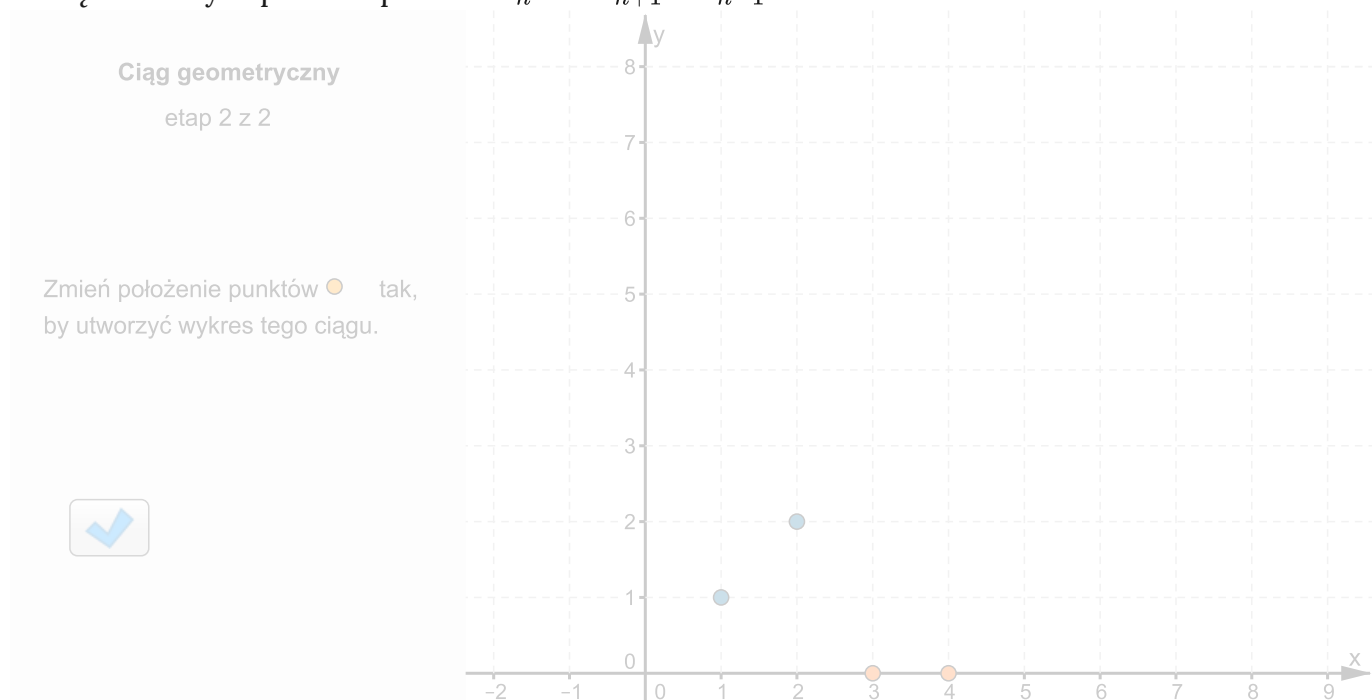
- Dowolne trzy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego, w którym $a_1 \neq 0$ i $a_n \neq 0$, spełniają równość $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, którą możemy zapisać w postaci

$$a_n^2 = a_{n+1} \cdot a_{n-1}$$

Dowolne trzy kolejne, różne od 0 wyrazy ciągu geometrycznego spełniają równość

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}},$$

którą możemy zapisać w postaci $a_n^2 = a_{n+1} \cdot a_{n-1}$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DCzQVB399>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Własność: Własność ciągu geometrycznego

Ciąg (a_n) o wyrazach różnych od 0 jest ciągiem geometrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby całkowitej $n > 1$ ($1 < n < k$, ciąg (a_n) jest k -wyrazowy) prawdziwa jest równość

$$a_n^2 = a_{n+1} \cdot a_{n-1}$$

Jeżeli wyrazy ciągu (a_n) są liczbami dodatnimi, to równość $a_n^2 = a_{n+1} \cdot a_{n-1}$ możemy zapisać w postaci $a_n = \sqrt{a_{n+1} \cdot a_{n-1}}$.

Oznacza to, że wyraz a_n jest średnią geometryczną wyrazów sąsiednich.

Zauważmy, że jeżeli w ciągu (a_n) jest $a_1 \neq 0$ oraz istnieją wyrazy równe 0 i wyrazy różne od 0, to z definicji wynika, że nie jest to ciąg geometryczny, mimo że może spełniać warunek $a_n^2 = a_{n+1} \cdot a_{n-1}$

Na przykład ciąg $(2, 0, 0, 3)$ spełnia warunki $a_2^2 = a_1 \cdot a_3$ oraz $a_3^2 = a_2 \cdot a_4$, lecz nie jest to ciąg geometryczny.

Przykład 2

Sprawdź, czy ciąg $(\sqrt{2} - 1, 1, \sqrt{2} + 1)$ jest ciągiem geometrycznym.

Ponieważ wszystkie wyrazy ciągu są różne od zera, więc możemy skorzystać z twierdzenia o własności ciągu geometrycznego. Wystarczy więc sprawdzić, czy $a_2^2 = a_1 \cdot a_3$.

Iloczyn

$$a_1 \cdot a_3 = (\sqrt{2} - 1) \cdot (\sqrt{2} + 1) = 2 - 1 = 1 = 1^2 = a_2^2,$$

więc wnioskujemy, że ten ciąg jest geometryczny.

Przykład 3

W ciągu geometrycznym kolejne wyrazy mają postać

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 q$$

$$a_3 = a_2 q = (a_1 q) \cdot q = a_1 q^2$$

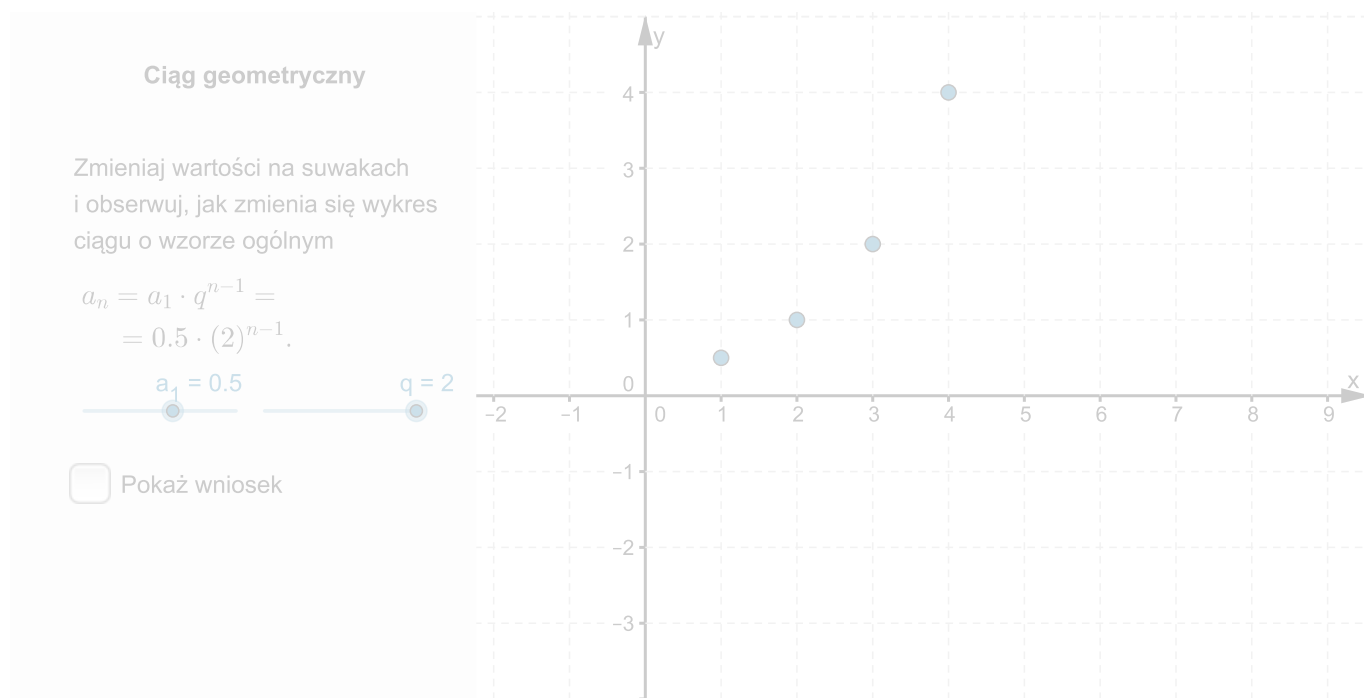
$$a_4 = a_3 q = (a_1 q^2) \cdot q = a_1 q^3$$

i tak dalej.

Zauważmy, że każdy kolejny wyraz ciągu jest iloczynem wyrazu pierwszego oraz pewnej liczby czynników q . Czynników q jest o 1 mniej, niż wynosi numer wyrazu, który chcemy obliczyć, a więc wyraz a_n jest iloczynem wyrazu a_1 oraz $n - 1$ czynników q . Zatem n -ty wyraz ciągu jest równy $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Twierdzenie: Wzór ogólny ciągu geometrycznego

Jeżeli a_1 jest pierwszym wyrazem ciągu geometrycznego (a_n) i q jest ilorazem tego ciągu, to dla dowolnej liczby całkowitej $n > 1$ mamy $a_n = a_1 q^{n-1}$.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DCzQVB399>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 4

Oblicz ósmy wyraz ciągu geometrycznego, w którym $a_1 = 81$ oraz $q = -\frac{1}{3}$.

Zastosujemy podany wcześniej wzór na n -ty wyraz ciągu geometrycznego. Ósmy wyraz ciągu jest więc równy

$$a_8 = a_1 q^7 = 81 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^7 = -3^4 \cdot 3^{-7} = -3^{-3} = -\frac{1}{27}$$

Przykład 5

Którym wyrazem ciągu geometrycznego (a_n) , w którym $a_1 = 3$ oraz $q = 5$, jest liczba 1875?

Ze wzoru na n -ty wyraz ciągu geometrycznego mamy $3 \cdot 5^{n-1} = 1875$. Stąd otrzymujemy $5^{n-1} = 625 = 5^4$. Zatem $n - 1 = 4$, czyli $n = 5$. Liczba 1875 jest więc piątym wyrazem ciągu (a_n) .

Przykład 6

Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) jest równy $a_1 = 1$, a trzeci wyraz tego ciągu jest o 2 większy od drugiego wyrazu tego ciągu. Oblicz iloraz q tego ciągu.

Drugi i trzeci wyraz ciągu są równe $a_2 = a_1 q$, $a_3 = a_1 q^2$. Ponieważ $a_1 = 1$, to $a_2 = 1 \cdot q = q$ oraz $a_3 = 1 \cdot q^2 = q^2$. Wyrazy te różnią się o 2, czyli $a_3 - a_2 = 2$, więc $q^2 - q = 2$. Otrzymaliśmy równanie kwadratowe z niewiadomą q . Ma ono dwa rozwiązania $q_1 = -1$ oraz $q_2 = 2$. Są więc dwa takie ciągi geometryczne o ilorazach $q_1 = -1$ oraz $q_2 = 2$.

Przykład 7

Pomiędzy liczby $\frac{64}{3}$ oraz 9 wstaw takie dwie liczby, żeby otrzymać czterowyrazowy ciąg geometryczny.

Liczba 9 jest czwartym, a liczba $\frac{64}{3}$ pierwszym wyrazem ciągu geometrycznego. Stąd $9 = \frac{64}{3}q^3$, gdzie q oznacza iloraz tego ciągu. Zatem $q = \frac{3}{4}$. Drugi wyraz tego ciągu jest więc równy $x = \frac{64}{3} \cdot q = \frac{64}{3} \cdot \frac{3}{4} = 16$, a trzeci $y = x \cdot q = 16 \cdot \frac{3}{4} = 12$.

Przykład 8

Oblicz pierwszy wyraz i iloraz ciągu geometrycznego (a_n) , w którym $a_6 + a_5 = 540$ oraz $a_6 - a_4 = 1296$.

Korzystając ze wzoru na n -ty wyraz ciągu geometrycznego, kolejne wyrazy ciągu geometrycznego zapisujemy $a_3 = a_1q^2$, $a_4 = a_1q^3$, $a_5 = a_1q^4$, $a_6 = a_1q^5$. Równania dane w zadaniu zapisujemy więc w postaci układu równań

$$\begin{cases} a_1q^5 + a_1q^4 = 1944 \\ a_1q^5 - a_1q^3 = 1296 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1q^4(q+1) = 1944 \\ a_1q^3(q^2-1) = 1296 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1q^4(q+1) = 1944 \\ a_1q^3(q-1)(q+1) = 1296 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wynika, że $a_1 \neq 0$, $q \neq 0$ oraz $q+1 \neq 0$. Gdyby tak nie było, równanie byłoby sprzeczne, gdyż po lewej stronie mielibyśmy 0, a po prawej 1944.

Dzielimy więc stronami drugie równanie przez pierwsze. Wtedy otrzymujemy

$$\frac{a_1q^3(q-1)(q+1)}{a_1q^4(q+1)} = \frac{1296}{1944}$$

czyli

$$\frac{q-1}{q} = \frac{2}{3}$$

Stąd $3q - 3 = 2q$. Zatem $q = 3$. Z równania $a_1q^4(q+1) = 1944$ i $q = 3$, otrzymujemy

$$a_1 = \frac{1944}{q^4(q+1)} = \frac{1944}{3^4(3+1)} = 6$$

Ciąg geometryczny może być malejący, rosnący, stały, niemalejący, nierosnący albo w ogóle może nie być monotoniczny. Zależy to od wartości ilorazu oraz znaku pierwszego wyrazu.

Na przykład ciąg geometryczny, w którym $a_1 = 4$ oraz $q = 2$, a więc ciąg $(4, 8, 16, 32, 64, \dots)$ jest rosnący, gdyż każdy kolejny wyraz ciągu jest dwa razy większy od poprzedniego i pierwszy wyraz jest dodatni.

Korzystając z poniższego apletu, zbadaj monotoniczność kilku ciągów geometrycznych.

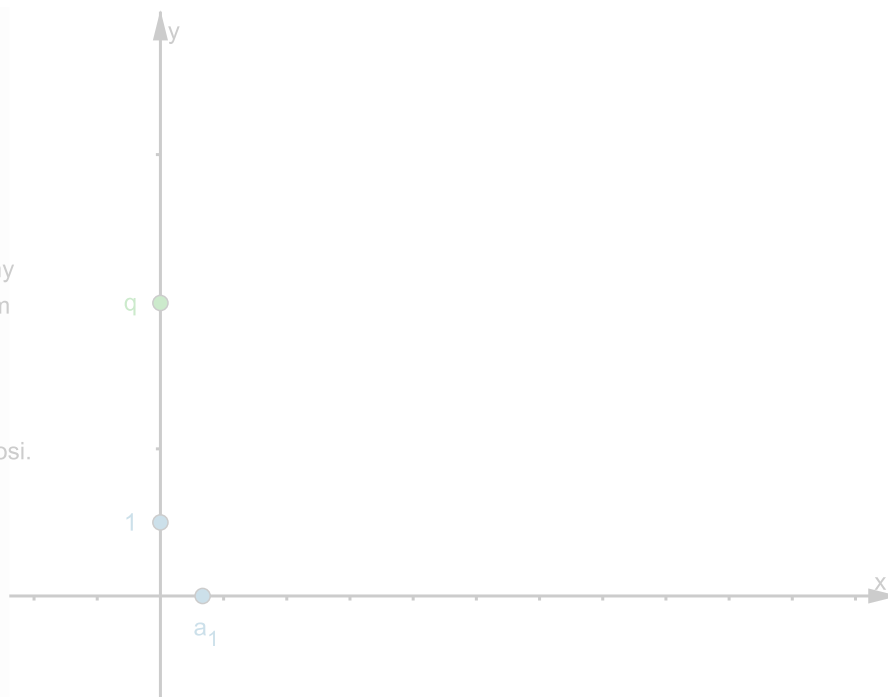
Konstrukcja ciągu geometrycznego

etap 1 z 8



Na osi OX układu współrzędnych wybrany jest punkt, którego odcięta jest pierwszym wyrazem a_1 pewnego ciągu geometrycznego.
Możesz zmieniać dowolnie wartość tego wyrazu, przesuwając go wzdłuż tej osi.

Na osi OY wybrany jest punkt, którego rzędna jest wartością ilorazu q tego ciągu.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DCzQVB399>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Ćwiczenie 1

Przeciągnij pasujące elementy z dolnej sekcji do górnej.

ciąg arytmetyczny

ciąg geometryczny

$$a_n = 6 + n$$

$$a_n = \frac{3n-5}{2}$$

$$a_n = 5^n$$

$$a_n = 2^{n-2}$$

$$a_n = \frac{7^n}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{2}3^n$$

$$a_n = \frac{1}{2}n - 3$$

$$a_n = 5n$$

$$a_n = -\frac{3}{4}n + 5$$

$$a_n = 5 + 2n$$

$$a_n = \frac{1}{2^{n+1}}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2

Połącz w pary wzór ogólny ciągu geometrycznego z odpowiednimi wartościami a_1 i q .

$$a_n = -16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad q = 8$$

$$a_n = \frac{1}{16} \cdot 8^n$$

$$a_1 = 8, \quad q = \frac{1}{2}$$

$$a_n = -16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$a_1 = -8, \quad q = \frac{1}{2}$$

$$a_n = 16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$a_1 = 8, \quad q = -\frac{1}{2}$$

$$a_n = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$a_1 = 2, \quad q = \frac{1}{8}$$

$$a_n = 16 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^n$$

$$a_1 = 4, \quad q = \frac{1}{4}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3

Sprawdź, czy podany ciąg jest geometryczny. Jeżeli jest, to znajdź jego iloraz.

1. $a_n = (0,3)^n$

2. $b_n = \frac{2^n}{7}$

3. $c_n = 3^{n+4}$

Ćwiczenie 4

Połącz w pary ciąg geometryczny z odpowiadającym mu ilorazem.

$\frac{1}{2}$

$(-2, 6, -18, \dots)$

-3

$(3, 6, 12, \dots)$

-2

$(12, 6, 3, \dots)$

$-\frac{1}{2}$

$(-12, 6, -3, \dots)$

3

$(3, -6, 12, \dots)$

2

$(2, 6, 18, \dots)$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5

Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) , w którym

1. $a_1 = 10$ oraz $a_6 = \frac{5}{16}$

2. $a_3 = \frac{1}{2}$ oraz $a_6 = \frac{125}{2}$

Ćwiczenie 6

Ustaw wyrazy w odpowiedniej kolejności, tak żeby utworzyły ciąg geometryczny, którego iloraz jest mniejszy od 1.

1. $\frac{125}{4}, \frac{25}{2}, 5, 2, \frac{4}{5}, \frac{8}{25}, \frac{16}{125}$

2. $128\sqrt{3}, \frac{32}{3}, \frac{8}{\sqrt{3}}, 2, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{8}$

Ćwiczenie 7

Dane są dwa wyrazy ciągu geometrycznego $a_6 = 20$, $a_8 = 80$. Wtedy

☐ $q = 2$ lub $q = -2$

☐ $a_7 = 50$

☐ $a_4 = 5$

Ćwiczenie 8

Liczby $x - 1$, $2x + 2$, $6x + 6$ są kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego. Wyznacz te liczby.

Ćwiczenie 9

Suma trzech wyrazów tworzących ciąg geometryczny jest równa -7 , a ich iloczyn jest równy 27 . Oblicz pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu.

Ćwiczenie 10

Udowodnij, że jeśli (a_n) jest ciągiem geometrycznym, to dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$ prawdziwa jest równość $a_n a_{n+3} = a_{n+1} a_{n+2}$.

Ćwiczenie 11

W ciągu geometrycznym pierwszy wyraz jest równy 3, a iloraz $\frac{1}{3}$. Dwudziesty wyraz tego ciągu można zapisać wzorem

☐ $a_{20} = \frac{1}{3} \cdot (3)^{20}$

☐ $a_{20} = \frac{1}{3} \cdot (3)^{19}$

☐ $a_{20} = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{19}$

☐ $a_{20} = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{20}$

Ćwiczenie 12

Piąty wyraz rosnącego ciągu geometrycznego jest równy $5\frac{1}{3}$, a siódmy $21\frac{1}{3}$. Iloraz tego ciągu jest równy

☐ -2

☐ -4

☐ 4

☐ 2

Ćwiczenie 13

Który z ciągów jest geometryczny?

☐ $\frac{1+\sqrt{3}}{6}, \frac{2+\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{6}$

☐ $\frac{3+\sqrt{3}}{6}, \frac{1+\sqrt{3}}{9}, \frac{3+\sqrt{3}}{18}$

☐ $\frac{3+\sqrt{3}}{6}, \frac{1+\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{18}$

☐ $\frac{3+\sqrt{3}}{3}, \frac{3+\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{18}$

Ćwiczenie 14

W ciągu geometrycznym mamy $a_2 = \frac{3}{4}$ oraz $a_5 = \frac{16}{9}$. Wtedy

☐ $a_1 \bullet a_3 = \frac{1}{3}$

☐ $a_1 \bullet a_3 = \frac{4}{3}$

☐ $a_1 \bullet a_3 = \frac{9}{16}$

☐ $a_1 \bullet a_3 = 1$

Ćwiczenie 15

W ciągu geometrycznym dane są $a_1 = 3$ oraz $a_4 = 192$. Oblicz iloraz tego ciągu.

Ćwiczenie 16

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) , w którym $a_3 = 1$ oraz $a_4 = \frac{3}{4}$. Wyznacz pierwszy wyraz tego ciągu.

Ćwiczenie 17

W ciągu geometrycznym (a_n) dane są wyrazy $a_4 = \frac{45}{16}$ oraz $a_6 = \frac{405}{4}$. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.

Ćwiczenie 18

Dany jest ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie $a_1 = -3$ oraz ilorazie $q = -2$. Którym wyrazem tego ciągu jest liczba 96?

Ćwiczenie 19

Stosunek sumy trzech pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego do sumy wyrazów pierwszego i trzeciego jest równy $\frac{3}{5}$. Oblicz iloraz tego ciągu.

Ćwiczenie 20

Jaką liczbę trzeba dodać do każdej z liczb: -2 , 2 , 22 , żeby otrzymane liczby były kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego?

Ćwiczenie 21

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 22

Wykaż, że jeżeli (a_n) jest ciągiem geometrycznym o wyrazach różnych od zera, to każdy z ciągów (b_n) i (c_n) określonych wzorami $b_n = \frac{2}{a_n}$ oraz $c_n = a_{3n}$ też jest geometryczny.

Ćwiczenie 23

Znajdź x , wiedząc, że

- ciąg $(2, x, 98)$ jest geometryczny. Oblicz iloraz tego ciągu.
- ciąg $(2 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}, x)$ jest geometryczny. Oblicz iloraz tego ciągu.

Ćwiczenie 24

Pomiędzy liczby 432 oraz 250 wstaw takie dwie liczby a i b , żeby ciąg $(432, a, b, 250)$ był geometryczny.

Ćwiczenie 25

Ciąg geometryczny składa się z ośmiu wyrazów. Suma pierwszych sześciu wyrazów jest równa 1, a suma sześciu ostatnich jest równa 16. Oblicz iloraz tego ciągu.

Ćwiczenie 26

Wyznacz pierwszy wyraz oraz iloraz ciągu geometrycznego (a_n) , w którym $a_4 + 17a_2 = 1$ oraz $a_2 + a_4 + a_6 = 1$.

Ćwiczenie 27

Wykaż, że suma kwadratów trzech kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego, które są liczbami całkowitymi różnymi od zera, jest podzielna przez sumę tych wyrazów.

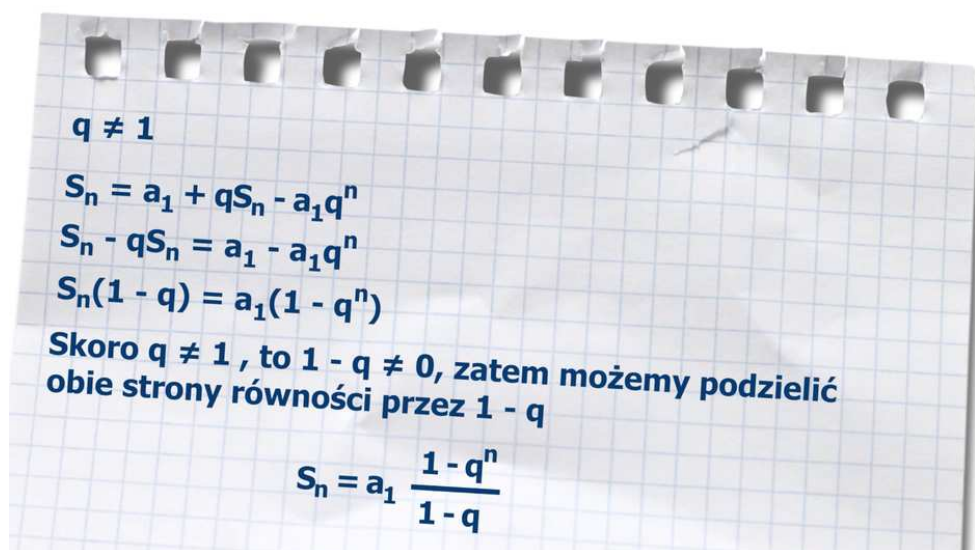
Ćwiczenie 28

Wykaż, że liczby 5, 6 i 7 nie mogą być wyrazami tego samego ciągu geometrycznego.

Suma wyrazów ciągu geometrycznego

Twierdzenie: Twierdzenie o sumie n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Jeżeli (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q , to suma S_n jego n początkowych wyrazów jest równa $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ dla $q \neq 1$ albo $S_n = na_1$ dla $q = 1$.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Przykład 1

Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) , w którym $a_1 = \frac{1}{2}$ oraz $q = 2$.
Iloraz ciągu geometrycznego (a_n) jest różny od 1, więc suma S_{10} jego dziesięciu początkowych wyrazów jest równa

$$S_{10} = a_1 \frac{1-q^{10}}{1-q} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-2^{10}}{1-2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-2^{10}}{-1} = \frac{1}{2} \cdot (2^{10} - 1) = \frac{1024-1}{2} = \frac{1023}{2} = 511 \frac{1}{2}$$

Przykład 2

Oblicz sumę wyrazów od ósmego do dwunastego ciągu geometrycznego (a_n) , w którym $a_1 = 3$ oraz $q = -2$.
Suma, którą należy obliczyć, to $a_8 + a_9 + \dots + a_{12}$. Zrobimy to dwoma sposobami.

- sposób I

Zauważmy, że wystarczy obliczyć sumy S_{12} oraz S_7 , odpowiednio dwunastu i siedmiu początkowych wyrazów tego ciągu, a następnie od pierwszej z obliczonych sum odjąć drugą.

$$S_{12} = a_1 \frac{1-q^{12}}{1-q} = 3 \cdot \frac{1-(-2)^{12}}{1-(-2)} = 3 \cdot \frac{1-2^{12}}{3} = 1 - 2^{12} = 1 - 4096 = -4095$$

$$S_7 = a_1 \frac{1-q^7}{1-q} = 3 \cdot \frac{1-(-2)^7}{1-(-2)} = 3 \cdot \frac{1+2^7}{3} = 1 + 2^7 = 1 + 128 = 129$$

Zatem

$$a_8 + a_9 + \dots + a_{12} = S_{12} - S_7 = -4095 - 129 = -4224$$

- sposób II

Zauważmy, że ciąg, którego kolejnymi wyrazami są $a_8, a_9, \dots, a_{12}$, to pięciowyrazowy ciąg geometryczny, którego pierwszym wyrazem jest ósmy wyraz ciągu (a_n) , i którego iloraz jest taki sam, jak iloraz ciągu (a_n) czyli $q = -2$. Zatem

$$a_8 + a_9 + \dots + a_{12} = a_8 \cdot \frac{1-q^5}{1-q} = a_1 q^7 \cdot \frac{1-q^5}{1-q} = 3 \cdot (-2)^7 \cdot \frac{1-(-2)^5}{1-(-2)} = -3 \cdot 128 \cdot \frac{1+2^5}{3} = -128 \cdot 33 = -4224$$

Przykład 3

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) , w którym $a_1 = 27$ oraz $a_4 = 1$. Ile początkowych wyrazów tego ciągu trzeba dodać, żeby otrzymać $40\frac{1}{3}$?

Na początek obliczmy iloraz tego ciągu. Ponieważ $a_4 = a_1 q^3$, więc $q^3 = \frac{a_4}{a_1} = \frac{1}{27}$. Stąd $q = \frac{1}{3}$. Pozostaje obliczyć n , dla którego $S_n = 40\frac{1}{3}$. Ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego otrzymujemy

$$27 \cdot \frac{1 - (\frac{1}{3})^n}{1 - \frac{1}{3}} = 40\frac{1}{3}$$

Równanie to przekształcamy równoważnie

$$27 \cdot \frac{1 - (\frac{1}{3})^n}{\frac{2}{3}} = \frac{121}{3}$$

$$1 - (\frac{1}{3})^n = \frac{121}{3 \cdot 27} \cdot \frac{2}{3}$$

$$(\frac{1}{3})^n = 1 - \frac{242}{243}$$

$$(\frac{1}{3})^n = \frac{1}{243}$$

$$(\frac{1}{3})^n = (\frac{1}{3})^5$$

Stąd $n = 5$. Zatem należy dodać pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n) .

Przykład 4

Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest określona wzorem $S_n = 3^{n+1} - 3$ dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$.

1. Oblicz czwarty wyraz ciągu (a_n) .
2. Udowodnij, że ciąg (a_n) jest geometryczny oraz oblicz iloraz tego ciągu.

Rozwiązanie

1. Zauważmy, że czwarty wyraz ciągu jest równy $S_4 - S_3$, czyli
$$a_4 = (3^5 - 3) - (3^4 - 3) = 3^5 - 3^4 = 3^4(3 - 1) = 81 \cdot 2 = 162$$
2. Wyznamy wzór na n -ty wyraz ciągu (a_n) . Postępujemy podobnie jak w punkcie a). Dla każdej liczby całkowitej $n > 1$ otrzymujemy

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (3^{n+1} - 3) - (3^n - 3) = 3^{n+1} - 3^n = 3^n(3 - 1) = 2 \cdot 3^n = 6 \cdot 3^{n-1}$$

To oznacza, że (a_n) jest ciągiem geometrycznym, w którym pierwszy wyraz jest równy $a_1 = 6$ a iloraz $q = 3$.

Przykład 5

Stosunek sumy ośmiu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego do sumy jego czterech początkowych wyrazów jest równy 82. Oblicz iloraz tego ciągu.

Trzeba zauważyć najpierw, że $q \neq 0$. Gdyby $q = 0$ to $S_8 = 8a_1$, $S_4 = 4a_1$, więc $\frac{S_8}{S_4} = \frac{8a_1}{4a_1} = 2 \neq 82$. Wobec tego ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego wyznaczamy sumę ośmiu i sumę czterech jego początkowych wyrazów

$$S_8 = a_1 \frac{1-q^8}{1-q}, S_4 = a_1 \frac{1-q^4}{1-q}$$

Ich stosunek jest równy 82, zatem

$$82 = \frac{a_1 \frac{1-q^8}{1-q}}{a_1 \frac{1-q^4}{1-q}} = \frac{1-q^8}{1-q^4} = \frac{(1-q^4)(1+q^4)}{1-q^4} = 1 + q^4$$

Stąd $q^4 = 81$, czyli $q = 3$ lub $q = -3$.

Ćwiczenie 1

Oblicz sumę ośmiu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) określonego wzorem $a_n = 512 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

Ćwiczenie 2

Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) , w którym $a_3 = -4$ oraz $a_6 = 32$.

Ćwiczenie 3

Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów o numerach parzystych ciągu geometrycznego (a_n) , w którym $a_1 = 3$ oraz $q = \frac{1}{2}$.

Ćwiczenie 4

Łamana o długości 1270 mm składa się z odcinków, z których pierwszy odcinek ma długość 640 mm, a każdy następny jest dwa razy krótszy od poprzedniego. Oblicz, z ilu odcinków składa się ta łamana.

Ćwiczenie 5

Oblicz sumę 7 wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) , w którym $a_1 = \frac{81}{8}$ oraz $q = \frac{2}{3}$.

Ćwiczenie 6

Oblicz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie $q = \sqrt{2}$, jeżeli suma $S_8 = 30 + 30\sqrt{2}$.

Ćwiczenie 7

Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) jest równy -8 , iloraz tego ciągu jest równy $\frac{1}{2}$ oraz suma pierwszych n wyrazów jest równa $-15\frac{3}{4}$. Wyznacz n -ty wyraz tego ciągu geometrycznego.

Ćwiczenie 8

Ile wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) , który jest dany wzorem ogólnym $a_n = (-2)^{n+1}$, trzeba zsumować, żeby otrzymać -340 ?

Ćwiczenie 9

W pewnym sześciowyrazowym ciągu geometrycznym suma wyrazów stojących na pozycjach nieparzystych jest równa 63, a suma wyrazów stojących na pozycjach parzystych jest równa 126. Wyznacz szósty wyraz tego ciągu.

Ćwiczenie 10

Oblicz sumę wyrazów od szóstego do dziesiątego ciągu geometrycznego (a_n) , w którym $a_1 = 5$ oraz $q = 2$.

Ćwiczenie 11

Wyznacz piąty wyraz ciągu geometrycznego, w którym $S_2 = 21$ oraz $S_3 = 129$.

Ćwiczenie 12

Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o numerach nieparzystych, w którym $a_1 = 7$ oraz $q = -\frac{1}{2}$.

Ćwiczenie 13

W pewnym ciągu suma n początkowych wyrazów wyraża się wzorem $S_n = 4^{n+1} - 4$. Wykaż, że jest to ciąg geometryczny.

Ćwiczenie 14

Stosunek sumy dziesięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego do sumy pierwszych pięciu wyrazów ciągu geometrycznego jest równy 33. Oblicz iloraz tego ciągu.

Ćwiczenie 15

Wykaż, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi równość $(5 - 3) + (5^2 - 3^2) + (5^3 - 3^3) + \dots + (5^n - 3^n) = \frac{5^{n+1} - 2 \cdot 3^{n+1} + 1}{4}$.

Ćwiczenie 16

Uzasadnij, że suma wszystkich potęg liczby 3 o wykładnikach naturalnych mniejszych od 10 jest równa $\frac{3^{10} - 1}{2}$.

Ćwiczenie 17

Wiedząc, że w pewnym ciągu geometrycznym pierwszy wyraz jest równy a_1 , ostatni wyraz jest równy a_n oraz suma wszystkich n wyrazów jest równa S_n , wyznacz sumę odwrotności wyrazów tego ciągu.

Ćwiczenie 18

Wykaż, że różnica liczb $\underbrace{11 \dots 1}_{2n} - \underbrace{22 \dots 2}_n$, gdzie w zapisie odjemnej występuje $2n$ jedynek, a w zapisie odjemnika n dwójek, jest kwadratem liczby naturalnej.

Ćwiczenie 19

Oblicz sumę $2 + 22 + 222 + \dots + \underbrace{2 \dots 22}_n$, gdzie w zapisie ostatniego składnika występuje n dwójek.

Procent składany

Lokatę bankową możemy traktować jako umowę zawartą między klientem a bankiem, na mocy której klient powierza bankowi określoną kwotę na ustalony termin. W zamian za to, po upływie tego terminu, bank wypłaca klientowi wpłaconą kwotę powiększoną o odsetki, które zostały naliczone zgodnie z warunkami zapisanymi w umowie. Istotny wpływ na wysokość ostatecznie wypłaconej kwoty ma, oczywiście, oprocentowanie lokaty, ale ważne jest również to, co dzieje się z naliczonymi po kapitalizacji odsetkami:

- mogą one zostać przebrane na inny rachunek tego samego klienta – wtedy kwota lokaty się nie zmienia i odsetki naliczone przy kolejnej kapitalizacji będą takie same – taki sposób obliczania odsetek nazywa się **procentem prostym**;
- mogą zostać dopisane do lokaty – wtedy kwota lokaty zwiększa się o odsetki, które biorą udział w wypracowaniu zysku w kolejnym okresie – ten sposób nazywamy **procentem składanym**.

W zadaniach w tym rozdziale, mówiąc o lokacie bankowej, przyjmujemy, że każdorazowo po kapitalizacji odsetki dopisywane są do lokaty i lokata nie została zerwana przed upływem ustalonego terminu.

[Film dostępny na portalu epodreczniki.pl](#)

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia dwóch chłopców, z których każdy wpłacił 4000 zł do banku na roczną lokatę. Jeden wpłacił do banku, gdzie lokata ma oprocentowanie 4% a drugi wybrał bank, gdzie oprocentowanie miesięczne jest 4%. Po roku pierwszy chłopiec otrzymuje 4160 zł a drugi 4163 złotych. Jak to się stało? Bank pierwszy – kapitalizuje odsetki na koniec lokaty, czyli mamy $4000 \times 1,04 = 4160$ zł. Bank drugi – kapitalizuje odsetki co miesiąc, czyli mamy: cztery dwunaste %, czyli co miesiąc $4000 \times 1,00333333$, potem $4013,33 \times 1,00333333$ itd. Zmiany będą jeszcze większe, gdy czas lokaty będzie dłuższy oraz kwota większa. Zatem wartość zarobionych pieniędzy zależy nie tylko od wysokości oprocentowania ale też od częstotliwości kapitalizacji odsetek.

Przykład 1

Pani Joanna wpłaciła 1000 zł do banku na pięcioletnią lokatę „Premium”. Warunki lokaty zakładają roczne oprocentowanie w wysokości 5% i roczną kapitalizację odsetek. Jaki kapitał zostanie zgromadzony na lokacie po 5 latach od jej założenia?

Prześledzimy krok po kroku zmiany tej lokaty.

Kapitał początkowy K_p jest równy $K_p = 1000$ zł.

Lokata będzie utrzymywana przez 5 lat i kapitalizacja będzie następowała co rok. Mamy zatem 5 okresów kapitalizacji ($n = 5$).

Oprocentowanie w okresie kapitalizacji jest równe 5%.

Obliczmy kapitał zgromadzony po kolejnych latach

- po pierwszym roku

$$K_1 = 1000 \text{ zł} + 5\% \cdot 1000 \text{ zł} = 1000 \text{ zł} \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right) = 1000 \text{ zł} \cdot 1,05 = 1050 \text{ zł}.$$

Kwota lokaty zwiększyła się o 5% z 1000 zł, czyli o 50 zł.

- po drugim roku

Podstawę do naliczenia odsetek stanowi teraz kwota 1050 zł, czyli otrzymamy

$$\begin{aligned} K_2 &= 1050 \text{ zł} + 5\% \cdot 1050 \text{ zł} = 1050 \text{ zł} \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right) = 1050 \text{ zł} \cdot 1,05 = 1000 \text{ zł} \cdot 1,05 \cdot 1,05 = \\ &= 1000 \text{ zł} \cdot (1,05)^2 = 1102,50 \text{ zł}. \end{aligned}$$

Kwota lokaty zwiększyła się o 5% z 1050 zł, czyli o 52,50 zł.

- po trzecim roku

Podstawę do naliczenia odsetek stanowi teraz kwota powiększona o kolejne odsetki, czyli 1102,50 zł. Po następnej kapitalizacji otrzymamy

$$K_3 = 1102,50 \text{ zł} + 5\% \cdot 1102,50 \text{ zł} = 1102,50 \text{ zł} \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right) = 1102,50 \text{ zł} \cdot 1,05 = 1000 \text{ zł} \cdot (1,05)^2 \cdot 1,05 = 1000 \text{ zł} \cdot (1,05)^3 = 115$$

Kwota lokaty zwiększyła się o 5% z 1102,50 zł, czyli o 55,13 zł.

Zauważmy, że w każdym roku doliczamy inną kwotę odsetek. Wynika to z tego, że za każdym razem inną jest podstawa ich naliczania.

Kwoty lokaty po kolejnych latach są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego o ilorazie $q = 1,05$ i wyrazach:

$$a_1 = K_p = 1000 \text{ zł}$$

$$a_2 = K_1 = 1000 \text{ zł} \cdot 1,05$$

$$a_3 = K_2 = 1000 \text{ zł} \cdot (1,05)^2$$

$$a_4 = K_3 = 1000 \text{ zł} \cdot (1,05)^3$$

Wykorzystując wzór na n -ty wyraz ciągu geometrycznego, otrzymujemy:

- po czwartym roku

$$a_5 = K_4 = 1000 \text{ zł} \cdot (1,05)^4 = 1215,50625 \text{ zł} \approx 1215,51 \text{ zł}.$$

- po piątym roku

$$a_6 = K_5 = 1000 \text{ zł} \cdot (1,05)^5 \approx 1276,28 \text{ zł}$$

Z tego wynika, że po 5 latach pani Joanna powinna otrzymać 1276,28 zł.

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

E-podręczniki z matematyki

Ważne!

- W polskim systemie monetarnym najmniejszą jednostką jest 1 gr, dlatego wszystkie kwoty zaokrąglamy z dokładnością do 1 gr.
- Od 2002 roku w Polsce obowiązuje podatek od dochodów kapitałowych. Oznacza to, że przy każdej kapitalizacji dopisywane odsetki zostaną pomniejszone o 19% ich wartości.

W zadaniach w tym rozdziale kwotę podatku od dochodów kapitałowych będziemy pomijać.

Kwotę lokaty po n okresach kapitalizacji można obliczyć, korzystając ze wzoru:

$$K_n = K_p \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

gdzie:

- K_p – oznacza kapitał początkowy,
- K_n – oznacza kapitał zgromadzony na lokacie po n okresach kapitalizacji,
- n – oznacza liczbę kapitalizacji,
- $p\%$ – oznacza oprocentowanie lokaty w okresie, po którym następuje kapitalizacja.

Przykład 2

Pan Jerzy wpłacił 10 000 zł na lokatę z rocznym oprocentowaniem w wysokości 6% oraz z miesięczną kapitalizacją odsetek. Jaką kwotę zgromadzi on na tej lokacie po roku od jej założenia?

W tym przykładzie mamy

$$K_p = 10\,000 \text{ zł}$$

Lokata będzie utrzymywana przez 1 rok, natomiast odsetki będą dopisywane co miesiąc. Mamy zatem 12 okresów kapitalizacji ($n = 12$).

Oprocentowanie roczne jest równe 6%, zatem w pojedynczym okresie kapitalizacji wyniesie

$$p\% = \frac{6\%}{12} = 0,5\%$$

Obliczmy kapitał zgromadzony po 12 miesiącach

$$K_{12} = K_p \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{12} = 10\,000 \left(1 + \frac{0,5}{100}\right)^{12} = 10\,000 (1,005)^{12} \approx 10\,616,78 \text{ zł}$$

Przedstawiony powyżej sposób obliczania kapitału końcowego zakłada, że obliczamy od razu wartość końcową po n okresach kapitalizacji. Pomijamy tym samym wszystkie kwoty pośrednie – po pierwszym, drugim i kolejnych kapitalizacjach.

W rzeczywistości jest inaczej – każdorazowo kwota po dopisaniu odsetek jest zaokrąglana do 1 gr i otrzymane przybliżenie jest podstawą do obliczenia odsetek w następnym okresie. Przy wielokrotnej kapitalizacji ostateczne kwoty kapitału końcowego mogą się

nieznacznie różnić.

Musimy zatem pamiętać, że wzór na procent składany jest tylko matematycznym przybliżeniem rzeczywistości bankowej.

Ćwiczenie 1

Pan Marek zdeponował w banku kwotę 2500 zł na lokacie dwuletniej, oprocentowanej w wysokości 3% rocznie z kapitalizacją kwartalną. Jaki kapitał zgromadzi pan Marek po 2 latach oszczędzania?

Ćwiczenie 2

Uzupełnij tabelę, obliczając potrzebne wartości.

Tabela. Dane

liczba lat	liczba okresów kapitalizacji	sposób kapitalizacji lokaty	oprocentowanie w skali roku	oprocentowanie w okresie kapitalizacji
	4	rocznie	8%	
3		kwartalnie		3%
			6%	0,5%
	10	półrocznie	3%	
6				
2	12			1%

Ćwiczenie 3

Pani Zofia chce ulokować w banku 10 000 zł na rocznej lokacie oprocentowanej w wysokości 6%. Oblicz, jaka kwota zostanie zgromadzona na tej lokacie, jeśli kapitalizacja będzie

1. roczna
2. półroczna
3. kwartalna
4. miesięczna

Ćwiczenie 4

Lokata Wiosenna jest oprocentowana 4,5% rocznie i kapitalizowana co miesiąc. Paweł wpłacił na lokatę 1350 zł. Po ilu miesiącach oszczędzania wartość lokaty przekroczy 1400 zł?

Przykład 3

Na realizację marzeń o wycieczce do Afryki Justyna potrzebuje co najmniej 9 500 zł. Postanowiła systematycznie, co miesiąc, odkładać 500 zł. Bank zaproponował lokatę z możliwością dopłacania pieniędzy, oprocentowaną 6% rocznie z miesięczną kapitalizacją odsetek. Czy po 18 miesiącach oszczędzania Justyna zgromadzi odpowiednią kwotę?

Przeanalizujmy krok po kroku zmiany na tej lokacie.

Oprocentowanie w okresie kapitalizacji

$$p\% = \frac{6\%}{12} = 0,5\%, n = 18$$

- Stan lokaty po pierwszym miesiącu

$$K_1 = 500 \text{ zł} + \frac{0,5}{100} \cdot 500 \text{ zł} = 500 \text{ zł} \cdot (1,005) = 502,5 \text{ zł}$$

- Stan lokaty po drugim miesiącu

$$K_2 = [500 \text{ zł} \cdot (1,005) + 500 \text{ zł}] \cdot 1,005 = 500 \text{ zł} \cdot (1,005)^2 + 500 \text{ zł} \cdot (1,005) = 1007,51 \text{ zł}$$

- Stan lokaty po trzecim miesiącu

$$K_3 = (K_2 + 500 \text{ zł}) \cdot 1,005 = 500 \text{ zł} \cdot (1,005)^3 + 500 \text{ zł} \cdot (1,005)^2 + 500 \text{ zł} \cdot (1,005) = 1515,05 \text{ zł}$$

- Stan lokaty po czwartym miesiącu

$$K_4 = (K_3 + 500 \text{ zł}) \cdot 1,005 = 500 \text{ zł} \cdot (1,005)^4 + 500 \text{ zł} \cdot (1,005)^3 + 500 \text{ zł} \cdot (1,005)^2 + 500 \text{ zł} \cdot (1,005) = 2025,13 \text{ zł}$$

Zauważmy, że 500 zł ulokowane w pierwszym miesiącu procentuje najdłużej, kolejne – 1 miesiąc krócej i tak dalej, aż do ostatniej wpłaconej kwoty, która procentuje tylko miesiąc.

Stan lokaty po 18 miesiącach oszczędzania możemy zapisać

$$500 \text{ zł} \cdot (1,005)^{18} + 500 \text{ zł} \cdot (1,005)^{17} + 500 \text{ zł} \cdot (1,005)^{16} + 500 \text{ zł} \cdot (1,005)^{15} + \dots + 500 \text{ zł} \cdot (1,005)$$

Jest to suma osiemnastu kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego, w którym $a_1 = 500 \text{ zł} \cdot 1,005$, $q = 1,005$.

Wartość lokaty po 18 miesiącach będzie sumą osiemnastu wyrazów ciągu geometrycznego

$$S_{18} = \frac{a_1(1-q^{18})}{1-q} = \frac{500 \cdot 1,005 \cdot (1-(1,005)^{18})}{1-1,005} \approx 9439,858427 \text{ zł} \approx 9439,86 \text{ zł}.$$

Zatem Justyna jest bliska zgromadzenia potrzebnej kwoty 9 500 zł, ale brakuje jej jeszcze około 60 zł.

Ćwiczenie 5

Henryk chce podarować wnukowi prezent na 18 urodziny. W dniu narodzin wnuka wpłacił do banku 250 zł na lokatę oprocentowaną 3,5% w skali roku z roczną kapitalizacją odsetek. Postanowił, że na każde kolejne urodziny będzie dopłacał do tej lokaty kolejne 250 zł. Jaką kwotę Henryk zgromadzi na tej lokacie do 18 urodzin wnuka?

Ważne!

Musimy pamiętać, że przedstawiane zadania i przykłady zastosowania procentu składanego nie zawsze są wiernym odwzorowaniem rzeczywistości bankowej. Oferta lokat bankowych jest bardzo bogata i zróżnicowana. Systemy obliczeniowe stosowane w bankach pozwalają na zmianę oprocentowania w różnych okresach trwania lokaty, częstą kapitalizację lub nawet możliwość wypłaty części środków z lokaty przed upływem zadeklarowanego okresu. Ponadto od 2002 roku obowiązuje, wspomniany wcześniej, podatek od dochodów kapitałowych, który każdorazowo zmniejsza kwotę należnych odsetek o 19% ich wartości.

Ćwiczenie 6

Oblicz kapitał końcowy uzyskany po 5 latach, jeśli

1. wpłacono do banku 1570 zł na lokatę oprocentowaną 8% rocznie i kapitalizowaną co pół roku;
2. wpłacono 1500 zł na lokatę oprocentowaną 7% rocznie i kapitalizowaną co miesiąc.

Ćwiczenie 7

Wykonaj niezbędne obliczenia i uzupełnij tabelę.

Tabela. Dane

kapitał początkowy (z dokładnością do 1 zł)	oprocentowanie roczne	okres kapitalizacji	czas trwania lokaty	kapitał końcowy (z dokładnością do 1 gr)
2500 zł	4%	półroczna	3 lata	
4500 zł	6%	kwartalna		5069,22 zł
	3,5%	roczna	6 lat	1819,30 zł
3600 zł	4%	kwartalna	3,5 roku	
7500 zł	6%	miesięczna	1 rok	

Ćwiczenie 8

Filatelista kupił znaczek pocztowy za 150 zł. Jaka będzie jego wartość po 15 latach, jeśli przyjąć, że w każdym roku wzrasta ona o 8% w stosunku do wartości sprzed roku?

Ćwiczenie 9

Maciek kupił komputer za 3500 zł. Jaka będzie jego wartość po 6 latach, jeśli przyjąć, że w każdym roku traci on 10% wartości sprzed roku?

Ćwiczenie 10

Iza chce zdać egzamin na prawo jazdy. Koszt kursu, jazd dodatkowych i egzaminów zewnętrznych to 1800 zł. Iza może odkładać w banku co miesiąc 155 zł na lokacie z oprocentowaniem 4,5% rocznie i kapitalizacją miesięczną. O ile kwota lokaty będzie większa od ceny kursu, jeśli Iza będzie oszczędzać na tej lokacie przez 12 miesięcy?

Ćwiczenie 11

Rodzice małej Zuzi oszczędzają na jej studia. Co roku wpłacają 1300 zł na lokatę z kapitalizacją roczną, oprocentowaną 6% w skali roku. Po ilu latach kwota tych oszczędności przekroczy kwotę 30 000 zł?

Ćwiczenie 12

Kuba chce wpłacić do banku 3600 zł na roczną lokatę. Dwa banki mają w swojej ofercie lokatę oprocentowaną w wysokości 8% rocznie. Bank X kapitalizuje ją co pół roku, natomiast bank Y – co kwartał. O ile więcej zyska Kuba dzięki korzystniejszej kapitalizacji?

Ćwiczenie 13

Bank proponuje trzy rodzaje lokat.

1. Lokata 3– miesięczna

Tabela. Dane

czas trwania lokaty	3 miesiące
minimalna kwota	500 zł
oprocentowanie roczne	4 %
rodzaj kapitalizacji	po zakończeniu trwania lokaty, odsetki dopisane do lokaty
inne warunki	lokata może być odnawiana na następne okresy

2. Lokata 6– miesięczna

Tabela. Dane

czas trwania lokaty	6 miesięcy
minimalna kwota	1000 zł
oprocentowanie roczne	4,5 %
rodzaj kapitalizacji	po zakończeniu trwania lokaty, odsetki dopisane do lokaty
inne warunki	lokata może być odnawiana na następne okresy

3. Lokata 9– miesięczna

Tabela. Dane

czas trwania lokaty	9 miesięcy
---------------------	------------

minimalna kwota	2000 zł
oprocentowanie roczne	5 %
rodzaj kapitalizacji	kwartalnie, odsetki dopisane do lokaty
inne warunki	lokata może być odnawiana na następne okresy

Która z nich jest najbardziej korzystna, jeśli chcemy ulokować 1750 zł na okres 2 lat?

Ćwiczenie 14

Wyobraź sobie, że codziennie odkładasz 1 zł na lokatę oprocentowaną 0,0001 % dziennie i kapitalizowaną codziennie. Jaka kwotę zbierzesz po roku, a jaką po dwóch latach takiego oszczędzania?

Do obliczeń możesz wykorzystać kalkulator lub komputer.

Ciąg arytmetyczny i geometryczny zastosowanie

Ciąg arytmetyczny i geometryczny – zastosowanie

Przykład 1

W nieskończonym ciągu arytmetycznym (a_n) dane są wyrazy $a_5 = -7$ i $a_9 = 13$. Ile wyrazów tego ciągu to dodatnie liczby całkowite dwucyfrowe?

Liczby całkowite dwucyfrowe są mniejsze od 100 i większe od 9. Z tego wynika, że musimy rozwiązać nierówność $a_n < 100$ i $a_n > 9$.

Wyznamy wzór ogólny tego ciągu.

Rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} -7 = a_1 + 4r \\ 13 = a_1 + 8r \end{cases}$$

otrzymanego po wstawieniu piątego i dziewiątego wyrazu do wzoru na n -ty wyraz ciągu są $a_1 = -27$ i $r = 5$. Z tego wynika, że wzór ogólny tego ciągu ma postać

$$a_n = 5n - 32$$

Mamy zatem nierówność

$$9 < 5n - 32 < 100$$

czyli $8\frac{1}{5} < n < 26\frac{2}{5}$. Oznacza, że warunki zadania spełnia 18 wyrazów ciągu. Są to wyrazy $a_9, a_{10}, \dots, a_{26}$.

Przykład 2

Ciąg $(4, x, \frac{9}{16})$ jest malejącym ciągiem geometrycznym, natomiast ciąg $(-5, x + \frac{7}{2}, y)$ jest arytmetyczny. Wyznacz wyrazy obu ciągów.

Z własności ciągu geometrycznego $(4, x, \frac{9}{16})$ wynika równanie $x^2 = 4 \cdot \frac{9}{16}$, czyli $x^2 = \frac{9}{4}$.

Zatem $x = \frac{3}{2}$ lub $x = -\frac{3}{2}$. Rozwiązanie ujemne odrzucamy, ponieważ ciąg geometryczny jest malejący.

Po podstawieniu otrzymanej wartości x otrzymamy ciąg arytmetyczny $(-5, \frac{3}{2} + \frac{7}{2}, y)$, czyli $(-5, 5, y)$. Różnica w tym ciągu jest równa $r = 10$. Z tego wynika, że $y = 15$.

Zatem liczby $(4, \frac{3}{2}, \frac{9}{16})$ tworzą ciąg geometryczny, a liczby $(-5, 5, 15)$ tworzą ciąg arytmetyczny.

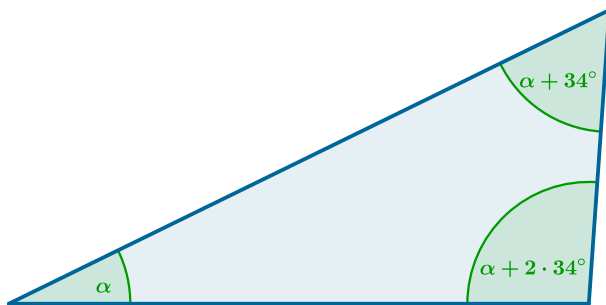
Ćwiczenie 1

Ciąg $(x, 9, x + 4)$ jest rosnącym ciągiem arytmetycznym, a ciąg $(x + 1, 12, y - 7)$ jest ciągiem geometrycznym. Oblicz x i y .

Przykład 3

Miary kątów trójkąta tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 34° . Oblicz miarę największego kąta w tym trójkącie.

Wprowadźmy oznaczenia wykorzystujące fakt, że miary kątów trójkąta tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 34° .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Suma miar kątów trójkąta jest równa $\alpha + \alpha + 34^\circ + \alpha + 2 \cdot 34^\circ = 180^\circ$. Z tego wynika, że $\alpha = 26^\circ$.

Największy kąt w tym trójkącie ma miarę $26^\circ + 68^\circ = 94^\circ$.

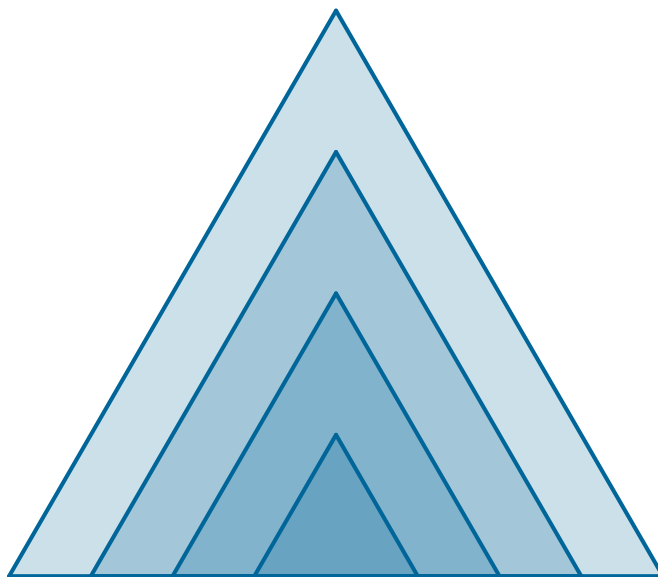
Ćwiczenie 2

1. Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 5. Oblicz pole tego prostokąta.
2. Obwód trójkąta prostokątnego jest równy 48 cm, a jego pole 96 cm^2 . Długości boków trójkąta są trzema kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu arytmetycznego. Wyznacz długości boków trójkąta.

Ćwiczenie 3

Boki trójkątów równobocznych tworzą ciąg arytmetyczny, w którym $r > 0$.

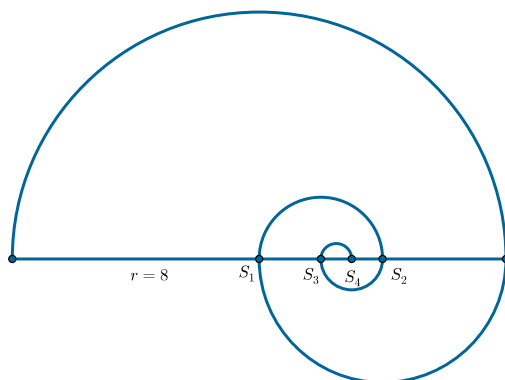
1. Czy obwody tych trójkątów tworzą ciąg arytmetyczny?
2. Czy pola tych trójkątów tworzą ciąg arytmetyczny?



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 4

Punkty S_1, S_2, S_3, S_4 są środkami półokręgów. Promień największego z półokręgów jest równy 8. Oblicz długość spirali przedstawionej na rysunku.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Z faktu, że każdy kolejny półokrąg tworzący spiralę przechodzi przez środek poprzedniego półokręgu, wynika, że każdy kolejny promień jest połową promienia poprzedniego półokręgu.

Zatem kolejne promienie półokręgów tworzą malejący ciąg geometryczny, którego iloraz

$$q = \frac{1}{2}.$$

Długości kolejnych półokręgów są równe

$$L_1 = 8\pi, L_2 = \frac{1}{2} \bullet 8\pi = 4\pi, L_3 = \frac{1}{2} \bullet 4\pi = 2\pi \dots,$$

I również tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $q = \frac{1}{2}$.

Długość spirali jest sumą pięciu pierwszych wyrazów tego ciągu. Zatem

$$L = S_5 = 8\pi \frac{1 - (\frac{1}{2})^5}{1 - \frac{1}{2}} = 8\pi \bullet \frac{31}{16} = \frac{31}{2}\pi$$

Przykład 5

W pierwszym miesiącu pracy w pizzerii Kamil zarobił 650 zł. W każdym następnym miesiącu zarabiał o 20 zł więcej niż w miesiącu poprzednim. Jaką kwotę zarobił Kamil, pracując w ten sposób przez pół roku?

Zauważmy, że zarobione przez Kamila kwoty są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, w którym $a_1 = 650$ zł i $r = 20$ zł.

Zarobiona przez pół roku kwota będzie sumą sześciu pierwszych wyrazów tego ciągu. Wstawiając wartości do wzoru na sumę ciągu arytmetycznego, otrzymujemy

$$S_6 = \frac{2 \bullet 650 + 5 \bullet 20}{2} \bullet 6 = 4200 \text{ zł}$$

Ćwiczenie 4

Ciąg $(3, 2x, y - 3)$ jest ciągiem arytmetycznym, a ciąg $(64, y, x)$ jest ciągiem geometrycznym. Wyznacz x i y .

Ćwiczenie 5

Liczby 30, x , y w podanej kolejności tworzą malejący ciąg arytmetyczny. Oblicz x i y , wiedząc, że ciąg $(x, y, 2)$ jest geometryczny.

Ćwiczenie 6

Wyrazami nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n) są kolejne dodatnie liczby całkowite, które przy dzieleniu przez 4 dają resztę 1: $a_1 = 1$, $a_2 = 5$. Wyrazami nieskończonego ciągu arytmetycznego (b_n) są kolejne dodatnie liczby całkowite, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 2: $b_1 = 2$, $b_2 = 7$. Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe, które występują w obu tych ciągach.

Ćwiczenie 7

Oblicz sumę

1. wszystkich dodatnich liczb całkowitych, które są dwucyfrowe i dzielą się przez 3
2. parzystych liczb dwucyfrowych
3. wszystkich liczb dwucyfrowych podzielnych przez 8
4. wszystkich liczb dwucyfrowych, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 2

Ćwiczenie 8

Miary kątów trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz różnicę tego ciągu.

Ćwiczenie 9

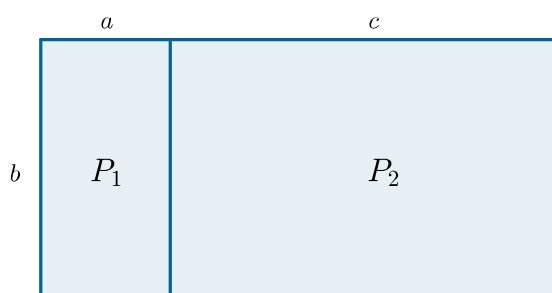
Miary kątów trójkąta tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym najmniejszy kąt ma miarę 51° . Oblicz miarę największego kąta tego trójkąta.

Ćwiczenie 10

Pierwszy odcinek łamanej ma długość 4 cm, a każdy kolejny jest dłuższy od poprzedniego o 2 cm. Z ilu odcinków składa się ta łamana, jeśli jej całkowita długość jest równa 270 cm?

Ćwiczenie 11

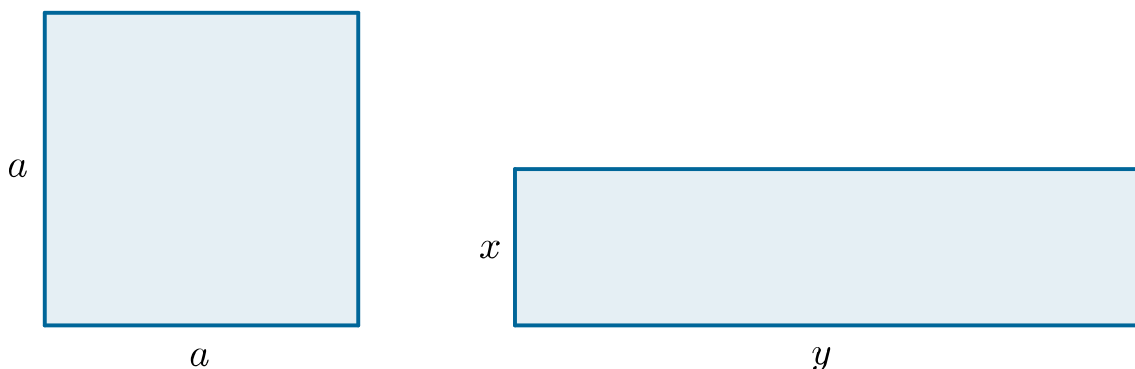
Prostokąt o polu powierzchni równym 128 cm^2 podzielono na dwa takie prostokąty, że pole większego jest trzy razy większe od pola mniejszego. Długości odcinków a, b są długościami boków mniejszego prostokąta, b, c są długościami boków większego z prostokątów, które powstały z podziału. Wiedząc, że a, b, c tworzą ciąg arytmetyczny, wyznacz długości boków tego prostokąta.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12

Dany jest kwadrat o boku a i prostokąt o bokach x i y . Ciąg (x, a, y) jest geometryczny. Która z tych figur ma większe pole?



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13

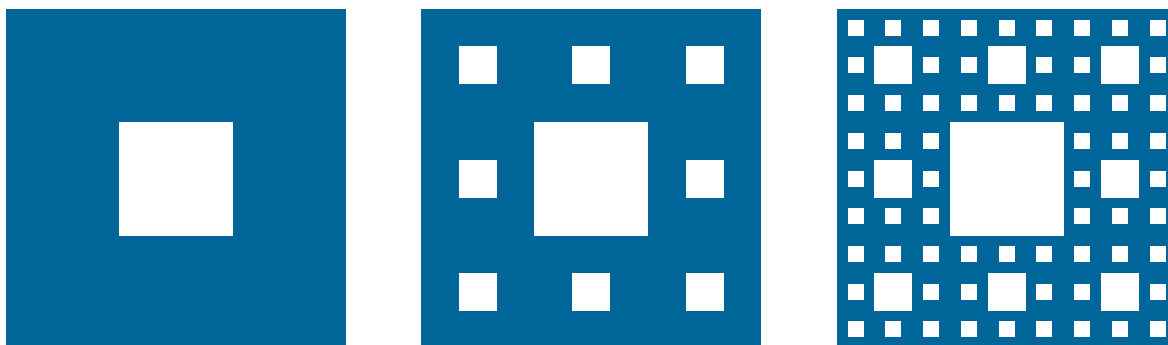
Długości trzech krawędzi prostopadłościanu wychodzących z tego samego wierzchołka tworzą ciąg geometryczny, a suma długości tych krawędzi jest równa 12. Objętość tego prostopadłościanu jest równa 64. Oblicz długości krawędzi tego prostopadłościanu.

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 14

Na kolejnych rysunkach zaznaczono sposób tworzenia tzw. dywanu Sierpińskiego.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Za każdym razem z kwadratu jest usuwana pewna liczba kwadratów.

1. Ile łącznie kwadratów zostanie usuniętych po 4 kroku?
2. Ile łącznie kwadratów zostanie usuniętych po n krokach?

Ćwiczenie 15

Pole trójkąta prostokątnego ABC jest równe 24, a długości boków tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz obwód tego trójkąta.

Funkcja a ciąg

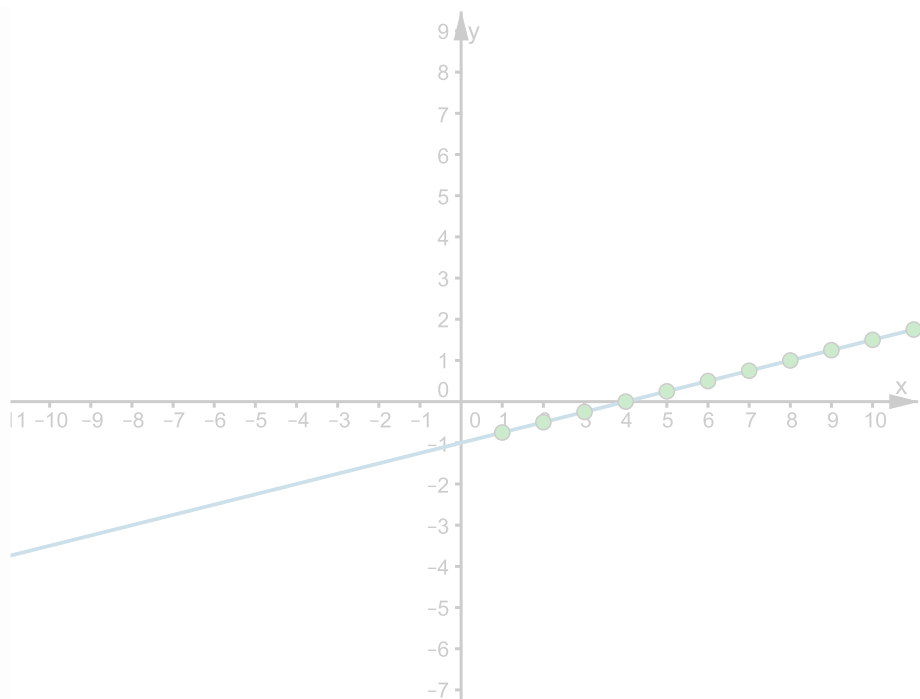


Wybierz funkcję lub ciąg,
by zilustrować pojęcie wykresem.

☒ ciąg $a_n = 4n - 1$

☒ funkcja $f(x) = 4x - 1$

o dziedzinie rzeczywistej



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D12dXI5bO>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Funkcja wykładnicza i jej własności.

Przekształcanie wykresu funkcji wykładniczej

Zdefiniowaliśmy wcześniej potęgi o wykładnikach naturalnych, całkowitych i wymiernych, przyjmując odpowiednie założenia o podstawach tych potęg.

Powyższą wiedzę uzupełnimy krótką informacją o potędze o wykładniku niewymiernym. Zakładamy, że podstawa a jest liczbą rzeczywistą, dodatnią, wykładnik x jest dowolną liczbą niewymierną, na przykład $3^{\sqrt{2}}$, 2^{π} .

Potęga a^x jest liczbą, której przybliżenie możemy znaleźć, przyjmując przybliżenie wymierne wykładnika x i ewentualnie podstawy a . Oczywiście jest, że im lepsze przybliżenie wykładnika i podstawy, tym dokładniejszą wartość wymierną potęgi otrzymamy. Na przykład:

$$3^{\sqrt{2}} \approx 3^{1,4} = 3^{\frac{14}{10}} = \sqrt[10]{3^{14}} \approx 4,656$$

$$3^{\sqrt{2}} \approx 3^{1,41} = 3^{\frac{141}{100}} = \sqrt[100]{3^{141}} \approx 4,707$$

$$3^{\sqrt{2}} \approx 3^{1,414} = 3^{\frac{1414}{1000}} = \sqrt[1000]{3^{1414}} \approx 4,728$$

Korzystając z kalkulatora, otrzymamy:

$$3^{\sqrt{2}} \approx 4,728804388$$

Możemy teraz przyjąć, że wyrażenie a^x jest dobrze określone dla każdej liczby rzeczywistej x i każdej podstawy $a > 0$.

Definicja: Funkcja wykładnicza

Funkcją wykładniczą nazywamy funkcję określoną dla każdej liczby rzeczywistej x wzorem $f(x) = a^x$, gdzie a jest ustaloną liczbą dodatnią i różną od 1.

Warunek występujący w tej definicji, dotyczący podstawy a wynika z tego, że jedynie dla $a > 0$ możemy jednoznacznie określić funkcję $f(x) = a^x$ dla każdej liczby rzeczywistej x . Zauważmy, że dla $a < 0$ funkcja nie byłaby określona dla każdej liczby rzeczywistej, np. nie dałoby się obliczyć $f(\frac{1}{2})$, gdyż oznaczałoby to konieczność obliczenia pierwiastka kwadratowego z liczby ujemnej, a taki nie istnieje. Dla $a = 0$ nie można określić funkcji dla żadnej liczby x niedodatniej. Z innego powodu zakładamy, że $a \neq 1$. Dla $a = 1$ funkcja jest, co prawda, określona dla każdej liczby rzeczywistej x , ale wówczas jest to funkcja stała

$$f(x) = 1^x = 1$$

Funkcji $f(x) = 1^x = 1$ nie będziemy uznawać za funkcję wykładniczą, gdyż ma ona inne własności niż każda z funkcji wykładniczych.

Przykład 1

Naszkicujemy wykres funkcji określonej dla każdej liczby rzeczywistej x wzorem

$$f(x) = 2^x$$

W tym celu uzupełnimy tabelę wartościami funkcji dla kilku wybranych argumentów.

Tabela. Dane

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x) = 2^x$								

$$f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f(0) = 2^0 = 1$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$f(1) = 2^1 = 2$$

$$f(2) = 2^2 = 4$$

$$f(3) = 2^3 = 8$$

Uzupełniamy tabelę, wpisując obliczenia wartości funkcji f .

Tabela. Dane

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x) = 2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	4	8

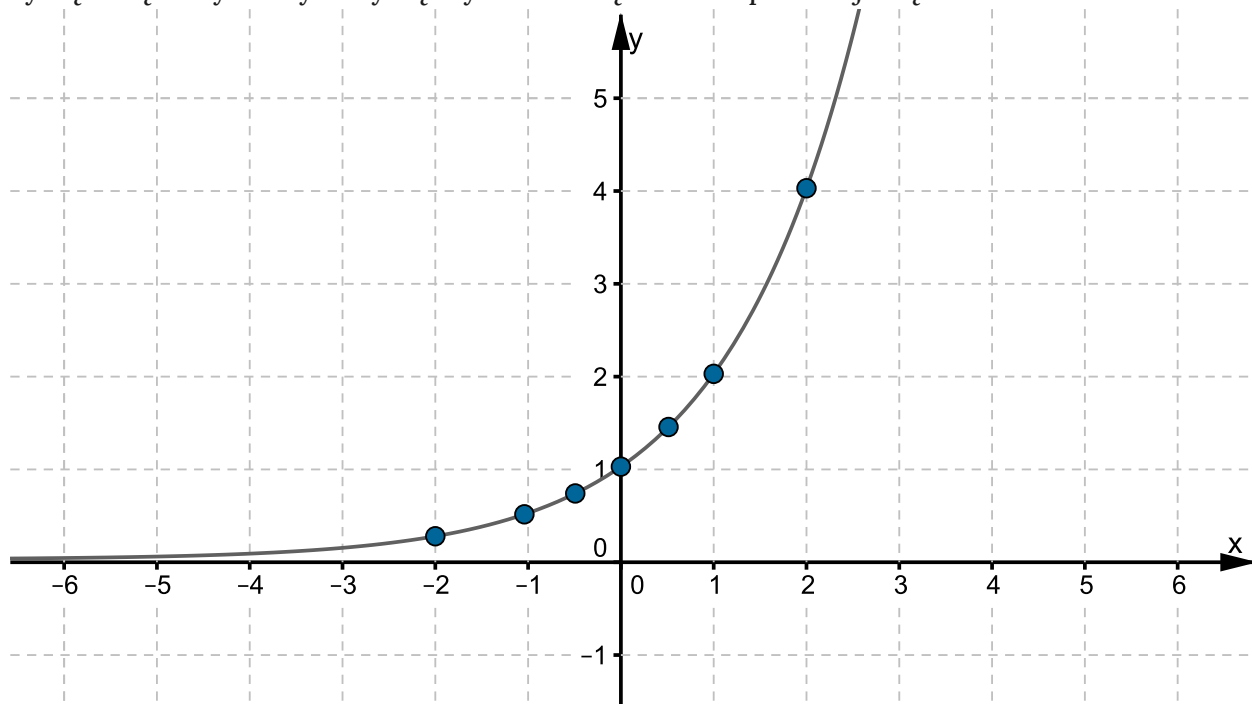
Zastanówmy się, jak funkcja f będzie się zachowywać dla bardzo małych argumentów. Na przykład

$$f(-100) = 2^{-100} = \frac{1}{2^{100}}$$

Jest to liczba dodatnia, ale na tyle mała, że nie uda nam się dokładnie zaznaczyć w układzie współrzędnych punktu $\left(-100, \frac{1}{2^{100}}\right)$, który leży na wykresie tej funkcji. Dla jeszcze mniejszych argumentów wartości funkcji będą nadal dodatnie, ale jeszcze bliższe zeru. Każda, bardzo, bardzo bliska zeru liczba dodatnia jest wartością tej funkcji wykładniczej dla pewnego ujemnego argumentu. Geometrycznie oznacza to, że lewa część wykresu funkcji f zbliża się do osi Ox , czyli do prostej o równaniu $y = 0$. Tę prostą nazywamy asymptotą wykresu funkcji.

Krzywa przechodząca przez wyznaczone punkty (te które znaleźliśmy i dowolne inne,

które moglibyśmy w ten sposób znaleźć) jest wykresem funkcji wykładniczej $f(x) = 2^x$. Krzywą taką nazywamy krzywą wykładniczą albo eksponentialną.



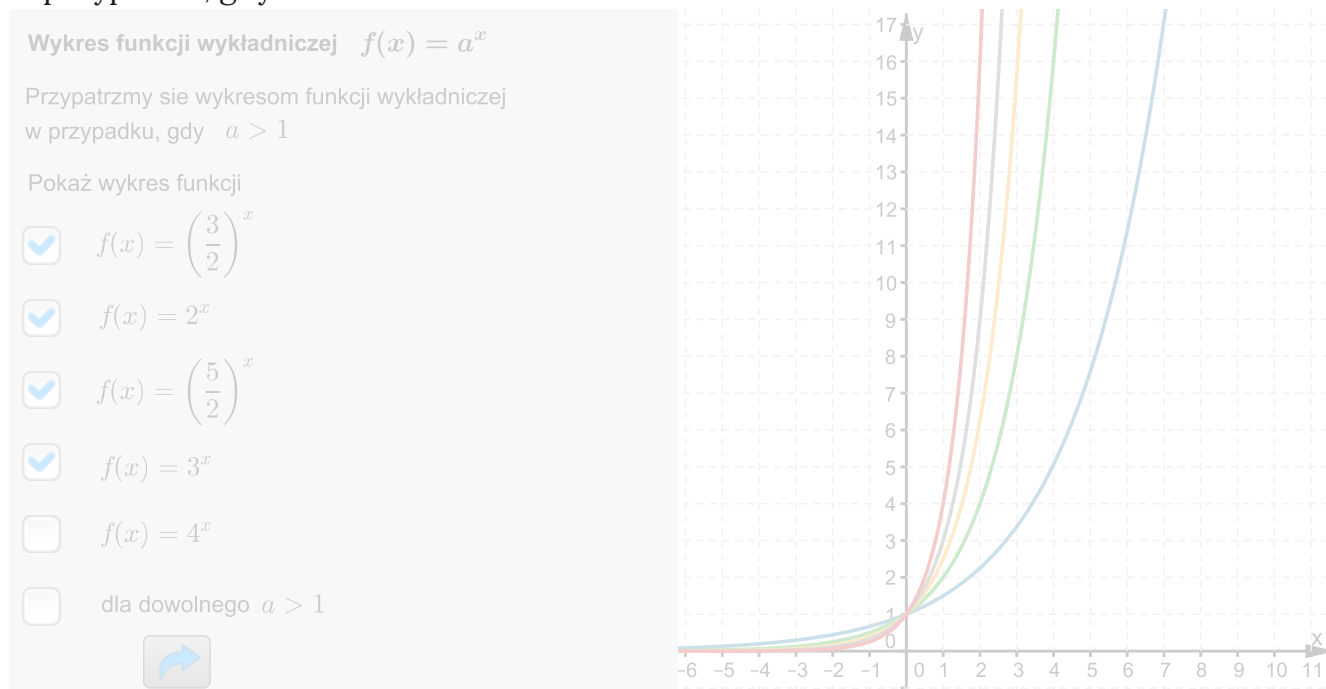
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 2

Przypatrzmy się teraz wykresom innych funkcji wykładniczych

$$f(x) = a^x$$

w przypadku, gdy $a > 1$.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DOgeKo121>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

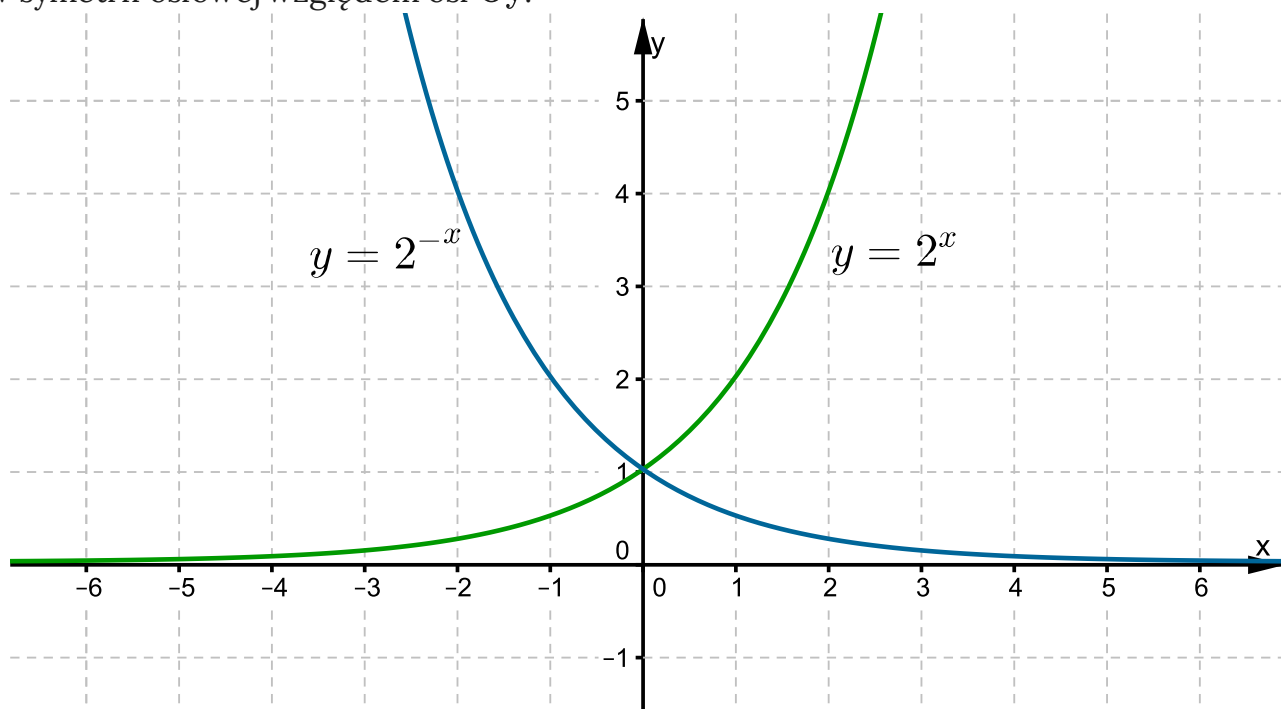
Zauważmy, że wszystkie te funkcje są rosnące, a ich wykresy w całości leżą nad osią Ox . Zatem żadna z tych funkcji nie ma miejsca zerowego. Wszystkie wykresy mają jeden wspólny punkt. Jest to punkt o współrzędnych $(0, 1)$, w którym wykres każdej z tych funkcji przecina oś Oy . Jest tak, ponieważ dla dowolnej liczby $a > 1$ mamy $a^0 = 1$.

Przykład 3

Rozważmy teraz funkcję określoną dla każdej liczby rzeczywistej x wzorem $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Korzystając z własności potęg, wzór funkcji g możemy zapisać w postaci

$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x}$$

To oznacza, że wykres tej funkcji otrzymamy, znajdując obraz wykresu funkcji $f(x) = 2^x$ w symetrii osiowej względem osi Oy .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zauważmy, że w ten sposób możemy narysować wykres każdej funkcji $f(x) = a^x$, gdzie $a \in (0, 1)$. Wykres każdej takiej funkcji w całości leży nad osią Ox , więc funkcja nie ma miejsc zerowych. Również każdy z wykresów funkcji przecina oś Oy w punkcie $(0, 1)$. Jednak każda z takich funkcji jest malejąca.

[Film dostępny na portalu epodreczniki.pl](#)

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja pokazuje wykres funkcji wykładniczej $f(x) = 2$ do potęgi x i funkcji wykładniczej $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ do potęgi x . Dla różnych argumentów zaznaczone są odpowiadające im wartości funkcji. Zbiorem wartości funkcji wykładniczej $f(x) = a$ do potęgi x , gdzie a jest ustaloną liczbą dodatnią i różną od 1, jest przedział obustronnie otwarty od zera do plus nieskończoności.

Animacja pokazuje wykres funkcji wykładniczej $f(x) = 2$ do potęgi x i funkcji wykładniczej $g(x) = (\text{jedna druga})$ do potęgi x . Dla przeciwnych argumentów zaznaczone są te same wartości funkcji. Opisane funkcje wykładnicze są symetryczne względem osi OY.

Podsumujmy teraz własności funkcji wykładniczych, wykorzystując ich wykresy.

Własności funkcji wykładniczej

Każda funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ ma następujące własności:

- dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych,
- zbiorem wartości jest przedział $(0, +\infty)$,
- asymptotą wykresu funkcji jest prosta o równaniu $y = 0$,
- nie ma miejsc zerowych,
- jest monotoniczna, przy czym gdy $a > 1$, to funkcja f jest rosnąca, a gdy $0 < a < 1$, to funkcja jest malejąca,
- jest różnowartościowa, czyli każdą wartość przyjmuje tylko dla jednego argumentu,
- wykres funkcji przecina oś Oy w punkcie $(0,1)$.

Omówimy teraz przesunięcia wykresów funkcji wykładniczych wzdłuż osi układu współrzędnych. Jeżeli przesuniemy wykres funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ o p wzdłuż osi Ox, to otrzymamy wykres funkcji o wzorze $g(x) = a^{x-p}$. Przypomnijmy, że przesunięcie o np. $p = -2$, oznacza przesunięcie wykresu w lewo o 2 jednostki.

Animacja przedstawia przesunięcie wykresu funkcji wykładniczej $f(x) = 2$ do potęgi x wzdłuż osi OX układu współrzędnych. W wyniku przesunięcia $f(x)$ o trzy jednostki w prawo otrzymujemy funkcję $g(x) = 2$ do potęgi $(x - 3)$. W wyniku przesunięcia $f(x)$ o dwie jednostki w lewo otrzymujemy funkcję $h(x) = 2$ do potęgi $(x + 2)$.

Animacja przedstawia przesunięcie wykresu funkcji wykładniczej $f(x) = \text{jedna druga}$ do potęgi x wzdłuż osi OX układu współrzędnych. W wyniku przesunięcia $f(x)$ o trzy jednostki w prawo otrzymujemy funkcję $g(x) = \text{jedna druga}$ do potęgi $(x - 3)$. W wyniku przesunięcia $f(x)$ o dwie jednostki w lewo otrzymujemy funkcję $h(x) = \text{jedna druga}$ do potęgi $(x + 2)$.

Jeżeli przesuniemy wykres funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ o q wzdłuż osi Oy , to otrzymamy wykres funkcji o wzorze $g(x) = a^x + q$. W tym przypadku przesunięcie o np. $q = -3$ oznacza przesunięcie wykresu w dół o 3 jednostki. Asymptotą wykresu funkcji g jest teraz prosta o równaniu $y = q$.

[Film dostępny na portalu epodreczniki.pl](#)

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia przesunięcie wykresu funkcji wykładniczej $f(x) = 2$ do potęgi x wzdłuż osi OY układu współrzędnych. W wyniku przesunięcia $f(x)$ o trzy jednostki w dół otrzymujemy funkcję $g(x) = (2 \text{ do potęgi } x) - 3$. W wyniku przesunięcia $f(x)$ o dwie jednostki w górę otrzymujemy funkcję $h(x) = (2 \text{ do potęgi } x) + 2$.

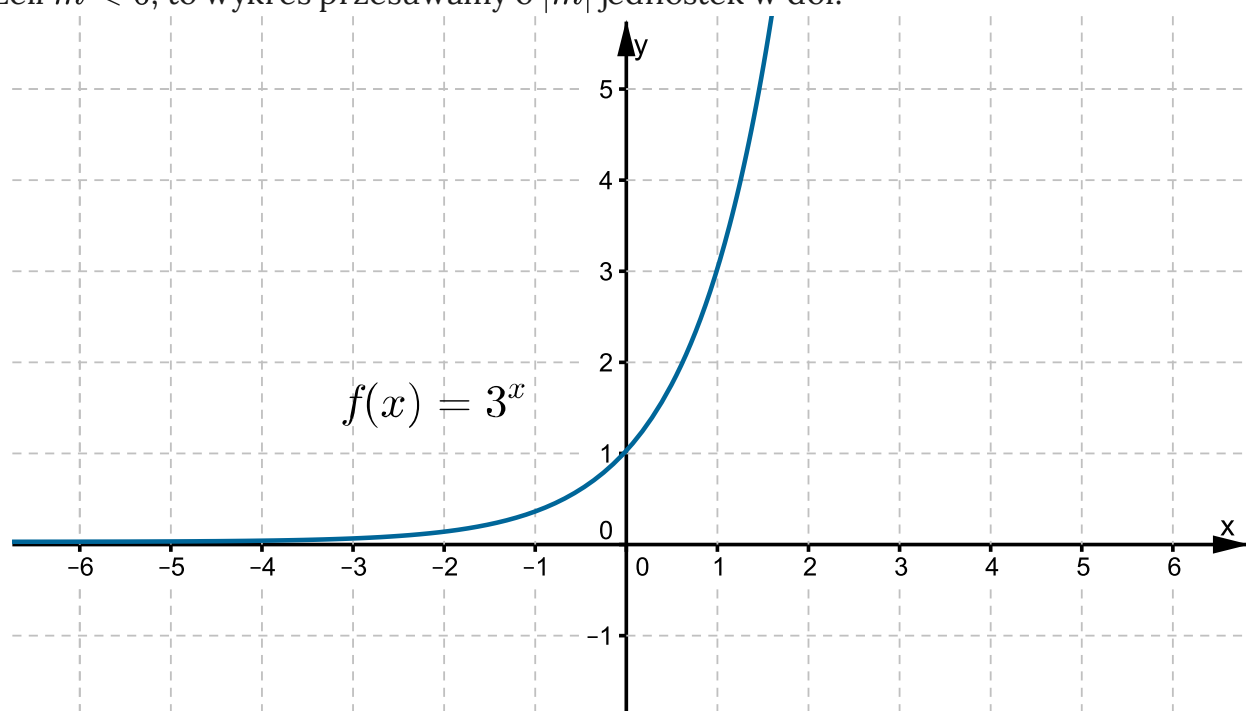
[Film dostępny na portalu epodreczniki.pl](#)

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia przesunięcie wykresu funkcji wykładniczej $f(x) = \text{jedna druga do potęgi } x$ wzdłuż osi OY układu współrzędnych. W wyniku przesunięcia $f(x)$ o trzy jednostki w dół otrzymujemy funkcję $g(x) = (\text{jedna druga do potęgi } x) - 3$. W wyniku przesunięcia $f(x)$ o dwie jednostki w górę otrzymujemy funkcję $h(x) = (\text{jedna druga do potęgi } x) + 2$.

Przykład 4

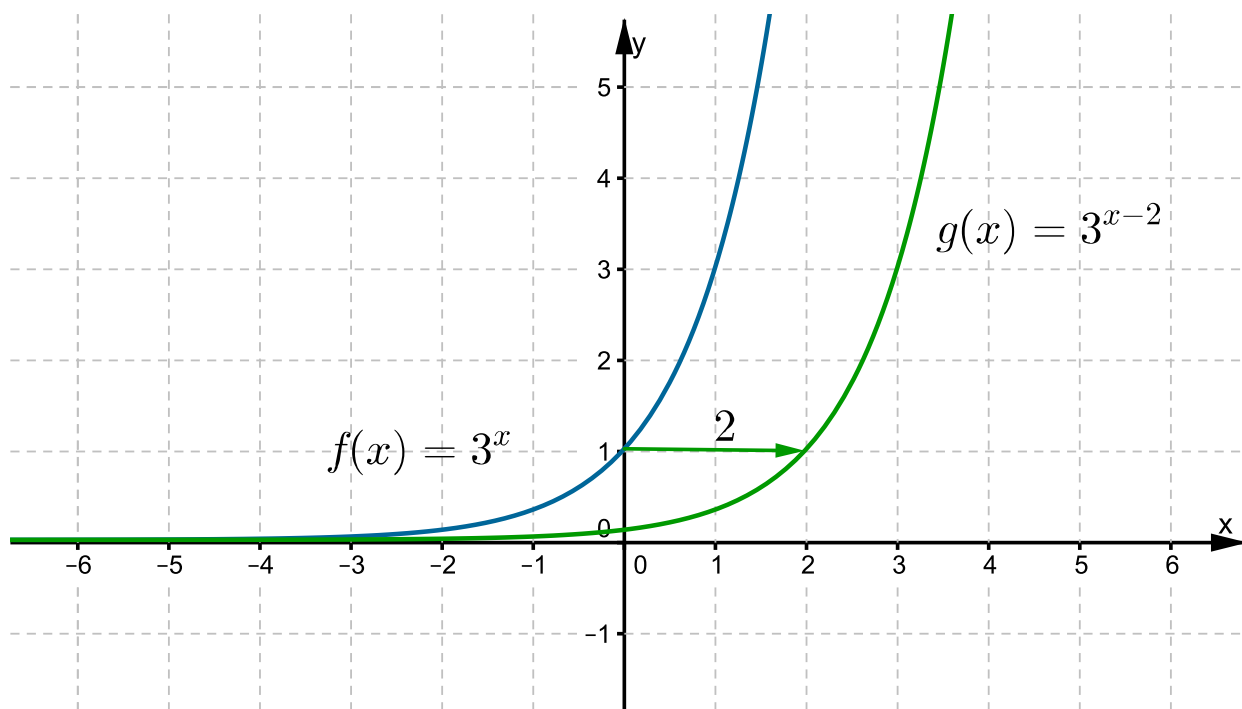
Przesuniemy wykres funkcji $f(x) = 3^x$ o m wzdłuż podanej osi układu współrzędnych. jeżeli $m > 0$, to wykres przesuwamy o m jednostek w górę. jeżeli $m < 0$, to wykres przesuwamy o $|m|$ jednostek w dół.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

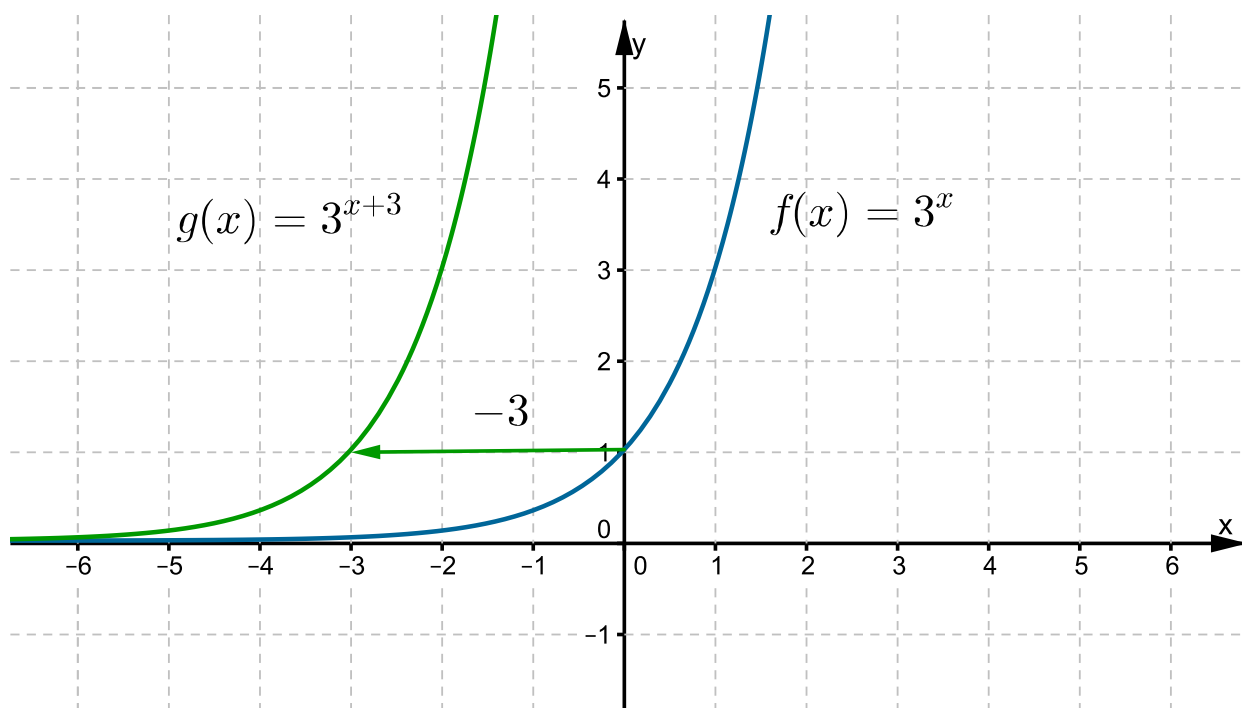
Narysujemy otrzymany w ten sposób wykres funkcji g oraz zapiszemy jej wzór.

1. Przesuwając wykres funkcji $f(x) = 3^x$ o 2 wzdłuż osi Ox , otrzymujemy wykres funkcji $g(x) = 3^{x-2}$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

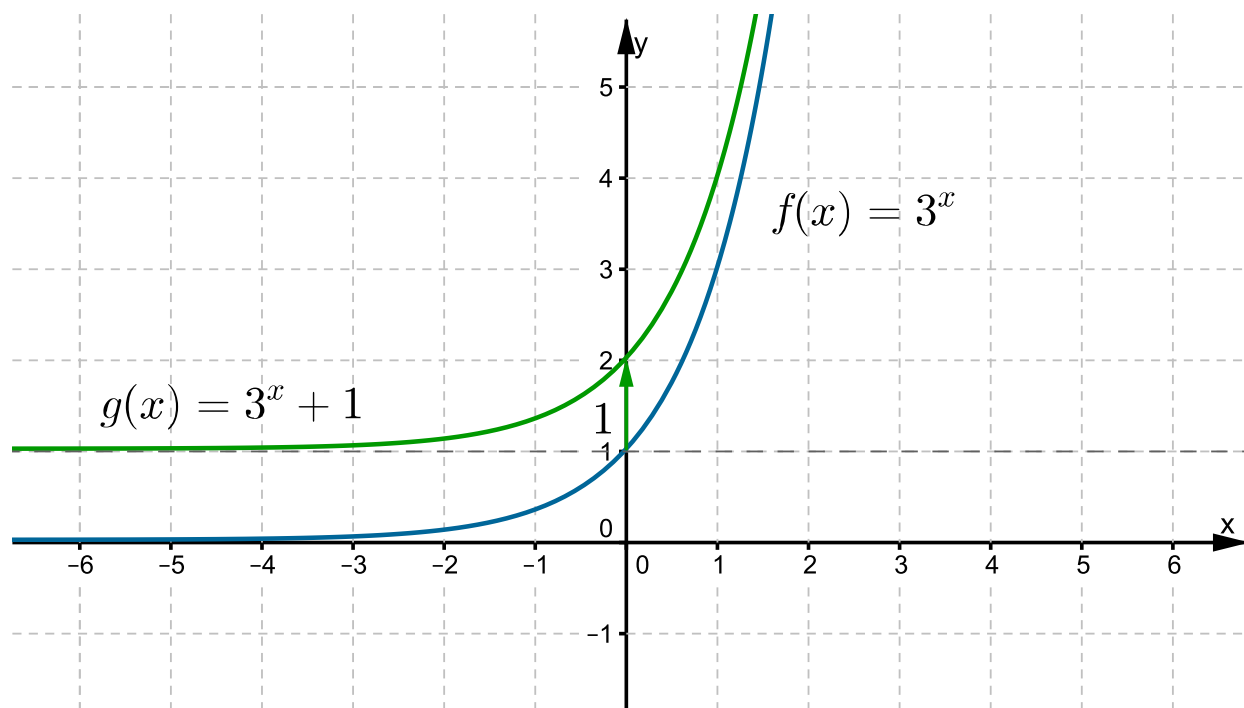
2. Po przesunięciu wykresu funkcji $f(x) = 3^x$ o $m = -3$ wzdłuż osi Ox otrzymujemy wykres funkcji o wzorze $g(x) = 3^{x-(-3)} = 3^{x+3}$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

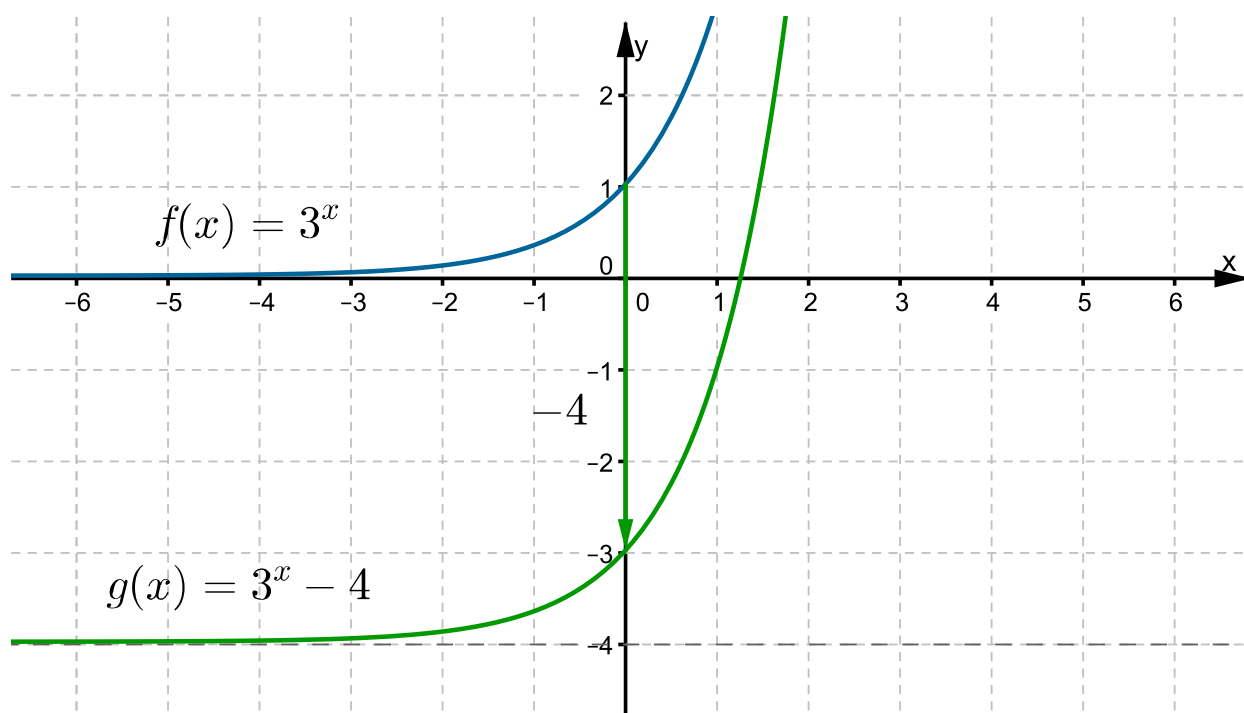
3. Po przesunięciu wykresu funkcji wykładniczej $f(x) = 3^x$ o $m = 1$ wzdłuż osi Oy otrzymamy wykres funkcji $g(x) = 3^x + 1$. Ponieważ zbiorem wartości funkcji g jest

przedział $(1, +\infty)$, więc można narysować także prostą o równaniu $y = 1$, która jest asymptotą wykresu funkcji g . Rysujemy ją zazwyczaj przerywaną linią.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

4. Przesunięcie o $m = -4$ wzdłuż osi Oy oznacza przesunięcie wykresu w dół o 4 jednostki. Wzór funkcji, której wykres otrzymamy po tym przekształceniu, ma postać $f(x) = 3^x + (-4) = 3^x - 4$, a asymptotą jej wykresu jest prosta $y = -4$.

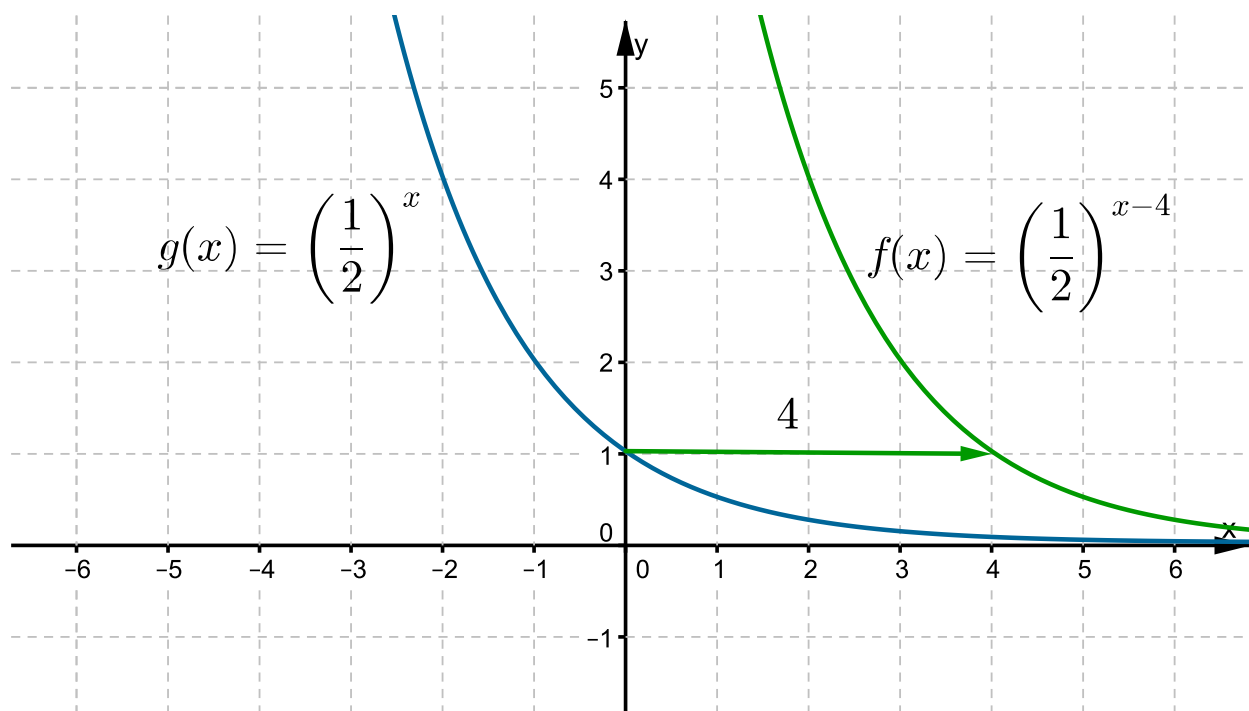


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 5

Narysuj wykres funkcji f . Podaj wzór funkcji wykładniczej g , której wykres przesunęliśmy tak, aby otrzymać wykres funkcji f . O ile jednostek i wzdłuż której osi układu współrzędnych wykonaliśmy to przesunięcie? W jakich punktach wykres funkcji f przetnie osie Oy i Ox?

1. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$
2. $f(x) = 2^{x+3}$
3. $f(x) = 4^x + 1$
4. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3$
5. Wykres funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$ to wykres funkcji $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ przesunięty o 4 wzdłuż osi Ox.



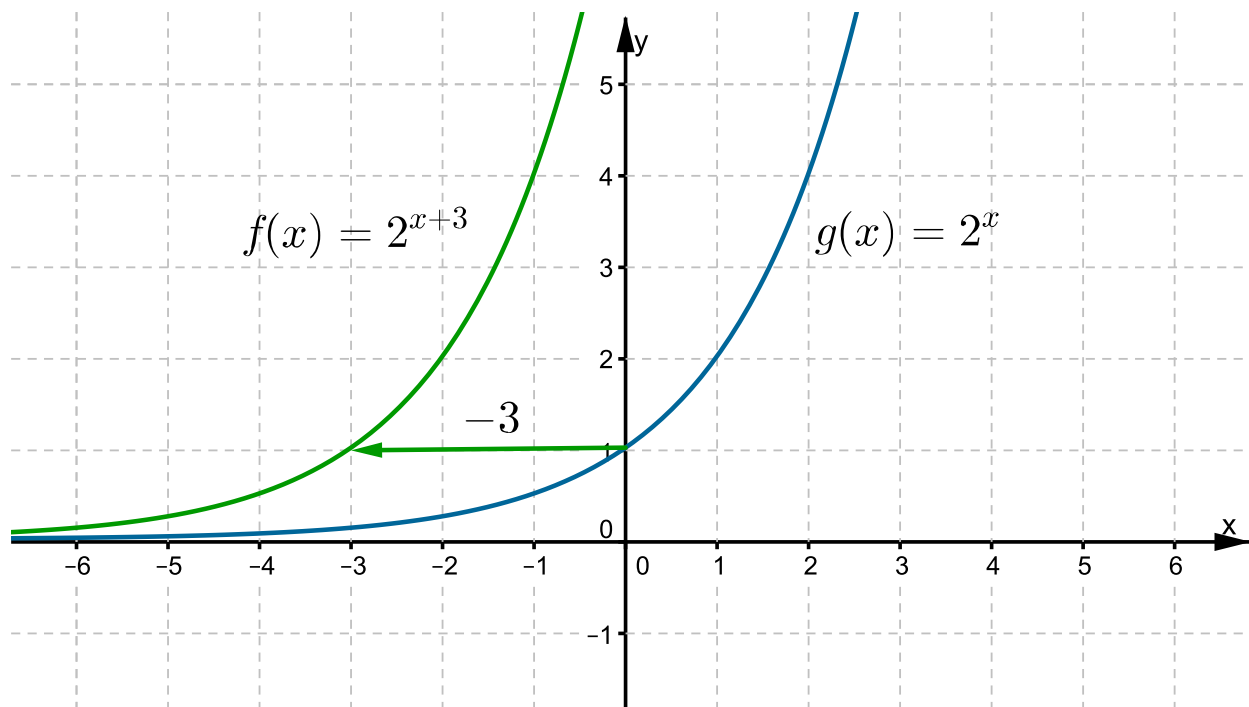
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Obliczając wartość funkcji f dla argumentu $x = 0$, znajdujemy współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji f z osią Oy. Mamy

$$f(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{0-4} = 2^4 = 16$$

Zatem szukanym punktem jest $(0,16)$. Cały wykres leży nad osią Ox, więc nie ma punktów wspólnych z tą osią.

6. Wzór funkcji f możemy zapisać w postaci $f(x) = 2^{x+3} = 2^{x-(-3)}$. Jej wykres powstaje zatem przez przesunięcie wykresu funkcji $g(x) = 2^x$ o -3 wzdłuż osi Ox, czyli o 3 jednostki w lewo.



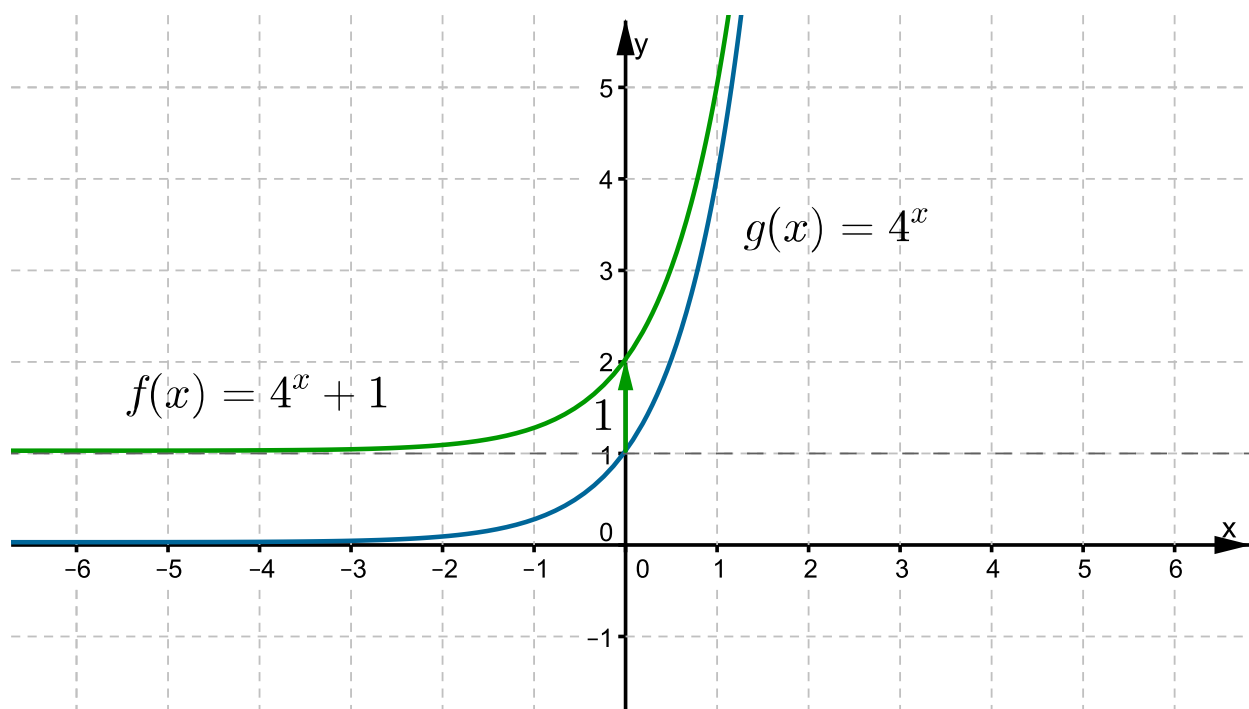
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Żeby znaleźć punkt przecięcia wykresu z osią Oy, obliczamy wartość funkcji dla argumentu 0, czyli

$$f(0) = 2^{0+3} = 8$$

Zatem wykres przecina tę oś w punkcie $(0, 8)$. Z osią Ox wykres funkcji nie przecina się, ponieważ cały leży nad tą osią.

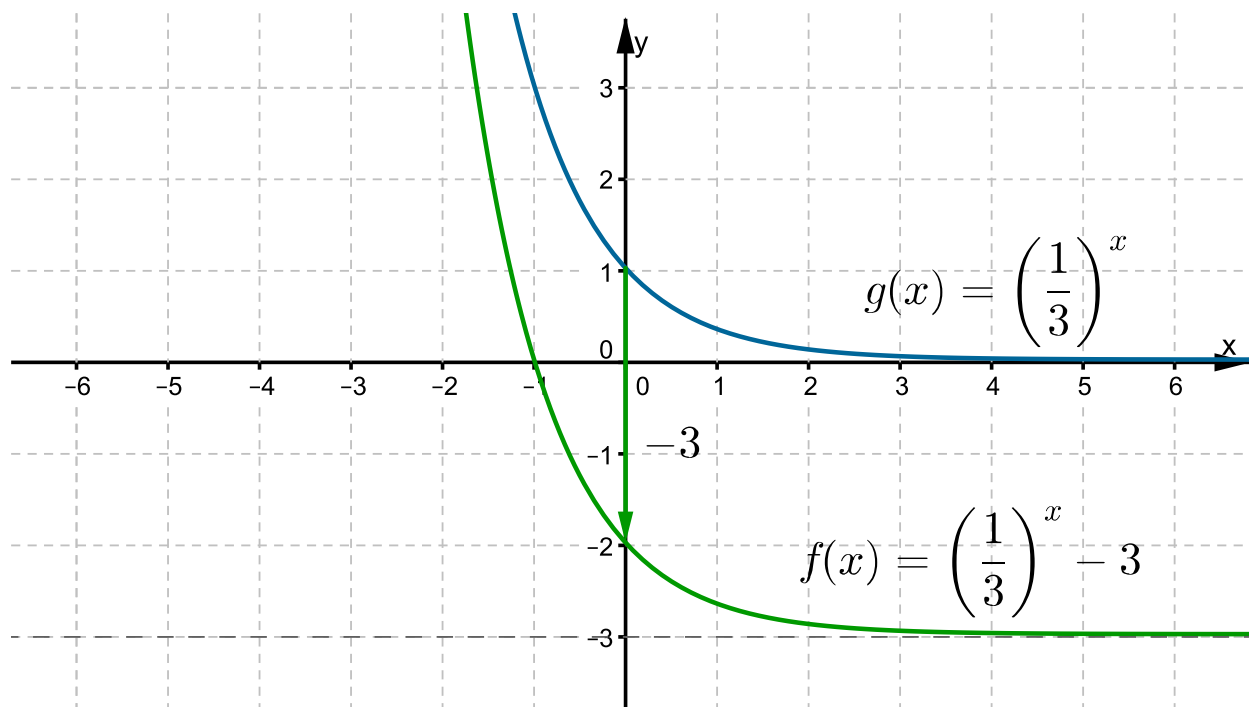
7. Wykres funkcji $f(x) = 4^x + 1$ jest wykresem funkcji $g(x) = 4^x$ przesuniętym o 1 wzdłuż osi Oy.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

$f(0) = 4^0 + 1 = 2$, zatem punktem przecięcia wykresu funkcji f z osią Oy jest punkt $(0,2)$. Cały wykres leży nad osią Ox, zatem nie istnieje punkt przecięcia wykresu z tą osią.

8. Wykres funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3$ powstaje przez przesunięcie wykresu funkcji $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ o -3 wzdłuż osi Oy.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ponieważ wykres funkcji g przecina oś Oy w punkcie $(0,1)$, więc punktem przecięcia funkcji f z osią Oy jest punkt $(0, -2)$. Żeby wyznaczyć punkt przecięcia tego wykresu z osią Ox, obliczymy argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość 0, czyli $0 = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3$. Stąd $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3$, czyli

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

Zatem $x = -1$. Punkt przecięcia z osią Ox to punkt $(-1,0)$.

[Film dostępny na portalu epodreczniki.pl](#)

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

"Animacja przedstawia przesunięcie wykresu funkcji wykładniczej $f(x) = 2$ do potęgi x o wektor $[p, q]$ w układzie współrzędnych. Rozpatrzono przypadki: Dla $p > 0$ oraz $q > 0$ przesunięcie o wektor $[3, 2]$ – otrzymano funkcję $g(x) = [2 \text{ do potęgi } (x - 3)] + 2$

[Film dostępny na portalu epodreczniki.pl](#)

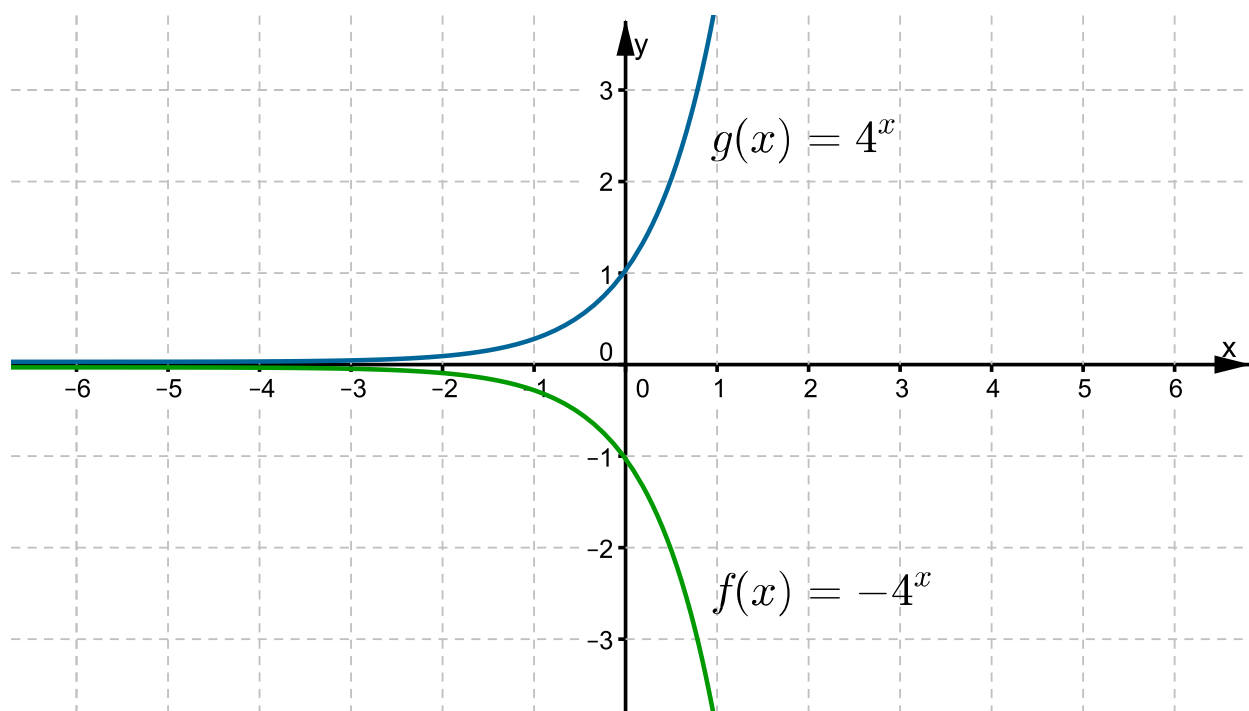
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

"Animacja przedstawia przesunięcie wykresu funkcji wykładniczej $f(x) = \text{jedna druga do potęgi } x$ o wektor $[p, q]$ w układzie współrzędnych. Rozpatrzono przypadki: Dla $p > 0$ oraz $q > 0$ przesunięcie o wektor $[3, 2]$ – otrzymano funkcję $g(x) = [\text{jedna druga do potęgi } (x - 3)] + 2$

Przykład 6

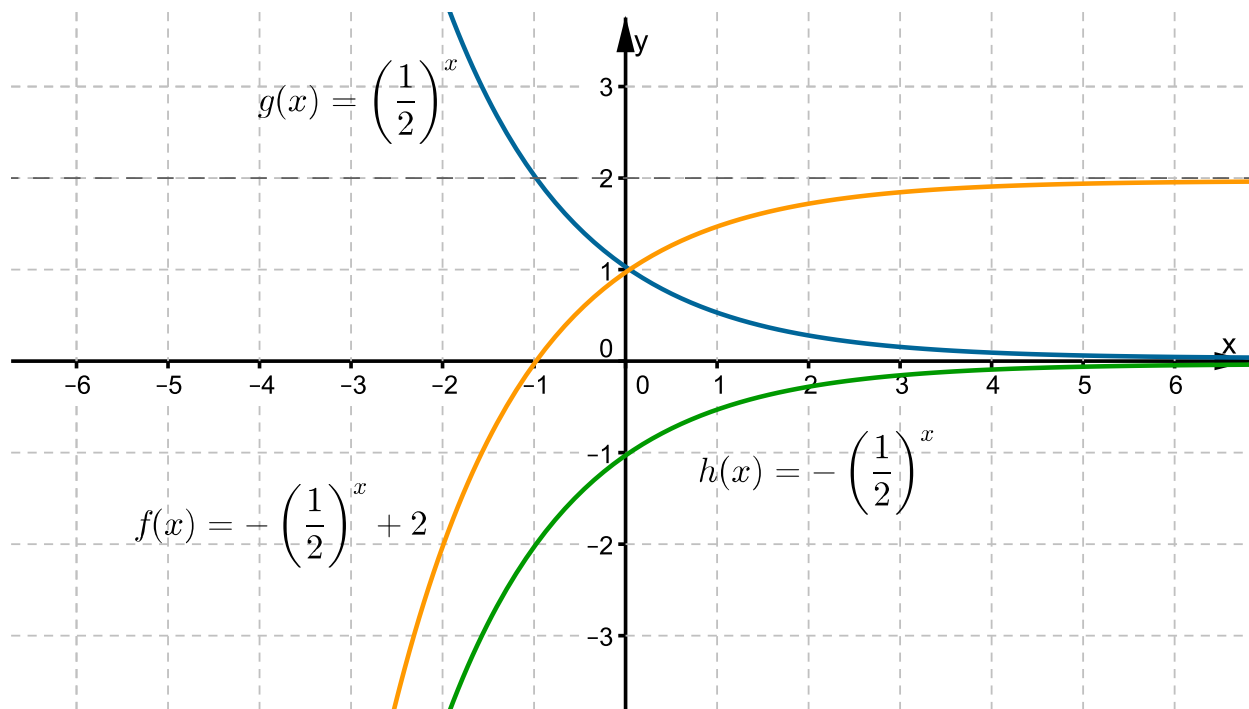
Narysujemy wykres funkcji

1. $f(x) = -4^x$
2. $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$
3. Wykres funkcji $f(x) = -4^x$ jest symetryczny względem osi Ox do wykresu funkcji $g(x) = 4^x$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

4. Żeby sporządzić wykres funkcji $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$, narysujemy najpierw wykres funkcji $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Następnie znajdziemy wykres do niego symetryczny względem osi Ox . Jest to wykres funkcji $h(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$, który z kolei przesuniemy o 2 wzdłuż osi Oy . W ten sposób otrzymamy wykres funkcji f .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 7

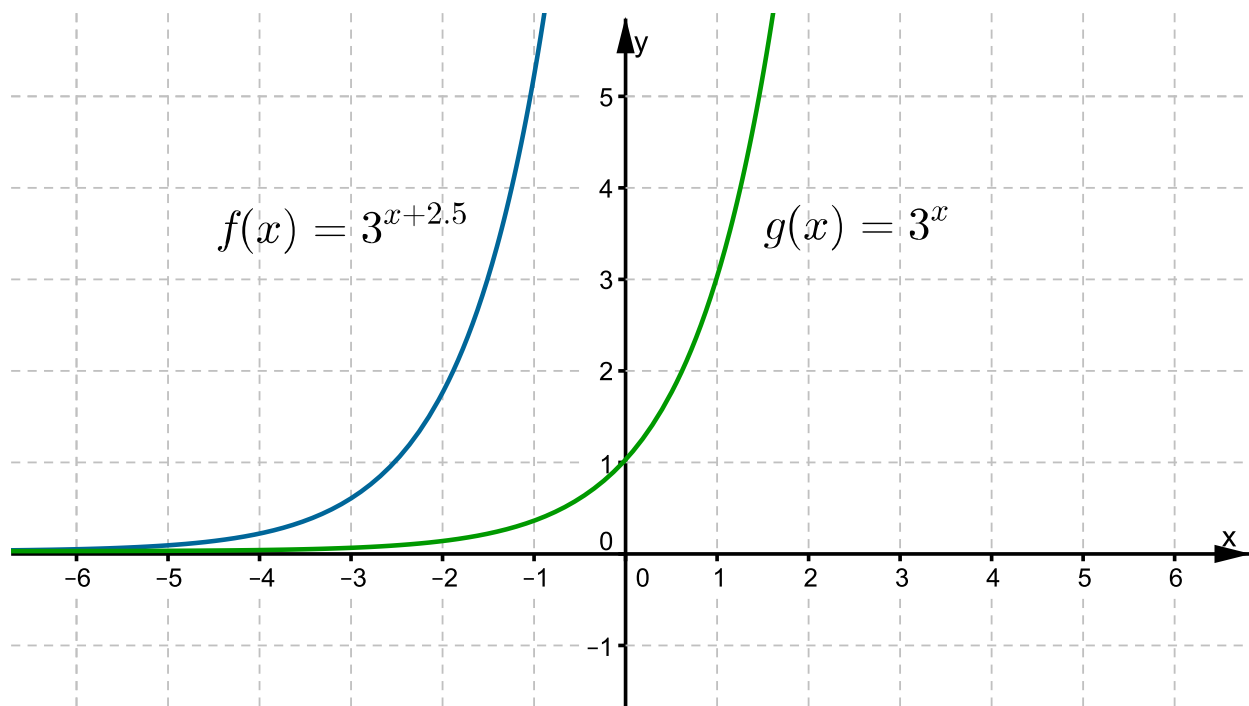
Narysujmy wykres funkcji

1. $f(x) = 9 \cdot \sqrt{3} \cdot 3^x$

2. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$

3. Przekształćmy wzór funkcji f , korzystając z własności potęg

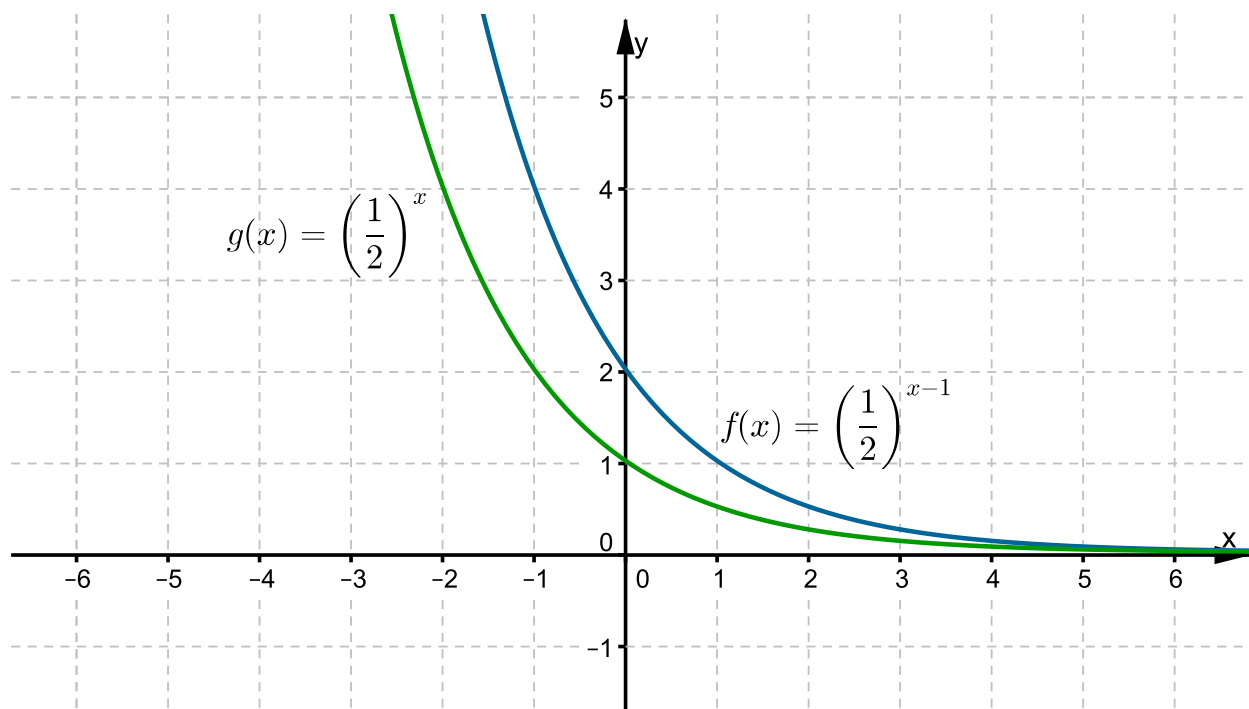
$f(x) = 9 \cdot \sqrt{3} \cdot 3^x = 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^x = 3^{2+\frac{1}{2}+x} = 3^{x+2\frac{1}{2}}$ Zatem, żeby narysować wykres funkcji f , przesuwamy wykres funkcji $g(x) = 3^x$ o $-2\frac{1}{2}$ wzdłuż osi Ox .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

4. Zapiszmy wzór funkcji w następujący sposób

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$. Zatem rysujemy wykres funkcji $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, a następnie przesuwamy go o 1 wzdłuż osi Ox .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 8

Wyznamy wzór funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$, mając dany punkt $\left(-2, \frac{1}{49}\right)$ leżący na jej wykresie.

Skoro punkt $\left(-2, \frac{1}{49}\right)$ leży na wykresie funkcji f , więc dla argumentu $x = -2$ funkcja przyjmuje wartość $f(-2) = \frac{1}{49}$. Mamy więc

$$\frac{1}{49} = a^{-2}$$

Po przekształceniu równanie to przyjmuje postać $7^{-2} = a^{-2}$, stąd $a = 7$. Zatem wzór funkcji f ma postać $f(x) = 7^x$.

Przykład 9

Sprawdzimy, czy punkt $A = (4, 4)$ leży na wykresie funkcji $f(x) = (\sqrt{2})^x$.

Wystarczy sprawdzić, czy dla argumentu $x = 4$ funkcja f przyjmie wartość 4. Ponieważ $f(4) = (\sqrt{2})^4 = 2^2 = 4$, więc punkt A leży na wykresie funkcji f .

Przykład 10

Jaka jest największa, a jaka najmniejsza wartość funkcji wykładniczej $f(x) = (\sqrt{5})^x$ w przedziale $\langle -2, 0 \rangle$?

Funkcja $f(x) = (\sqrt{5})^x$ jest rosnąca, ponieważ $\sqrt{5} > 1$, a dla $a > 1$ funkcja wykładnicza

$g(x) = a^x$ jest rosnąca. Zatem najmniejszą wartość funkcja osiąga dla najmniejszego argumentu z przedziału $\langle -2, 0 \rangle$, czyli dla $x = -2$, a największą dla największego argumentu z tego przedziału, czyli dla $x = 0$. Mamy więc wartość najmniejszą $f(-2) = (\sqrt{5})^{-2} = \frac{1}{(\sqrt{5})^2} = \frac{1}{5}$ oraz wartość największą $f(0) = (\sqrt{5})^0 = 1$ w przedziale $\langle -2, 0 \rangle$.

Przykład 11

Określ monotoniczność funkcji $f(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$ i na tej podstawie porównaj liczby $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{10}$ oraz $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{20}$.

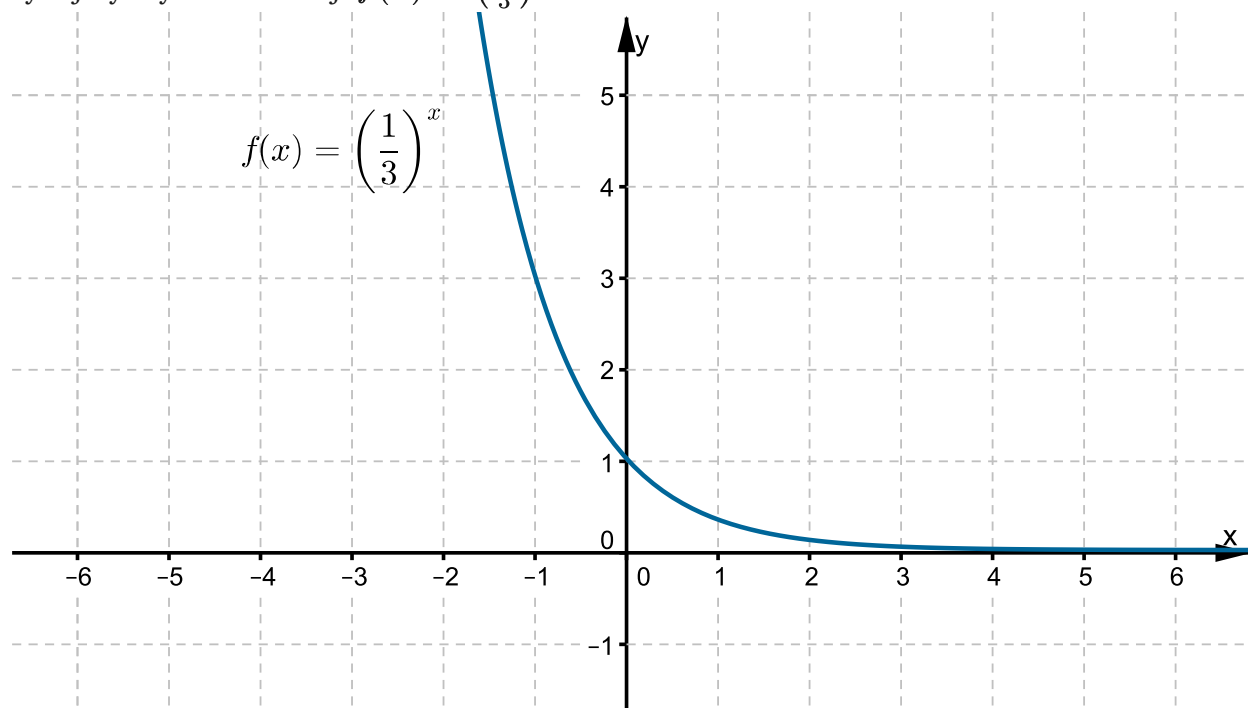
Ponieważ $a = \frac{\sqrt{3}}{2} \in (0, 1)$, więc funkcja $f(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$ jest malejąca. Zatem dla mniejszego argumentu przyjmuje wartość większą. Ponieważ $10 < 20$, więc $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{10} > \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{20}$.

Przykład 12

Wyznaczmy wszystkie argumenty funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, dla których wartość funkcji jest

1. równa 81
2. większa od 81
3. co najmniej równa 81

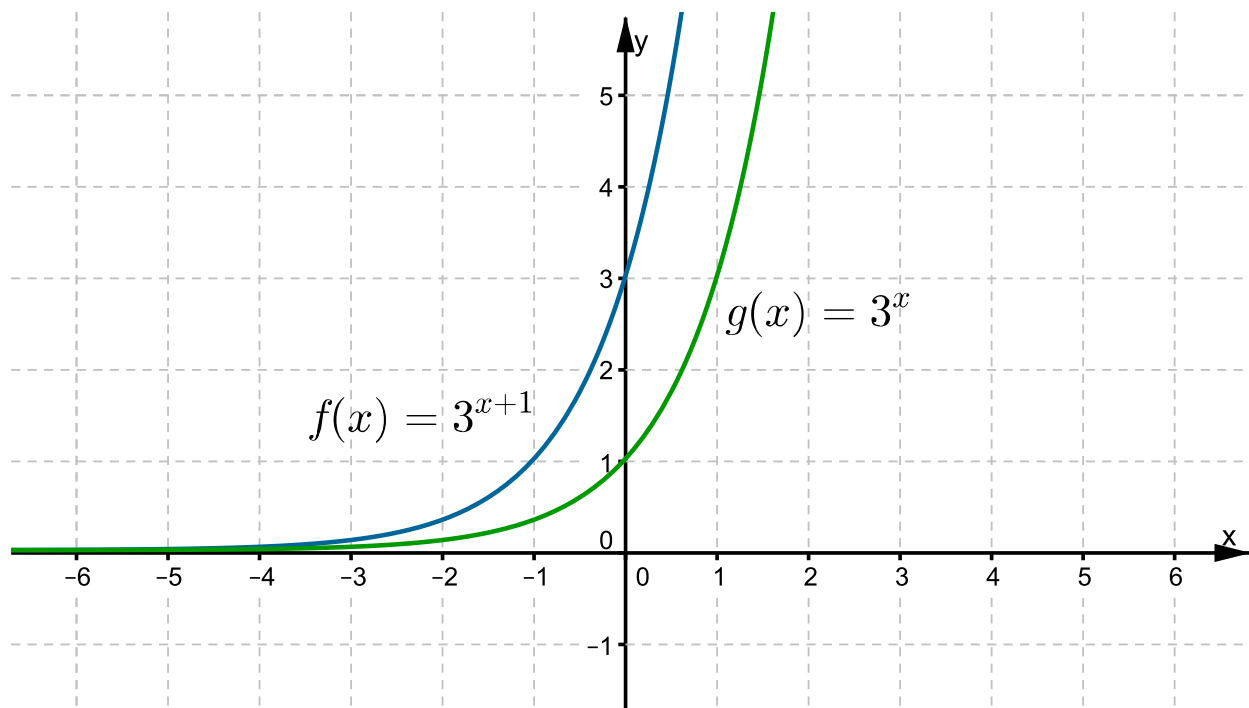
Narysujmy wykres funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

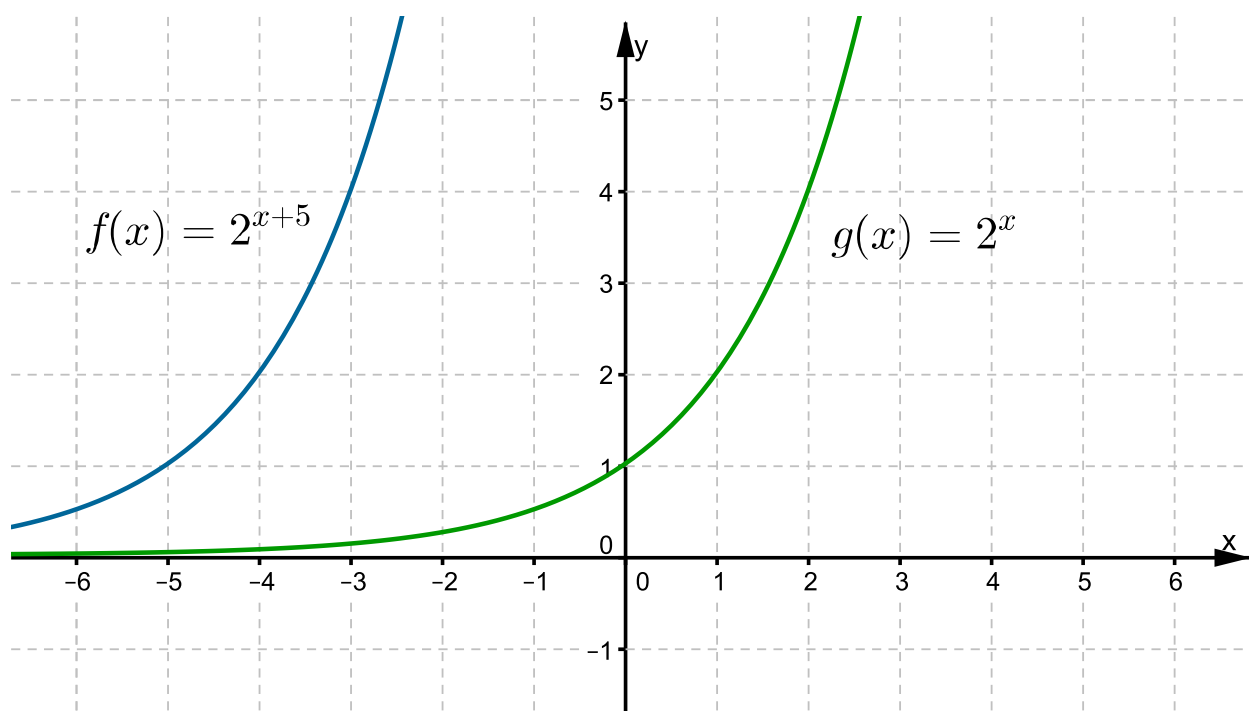
1. Funkcja wykładnicza jest różnowartościowa, czyli każda wartość $y \in (0, +\infty)$ jest przyjmowana tylko dla jednego argumentu x , dla

którego $f(x) = 81$, czyli $(\frac{1}{3})^x = 81$. Mamy $(\frac{1}{3})^x = (\frac{1}{3})^{-4}$, stąd $x = -4$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

2. Funkcja $f(x) = (\frac{1}{3})^x$ jest malejąca, czyli wartości większe od 81 funkcja f przyjmuje dla argumentów mniejszych od $x = -4$. Zatem $f(x) > 81$ dla $x \in (-\infty, -4)$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

3. Wartości co najmniej równe 81 funkcja $f(x) = (\frac{1}{3})^x$ przyjmuje dla argumentów mniejszych lub równych -4 . Zatem $f(x) \geq 81$ dla $x \in (-\infty, -4]$.

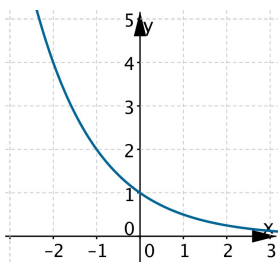
Funkcja wykładnicza i jej własności.

Przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej.

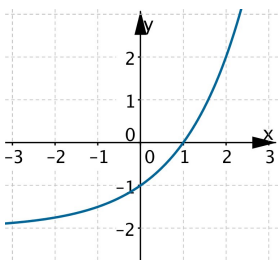
Zadania

Ćwiczenie 1

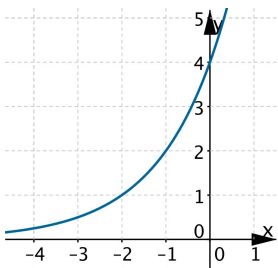
Połącz wykres z odpowiednim wzorem.



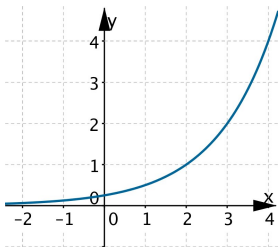
$$f(x) = 2^{-x}$$



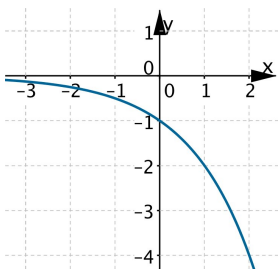
$$f(x) = 2^{x-2}$$



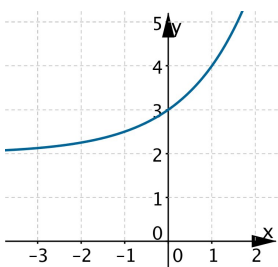
$$f(x) = 2^x + 2$$



$$f(x) = -2^x$$



$$f(x) = 2^{x+2}$$



$$f(x) = 2^x - 2$$

Ćwiczenie 2

Dana jest funkcja wykładnicza $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Przeciągnij i upuść.

$x = -1$

$x = 2$

$x = -2$

$x = -5$

$x = \frac{1}{2}$

$x = -\frac{1}{2}$

32

2

$-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{16}$

$-\frac{1}{4}$

4

$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{32}$

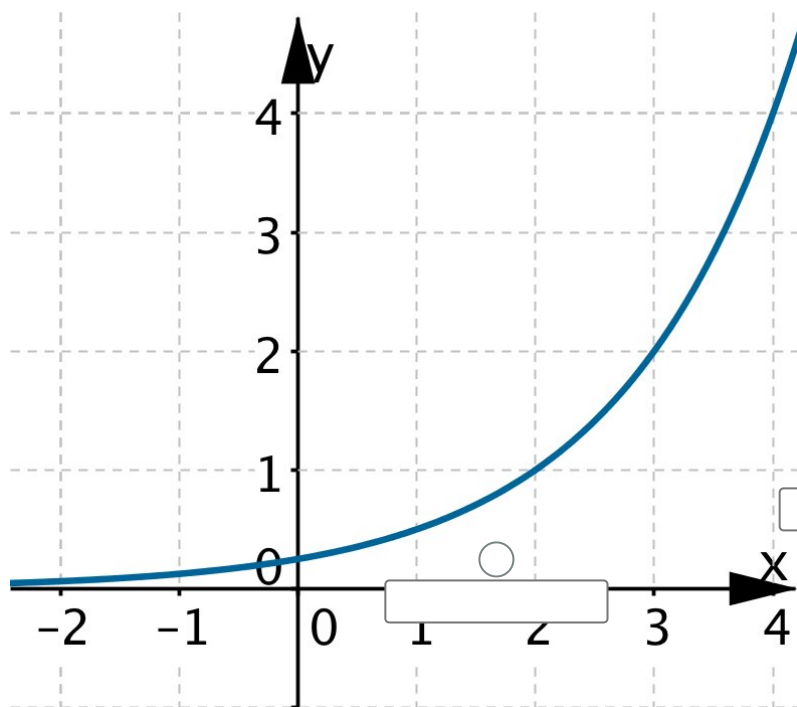
$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sqrt{2}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3

Rozważmy funkcję wykładniczą $f(x) = 2^{x-2}$. Przeciągnij i upuść.



$(2, f(2))$

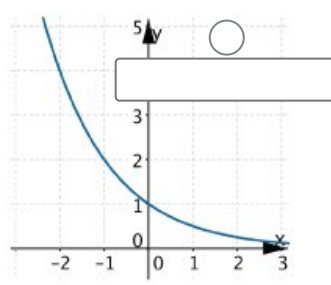
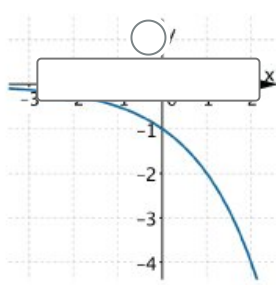
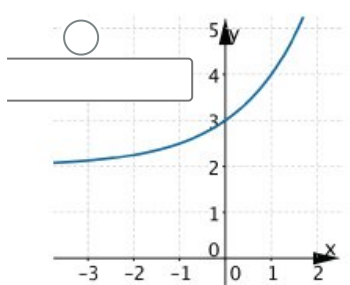
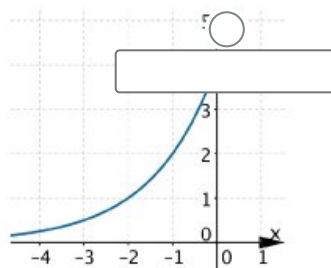
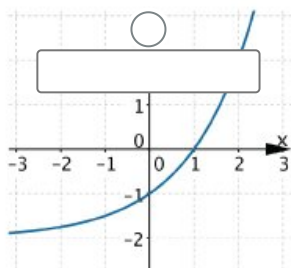
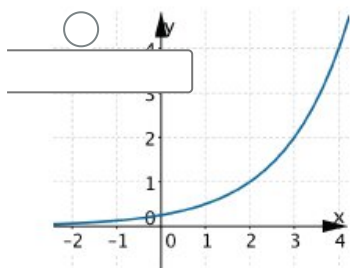
$(0, f(0))$

$(3, f(3))$

$(4, f(4))$

Ćwiczenie 4

Dopasuj wzór funkcji wykładniczej do wykresu.



Ćwiczenie 5

Na wykresie funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ leży punkt o współrzędnych

☐ $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$

☐ $(1, 0)$

☐ $(1, 3)$

☐ $(-2, 9)$

Ćwiczenie 6

Przeciągnij i upuść.

$2^5 \cdot 2^4 =$

$2^5 \cdot 2^6 =$

$\frac{2^5}{2^6} =$

$(2^2)^5 =$

$(2^5)^3 =$

$2^4 \cdot 3^4 =$

$2^4 \cdot \sqrt{2} =$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7

Przeciągnij i upuść.

$\sqrt{2} =$

$\frac{1}{\sqrt{2}} =$

$\frac{1}{3} =$

$\sqrt[3]{3^4} =$

$\sqrt[3]{5^7} =$

$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} =$

$\frac{1}{\sqrt[5]{4^3}} =$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8

Punkt $A = (-1, 3)$ leży na wykresie funkcji

☐ $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

☐ $f(x) = 9^x$

☐ $f(x) = 3^x$

☐ $f(x) = \left(\sqrt{3}\right)^x$

Ćwiczenie 9

Wskaż wzór funkcji rosnącej.

☐ $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

☐ $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$

☐ $f(x) = -3^x$

☐ $f(x) = 3^{-x}$

Ćwiczenie 10

Zbiorem wartości funkcji $f(x) = (0,5)^x$ określonej dla każdego $x \in \langle -1, 2 \rangle$ jest przedział

☐ $\langle \frac{1}{2}, 4 \rangle$

☐ $\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \rangle$

☐ $\langle 2, 4 \rangle$

☐ $\langle \frac{1}{4}, 2 \rangle$

Ćwiczenie 11

Wyłącznie dodatnie wartości przyjmuje funkcja

☐ $f(x) = 3^{-x}$

☐ $f(x) = -5^x + 7$

☐ $f(x) = -2^x$

☐ $f(x) = 2^x - 3$

Ćwiczenie 12

Na wykresie funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ leży punkt $(-2, 3)$. Wówczas

☐ $a = \frac{1}{3}$

☐ $a = \sqrt{3}$

☐ $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$

☐ $a = 3$

Ćwiczenie 13

Po przesunięciu wykresu funkcji $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ o -3 wzdłuż osi Ox otrzymamy wykres funkcji określonej wzorem

☐ $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x + 3$

☐ $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{x-3}$

☐ $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}$

☐ $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x - 3$

Ćwiczenie 14

Wzór funkcji g , której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji $f(x) = \left(\frac{2\sqrt{2}}{8}\right)^x$ względem osi Oy , ma postać

☐ $g(x) = -\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^x$

☐ $g(x) = \left(2\sqrt{2}\right)^x$

☐ $g(x) = -\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^x$

☐ $g(x) = \left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right)^x$

Ćwiczenie 15

Funkcja wykładnicza $f(x) = 10^x$ nie przyjmuje wartości

☐ 50

☐ -100

☐ 10 000

☐ 1

Ćwiczenie 16

Wykres funkcji $f(x) = 3^x - 3$ przecina oś Oy w punkcie

☐ $(0, -3)$

☐ $(0, -2)$

☐ $(3, 0)$

☐ $(0, 1)$

Ćwiczenie 17

Znajdź punkt przecięcia wykresu funkcji f z osią Oy. Narysuj wykres tej funkcji.

1. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$

2. $f(x) = 3^{x+2}$

3. $f(x) = 4^x - 3$

Ćwiczenie 18

Narysuj wykres funkcji

1. $f(x) = -3^x$

2. $f(x) = -\left(\frac{2}{3}\right)^x + 1$

Ćwiczenie 19

Narysuj wykres funkcji

1. $f(x) = \frac{2^x}{8}$

2. $f(x) = 3^x + 3^x + 3^x$

3. $f(x) = 2^{x+4} + 2^{x+6} - 48 \cdot 2^x$

Ćwiczenie 20

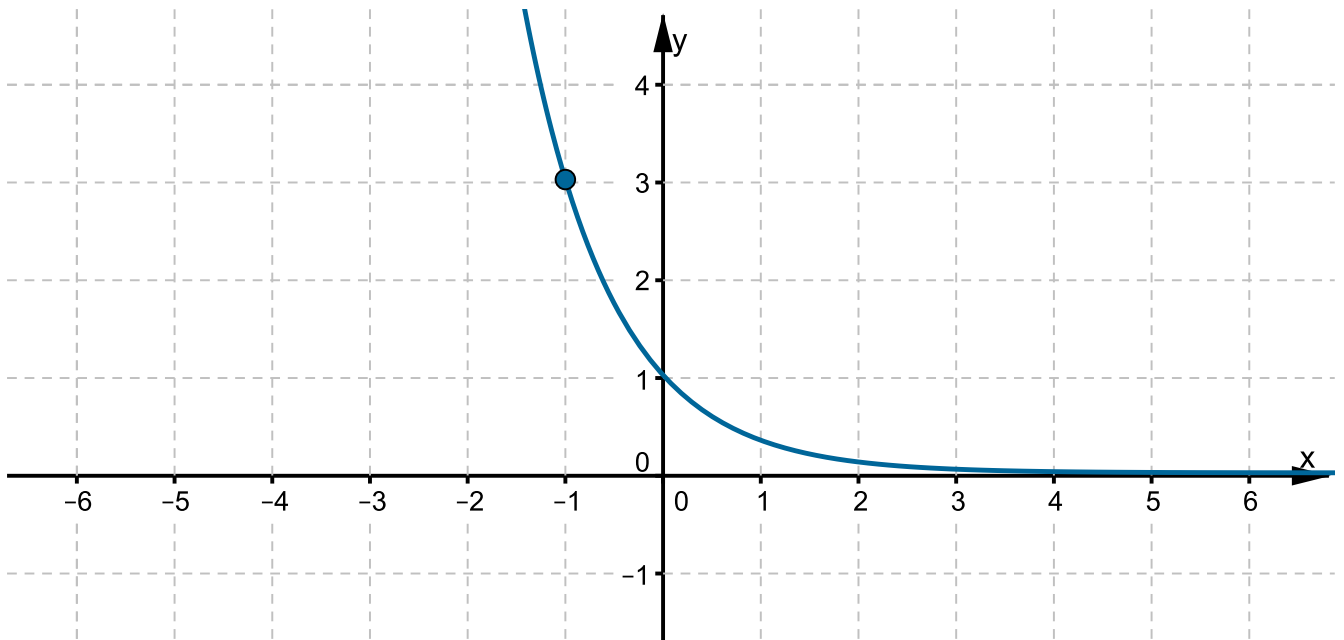
Na wykresie funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ leży punkt $A = \left(-3, \frac{1}{125}\right)$. Wyznacz wzór tej funkcji. Określ jej monotoniczność.

Ćwiczenie 21

Na wykresie funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ leży punkt $A = (-2, 9)$. Czy na wykresie tej funkcji leży również punkt $B = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$?

Ćwiczenie 22

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ oraz zaznaczony jest jeden z punktów leżących na tym wykresie. Wyznacz wzór funkcji f .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 23

Wyznacz zbiór wartości funkcji

1. $f(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^x + 7$

2. $f(x) = \left(\sqrt{3}\right)^{-x}$

3. $f(x) = -(1,5)^x - 3$

4. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot \frac{\sqrt{27}}{81} + \frac{1}{3}$

Ćwiczenie 24

Połącz wykresy funkcji z ich wzorami

1. $f(x) = (1,5)^x$

2. $f(x) = (0,7)^x$

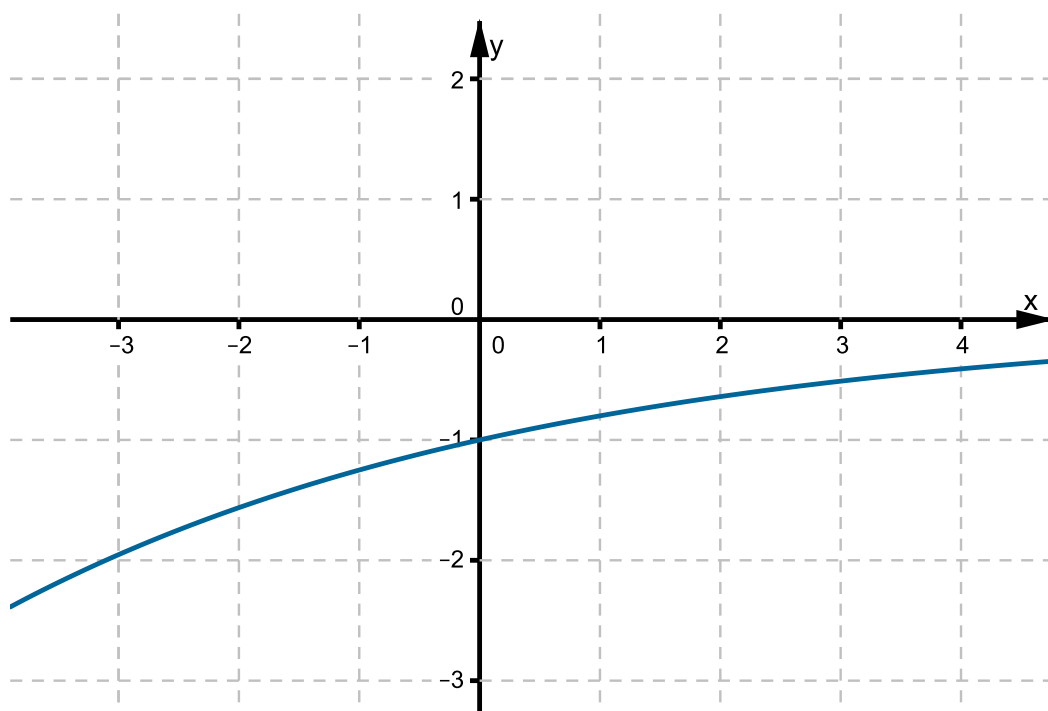
3. $f(x) = -(0,8)^x$

4. $f(x) = -2^x$

5. $f(x) = (0,5)^x - 2$

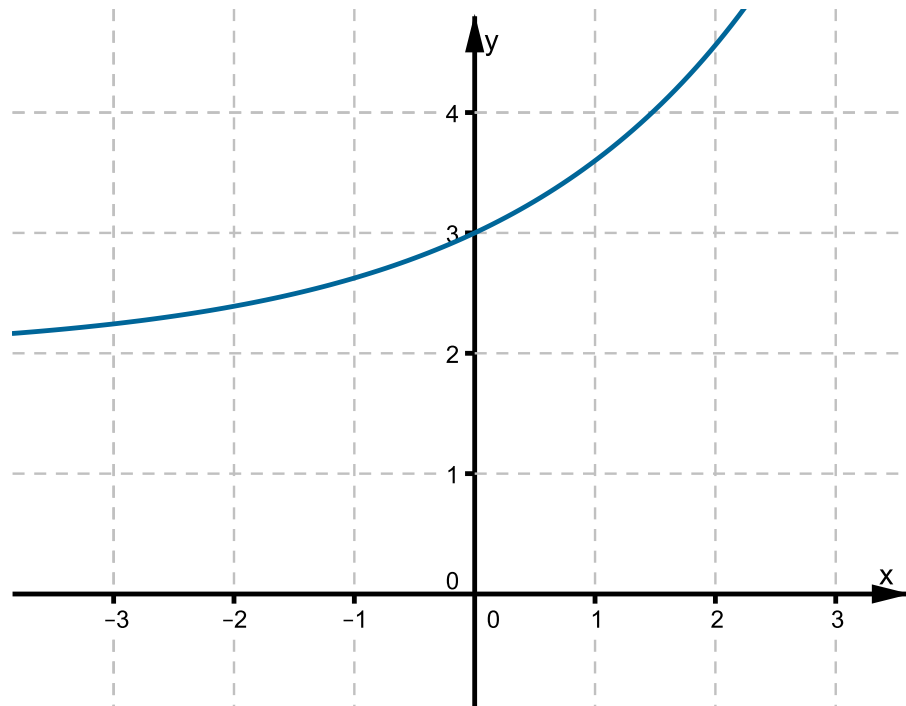
6. $f(x) = (1,6)^x + 2$

7.



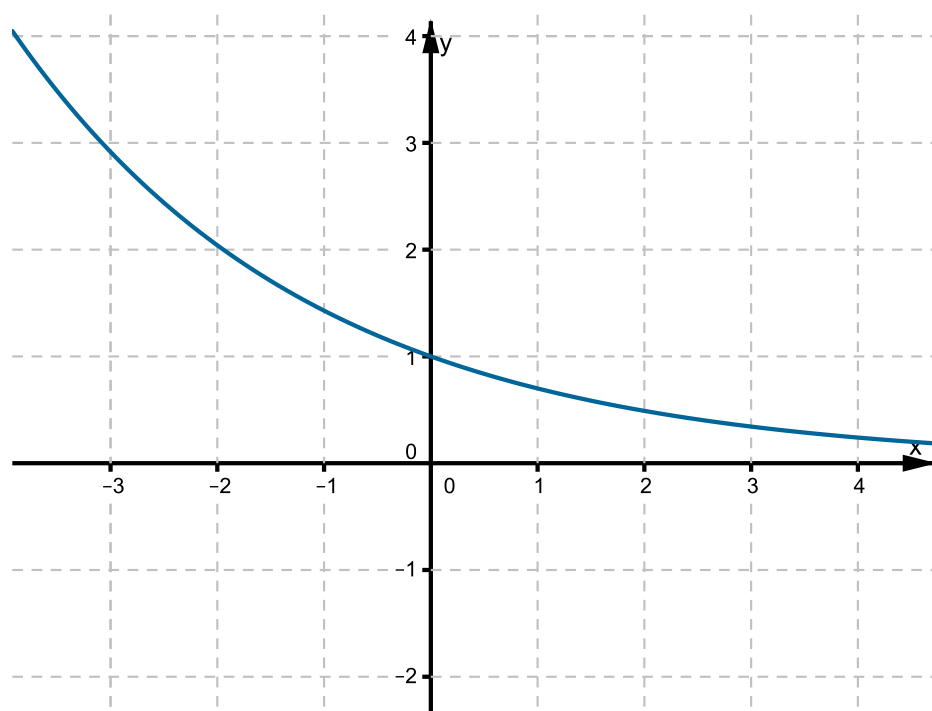
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

8.



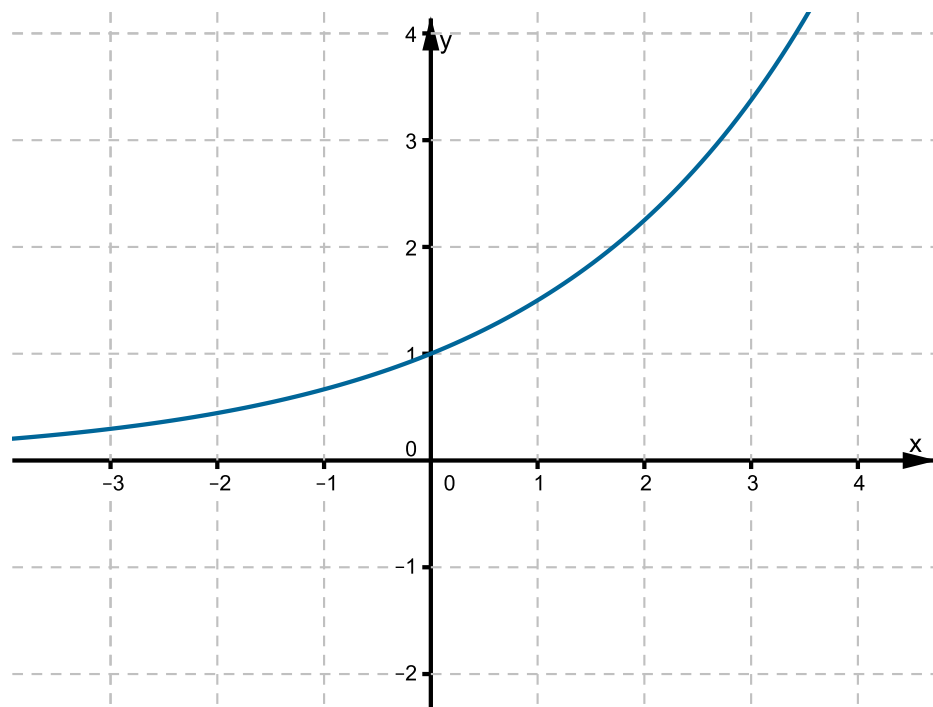
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

9.



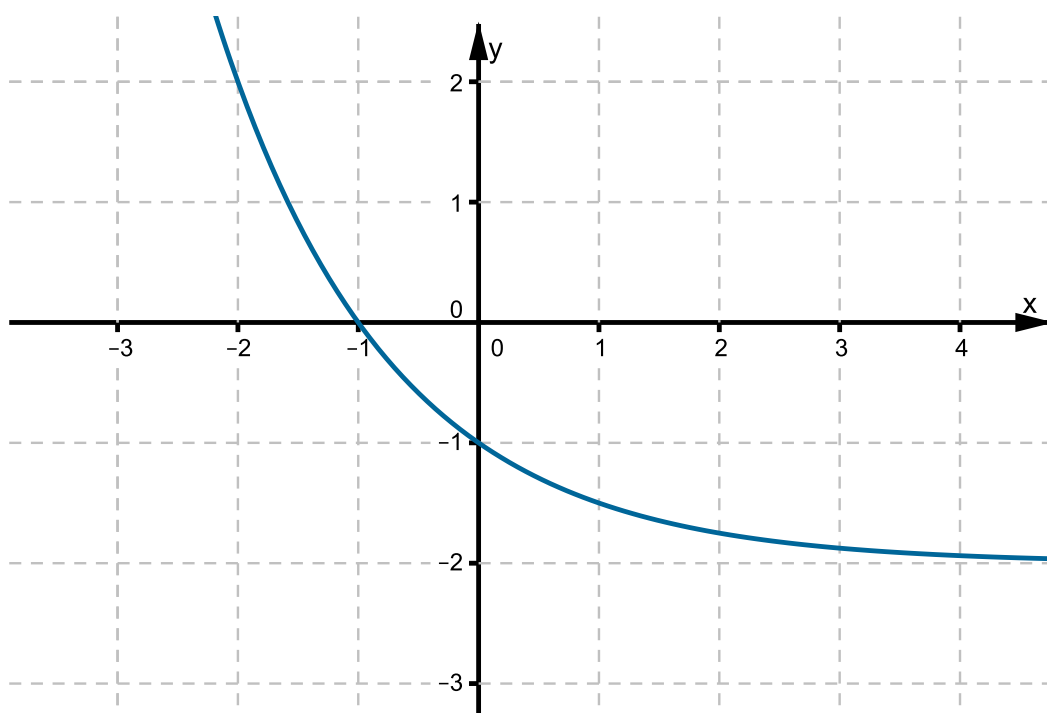
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

10.



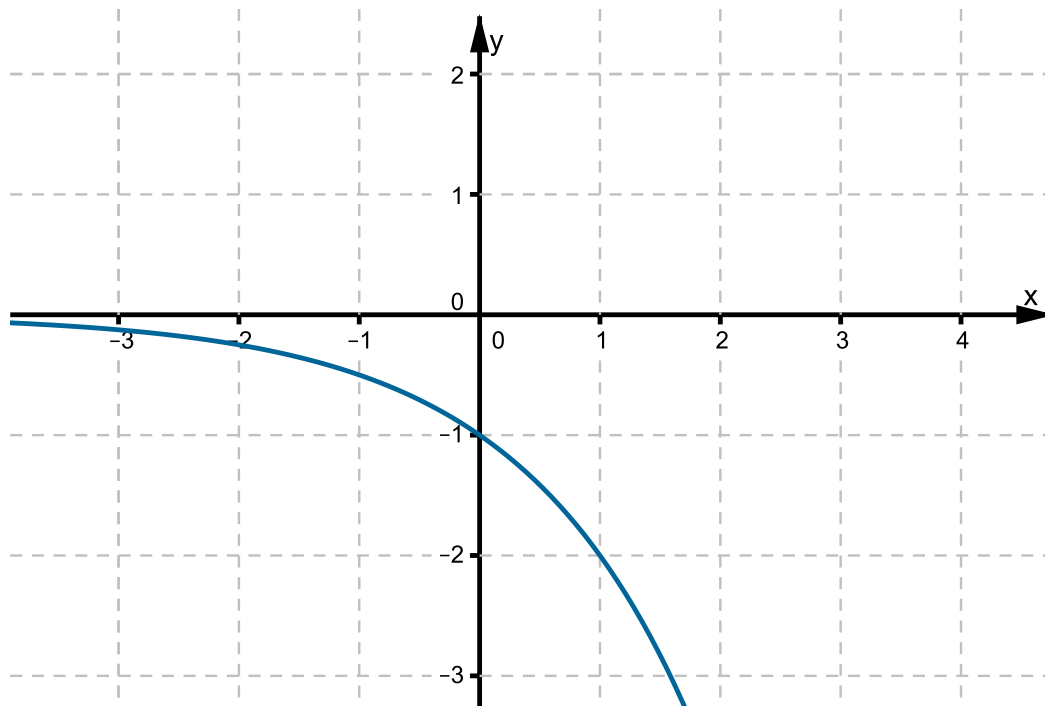
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

11.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

12.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 25

Jaka jest największa, a jaka najmniejsza wartość funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ w przedziale $\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle$?

Ćwiczenie 26

Wykres której funkcji: $f(x) = -\left(\sqrt{2}\right)^x + \sqrt{2}$, $g(x) = \left(\sqrt{5}\right)^x - \frac{5}{2}$ czy $h(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x + \sqrt{6}$ przetnie oś Oy w punkcie najdalej leżącym od początku układu współrzędnych?

Ćwiczenie 27

Dana jest funkcja $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{f(x+2)}{f(x-2)}$.

Ćwiczenie 28

Uporządkuj rosnąco liczby $(0,9)^3$, $(0,9)^{10}$, $(0,9)^\pi$, $(0,9)^{3\pi}$.

Ćwiczenie 29

Dla jakiego argumentu funkcja $f(x) = (\sqrt{3})^x$ przyjmie wartość $\frac{1}{9}$?

Ćwiczenie 30

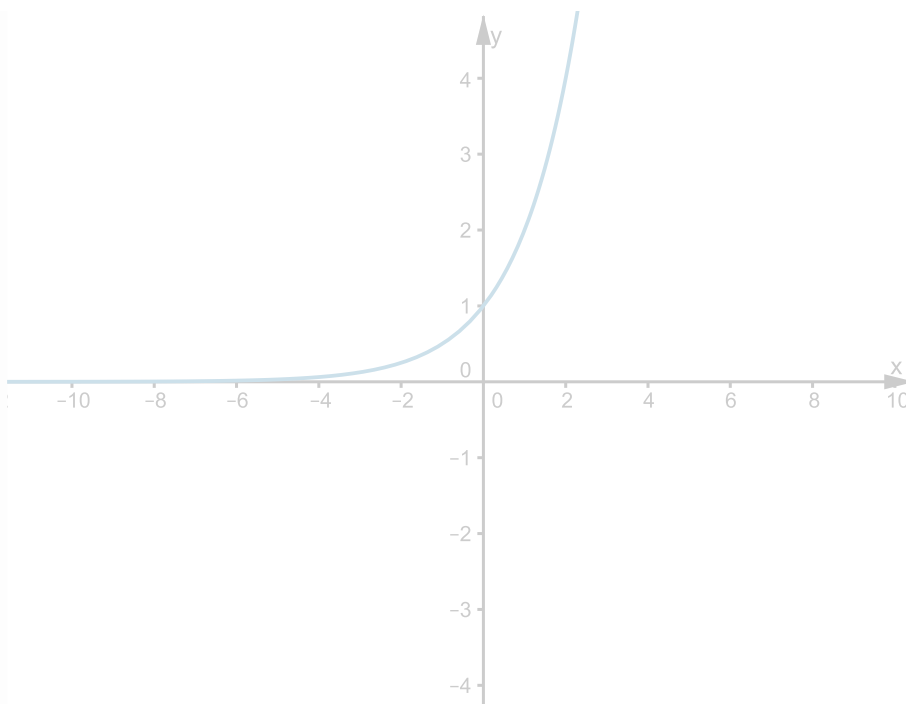
Wyznacz wszystkie argumenty, dla których funkcja $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ przyjmuje wartości mniejsze niż funkcja $g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$.

Wykres funkcji wykładniczej

Przekształcenia wykresu funkcji

$$f(x) = 2^x.$$

- ☐ symetria względem osi Ox
- ☐ symetria względem osi Oy
- ☐ przesunięcie wzdłuż osi Ox
- ☐ przesunięcie wzdłuż osi Oy



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DOgeKo121>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Funkcja wykładnicza

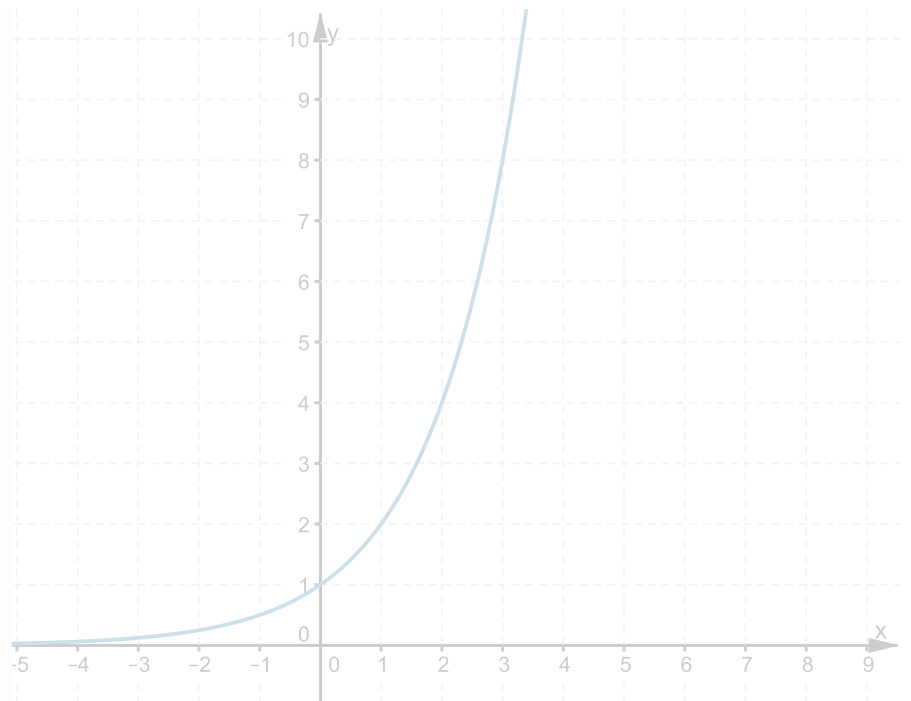
przykład 1 przykład 2 przykład 3 przykład 4

Dany jest wykres funkcji

$$f(x) = 2^x.$$

Odczytaj wartość funkcji dla argumentu 3.

$$f(3) =$$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DOgeKo121>

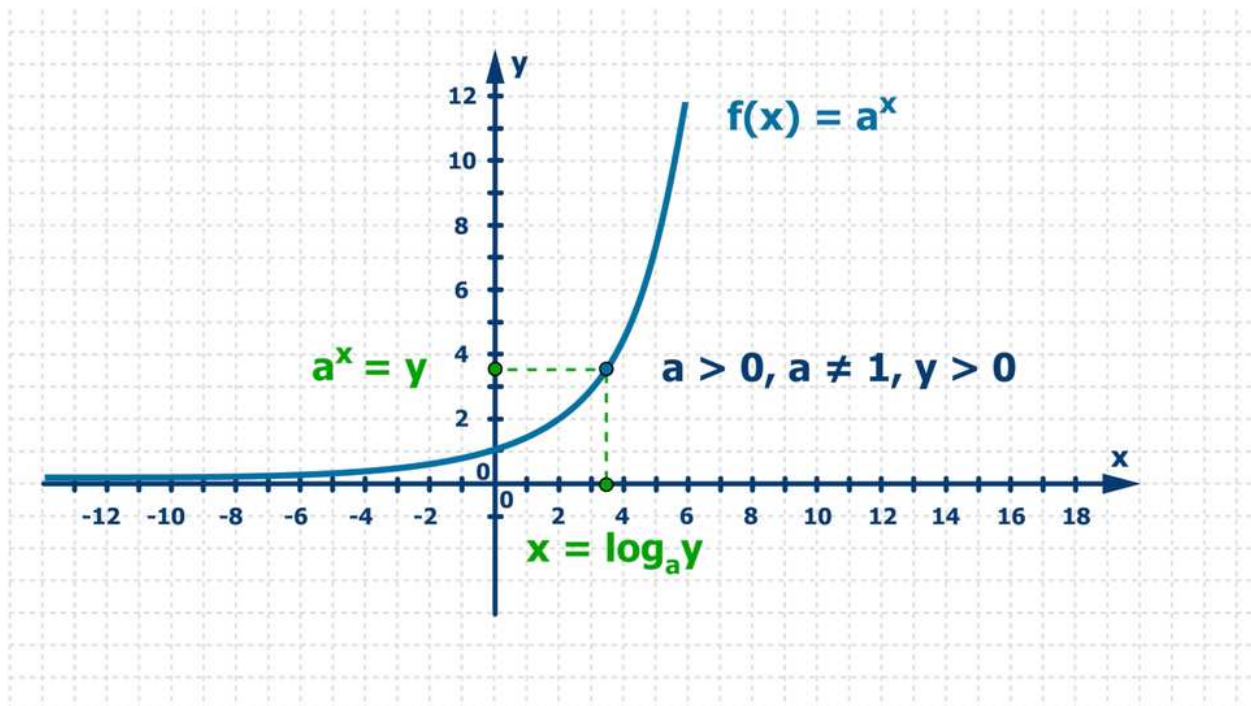
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Definicja logarytmu. Własności logarytmu

Pojęcie logarytmu

Rozpatrzmy funkcję wykładniczą $f(x) = a^x$, gdzie a jest ustaloną dodatnią liczbą rzeczywistą, różną od 1.

Jak wiemy, funkcja f jest określona dla każdej liczby rzeczywistej x , a zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $(0, +\infty)$. Ponadto dla ustalonej dodatniej wartości y istnieje dokładnie jeden argument x , taki że $a^x = y$.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

"Animacja przedstawia wykres funkcji rosnącej $f(x) = 2^x$ po potęgę x leżącej w pierwszej i drugiej ćwiartce układu współrzędnych. Zaznaczono zależności: 2 do potęgi $x=4$ gdy $x=2$

Przykład 1

Korzystając z własności funkcji wykładniczej, wyznaczmy, o ile istnieją, wszystkie argumenty, dla których

1. funkcja wykładnicza $f(x) = 2^x$ przyjmuje wartość 32
2. funkcja wykładnicza $f(x) = 3^x$ przyjmuje wartość $\frac{1}{9}$
3. funkcja wykładnicza $f(x) = 4^x$ przyjmuje wartość -16
4. funkcja wykładnicza $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ przyjmuje wartość 5
5. funkcja wykładnicza $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ przyjmuje wartość 1

Rozwiązanie.

1. Ponieważ $2^5 = 32$, więc $2^x = 32$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 5$.
2. Ponieważ $3^{-2} = \frac{1}{9}$, więc $3^x = \frac{1}{9}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = -2$.
3. Funkcja wykładnicza $f(x) = 4^x$ przyjmuje wyłącznie wartości dodatnie, zatem nie istnieje taki argument x , dla którego $4^x = -16$.
4. Ponieważ $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5$, więc $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 5$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = -1$.
5. Ponieważ $\left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1$, więc $\left(\frac{3}{4}\right)^x = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$.

Przykład 2

Argument x , dla którego funkcja wykładnicza $f(x) = 2^x$ przyjmuje wartość 9, jest rozwiązaniem równania $2^x = 9$. Z wykresu funkcji f odczytujemy, że x jest liczbą z przedziału $(3, 4)$.

Argument ten oznaczamy symbolicznie

$$x = \log_2 9$$

a zapis $\log_2 9$ czytamy „logarytm przy podstawie dwa liczby dziewięć” lub krócej „logarytm przy podstawie dwa z dziewięciu”.

Zauważmy, że z przyjętej umowy wynika równość

$$2^{\log_2 9} = 9$$

Uwaga. Liczba $\log_2 9$ nie jest wymierna. Gdybyśmy założyli przeciwnie, że istnieją takie dodatnie liczby całkowite p i q , dla których prawdziwa jest równość $\log_2 9 = \frac{p}{q}$, to prawdą byłoby również, że $2^{\frac{p}{q}} = 9$, stąd $2^p = 9^q$. Otrzymana równość jest sprzeczna, bo jej lewa strona jest liczbą parzystą (jako iloczyn p dwójek), a prawa strona jest liczbą nieparzystą (jako iloczyn q dziewiątek).

Weźmy dodatnią liczbę rzeczywistą a , różną od 1. Przyjmujemy, że argument b , dla którego funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ przyjmuje wartość c , to

$$b = \log_a c$$

Ponieważ funkcja wykładnicza f przyjmuje wyłącznie wartości dodatnie, to logarytm określamy tylko dla dodatniej liczby c .

Definicja: Logarytm

Logarytmem $\log_a c$ dodatniej liczby c przy dodatniej i różnej od 1 podstawie a nazywamy wykładnik b potęgi, do której należy podnieść a , aby otrzymać c .

$\log_a c = b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a^b = c$.

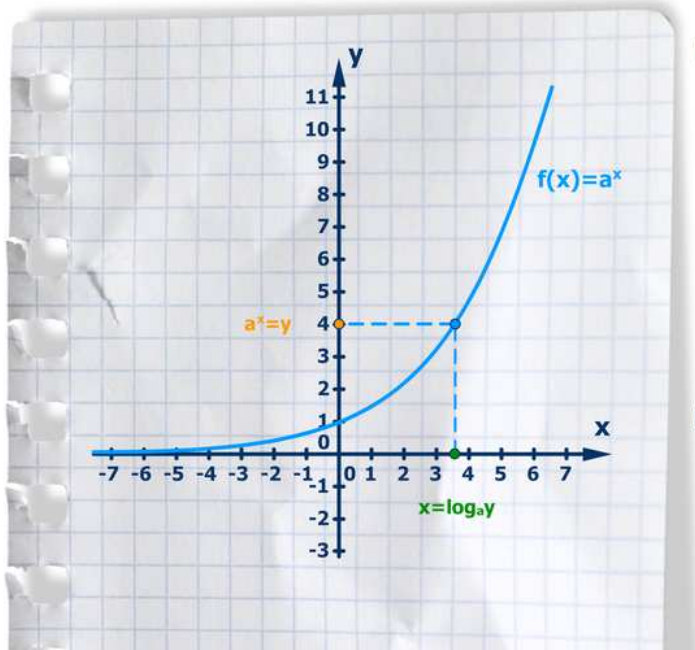
Zapamiętaj!

Z definicji wynika

$$\log_a a^c = c \text{ oraz } a^{\log_a c} = c$$

Liczbę c w zapisie $\log_a c$ nazywamy **liczbą logarytmowaną**.

Logarytm $\log_{10} x$ można też zapisać jako $\log x$ lub $\lg x$. Taki logarytm nazywamy **logarytmem dziesiętnym**.



Funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$ oraz $a \neq 1$ przyjmuje ustaloną dodatnią wartość y dla argumentu $x = \log_a y$.

DEFINICJA LOGARYTMU

Logarytmem dodatniej liczby c przy dodatniej i różnej od 1 podstawie a nazywamy wykładnik b potęgi, do której należy podnieść a , aby otrzymać c :

$\log_a c = b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a^b = c$.

Równoważnie możemy zapisać:

$$a^{\log_a c} = c.$$

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

"Animacja przedstawia funkcję wykładniczą $f(x) = 2$ do potęgi x . Korzystając z wykresu tej funkcji możemy wyznaczyć argumenty, dla których wartość funkcji jest równa: 2 do potęgi $x = 2$ gdy $x = 1$

Przykład 3

Każdą z podanych liczb zapiszemy bez użycia logarytmu.

1. $\log_2 4$
2. $\log_3 81$
3. $\log 1000000$
4. $\log_{123} 1$
5. $\log_{17} 17$

Bezpośrednio z definicji logarytmu wynika, że $\log_a a^c = c$. Korzystając z tego spostrzeżenia, mamy:

1. $\log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$
2. $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$
3. $\log 1000000 = \log 10^6 = 6$
4. $\log_{123} 1 = \log_{123} 123^0 = 0$
5. $\log_{17} 17 = \log_{17} 17^1 = 1$

Zauważmy, że dla każdej dodatniej i różnej od 1 liczby rzeczywistej a

$$\log_a 1 = \log_a a^0 = 0$$

oraz

$$\log_a a = \log_a a^1 = 1$$

Przykład 4

Uzasadnimy, że każda z podanych liczb jest ujemną liczbą całkowitą.

1. $\log_6 \frac{1}{6}$
2. $\log_2 \frac{1}{8}$
3. $\log_3 \frac{1}{9}$
4. $\log_5 0,2$
5. $\log 0,00001$
6. Ponieważ $\frac{1}{6} = 6^{-1}$, więc $\log_6 \frac{1}{6} = \log_6 6^{-1} = -1$.
7. Ponieważ $\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}$, więc $\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3$.
8. Ponieważ $\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2}$, więc $\log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2$.
9. Ponieważ $0,2 = \frac{1}{5} = 5^{-1}$, więc $\log_5 0,2 = \log_5 5^{-1} = -1$.
10. Ponieważ $0,00001 = \frac{1}{100\,000} = \frac{1}{10^5} = 10^{-5}$, więc $\log 0,00001 = \log 10^{-5} = -5$.

Przykład 5

Zapiszemy liczby bez użycia logarytmu.

1. $\log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{49}$
2. $\log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27}$
3. $\log_{\frac{4}{5}} \frac{5}{4}$
4. $\log_{\frac{5}{2}} 0,16$
5. Ponieważ $\frac{1}{49} = \left(\frac{1}{7}\right)^2$, więc $\log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{49} = \log_{\frac{1}{7}} \left(\frac{1}{7}\right)^2 = 2$.
6. Ponieważ $\frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$, więc $\log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27} = \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 3$.
7. Ponieważ $\left(\frac{5}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{5}$, więc $\log_{\frac{4}{5}} \frac{5}{4} = \log_{\frac{4}{5}} \left(\frac{4}{5}\right)^{-1} = -1$.
8. Ponieważ $0,16 = \frac{16}{100} = \frac{4}{25} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^{-2}$, więc $\log_{\frac{5}{2}} 0,16 = \log_{\frac{5}{2}} \left(\frac{5}{2}\right)^{-2} = -2$.

Przykład 6

Każdą z podanych liczb zapiszemy bez użycia logarytmu.

1. $\log_2 \sqrt{2}$
2. $\log \sqrt[3]{10}$
3. $\log_9 3$
4. $\log_8 2$
5. Ponieważ $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, więc $\log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

6. Ponieważ $\sqrt[3]{10} = 10^{\frac{1}{3}}$, więc $\log \sqrt[3]{10} = \log 10^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$.

7. Ponieważ $9 = 3^2$, więc $3 = 9^{\frac{1}{2}}$, co oznacza, że $\log_9 3 = \log_9 9^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

8. Ponieważ $2^3 = 8$, więc $2 = 8^{\frac{1}{3}}$, co oznacza, że $\log_8 2 = \log_8 8^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$.

Własności logarytmu

Przykład 7

Rozwiążemy równanie

1. $3^x = 5$

2. $2^x = \frac{9}{11}$

3. $7^x = \frac{1}{4}$

4. $10^x = 2$

Korzystamy z definicji logarytmu.

1. Argument, dla którego funkcja wykładnicza $f(x) = 3^x$ przyjmuje wartość 5, to $x = \log_3 5$.

2. Argument, dla którego funkcja wykładnicza $f(x) = 2^x$ przyjmuje wartość $\frac{9}{11}$, to $x = \log_2 \frac{9}{11}$.

3. Argument, dla którego funkcja wykładnicza $f(x) = 7^x$ przyjmuje wartość $\frac{1}{4}$, to $x = \log_7 \frac{1}{4}$.

4. Argument, dla którego funkcja wykładnicza $f(x) = 10^x$ przyjmuje wartość 2, to $x = \log 2$.

Przykład 8

Każdą z podanych liczb zapiszemy bez użycia logarytmu.

1. $2^{\log_2 3}$

2. $7^{\log_7 11}$

3. $1000^{\log 2}$

4. $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_5 6}$

W definicji logarytmu zapisaliśmy, że dla dodatniej liczby c przy dodatniej i różnej od 1 podstawie a prawdziwa jest równość $a^{\log_a c} = c$. Wobec tego

1. $2^{\log_2 3} = 3$

2. $7^{\log_7 11} = 11$

3. $1000^{\log 2} = (10^3)^{\log 2} = 10^{3 \log 2} = (10^{\log 2})^3 = 2^3 = 8$

4. $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_5 6} = (5^{-1})^{\log_5 6} = 5^{-\log_5 6} = (5^{\log_5 6})^{-1} = 6^{-1} = \frac{1}{6}$

Przykład 9

Wyznamy wszystkie liczby x , dla których określone jest wyrażenie

1. $\log_3(x - 5)$
2. $\log_2(2x + 7)$
3. $\log_{\frac{1}{5}}(3x - x^2)$
4. $\log \frac{x^2+2}{x-2}$

Logarytm, którego podstawa jest liczbą dodatnią i różną od 1, jest określony wyłącznie dla argumentów dodatnich. Wobec tego

1. wyrażenie $\log_3(x - 5)$ jest określone tylko dla tych x , które spełniają nierówność $x - 5 > 0$, czyli dla $x > 5$.
2. wyrażenie $\log_2(2x + 7)$ jest określone tylko dla tych x , które spełniają nierówność $2x + 7 > 0$, czyli dla $x > -\frac{7}{2}$.
3. wyrażenie $\log_{\frac{1}{5}}(3x - x^2)$ jest określone tylko dla tych x , które spełniają nierówność $3x - x^2 > 0$.

Zatem

$x^2 - 3x < 0$ $x(x - 3) < 0$ Po rozwiązaniu otrzymanej nierówności kwadratowej stwierdzamy, że $x \in (0, 3)$.

4. wyrażenie $\log \frac{x^2+2}{x-2}$ jest określone tylko dla tych x , które spełniają nierówność $\frac{x^2+2}{x-2} > 0$. Ponieważ dla każdej liczby rzeczywistej wyrażenie $x^2 + 2$ jest dodatnie, więc nierówność $\frac{x^2+2}{x-2} > 0$ jest równoważna nierówności $x - 2 > 0$. Zatem wyrażenie $\log \frac{x^2+2}{x-2}$ jest określone wyłącznie dla $x > 2$.

Przykład 10

Wyznamy wszystkie liczby x , dla których wyrażenie $\log_x 9$ ma wartość 2.

Podstawa x logarytmu zapisanego po lewej stronie równania $\log_x 9 = 2$ musi być liczbą dodatnią i różną od 1.

Korzystając z definicji logarytmu, stwierdzamy, że $\log_x 9 = 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x^2 = 9$.

Wobec tego $x = 3$ lub $x = -3$.

Tylko pierwsza z tych liczb spełnia warunki określone dla podstawy logarytmu, co oznacza, że jedyną liczbą, dla której wyrażenie $\log_x 9$ ma wartość 2, jest $x = 3$.

Ćwiczenie 1

Dane są liczby $a = \log_2 8$, $b = \log_3 9$, $c = \log 10$. Wówczas

☐ $b > c$

☐ $a = b + c$

☐ $a + b + c > 10$

☐ $a < b$

Ćwiczenie 2

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐ Liczba $\log 1\,000\,000$ jest 3 razy większa od liczby $\log 100$.

☐ Liczby $\log_2 \frac{1}{16}$ i $\log_{\frac{1}{2}} 16$ są równe.

☐ Liczba $\log_5 125$ jest o 100 większa od liczby $\log_5 25$.

☐ Suma liczb $\log_3 9$ i $\log_3 \frac{1}{9}$ jest równa 0.

Ćwiczenie 3

Które z podanych wyrażeń jest określone dla każdej dodatniej liczby całkowitej x ?

☐ $\log(x^2 - x)$

☐ $\log_2(3x - 1)$

☐ $\log_{\frac{5}{3}}(100 - x)$

☐ $\log_{\frac{1}{2}}(x + 2)$

Ćwiczenie 4

Funkcja wykładnicza określona jest wzorem $f(x) = 5^x$. Wówczas

☐ $f(x) = 3$ dla $x = \log_5 5^3$

☐ $f(x) = 7$ dla $x = \log_5 7$

☐ $f(x) = 10$ dla $x = \log_5 2^5$

☐ $f(x) = 2$ dla $x = \log_2 5$

Ćwiczenie 5

Które z podanych liczb są całkowite?

☐ $\log_5 20$

☐ $9^{\log_3 2}$

☐ $10^{\log \frac{1}{10}}$

☐ $\log_2 0,125$

Ćwiczenie 6

Funkcja wykładnicza określona wzorem $f(x) = 4^x$ przyjmuje wartość 12 dla argumentu

☐ $x = \log_4 3$

☐ $x = \log_{12} 4$

☐ $x = 3$

☐ $x = \log_4 12$

Ćwiczenie 7

Suma $\log 1\,000 + \log_7 1$ jest równa

☐ 3

☐ 4

☐ 101

☐ 7

Ćwiczenie 8

Liczba t jest równa $\log_2 6$. Wtedy

☐ $t = 2^6$

☐ $t = 6^2$

☐ $2^t = 6$

☐ $t = 3$

Ćwiczenie 9

Różnica $\log_{\frac{1}{5}} 25 - \log_3 \frac{1}{81}$ jest równa

☐ 6

☐ -6

☐ -2

☐ 2

Ćwiczenie 10

Wyrażenie $\log_{\frac{1}{3}}(3 - x)$ jest określone dla wszystkich x , które spełniają warunek

☐ $x < -3$

☐ $x > -3$

☐ $x < 3$

☐ $x > 3$

Ćwiczenie 11

Dane są liczby $a = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$, $b = \log_{\frac{1}{2}} 4$, $c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$, $d = \log_{\frac{1}{2}} 16$. Największą z nich jest

☐ c

☐ d

☐ b

☐ a

Ćwiczenie 12

O liczbie x wiadomo, że $\log_9 x = \frac{1}{2}$. Wtedy

☐ $x = 4,5$

☐ $x = \frac{1}{512}$

☐ $x = \frac{2}{9}$

☐ $x = 3$

Ćwiczenie 13

Liczba $\log_{3^2} 3^8$ jest równa

☐ 3^4

☐ 3^6

☐ 6

☐ 4

Ćwiczenie 14

Zapisz każdą z podanych liczb, nie używając logarytmu.

1. $\log_6 36$

2. $\log_7 343$

3. $\log_{12} 1$

4. $\log_{27} 27$

Ćwiczenie 15

Rozwiąż równanie.

1. $2^x = 5$

2. $3^x = 10$

3. $7^x = 2$

4. $10^x = 99$

Ćwiczenie 16

Zapisz podaną liczbę bez użycia logarytmu.

1. $3^{\log_3 5}$

2. $2^{\log_2 11}$

3. $5^{\log_5 4}$

4. $10^{\log 7}$

Ćwiczenie 17

Uzasadnij, że podana liczba jest całkowita.

1. $\log_8 0,125$

2. $\log_4 \frac{1}{64}$

3. $\log_3 \frac{1}{243}$

4. $\log_2 \frac{1}{128}$

Ćwiczenie 18

Zapisz podaną liczbę bez użycia logarytmu.

1. $\log_{\frac{1}{5}} 5$

2. $\log_{\frac{1}{9}} 81$

3. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{1024}$

4. $\log_{\frac{3}{2}} \frac{2}{3}$

Ćwiczenie 19

Oblicz i zapisz wynik bez użycia logarytmu.

1. $\log_4 256 - \log 1000$

2. $17\log_{17} \frac{1}{17} - 32\log_2 \frac{1}{32}$

Ćwiczenie 20

Oblicz i zapisz wynik bez użycia logarytmu.

1. $9^{\log_3 8}$

2. $100^{\log 11}$

Ćwiczenie 21

Wyznacz wszystkie liczby x , dla których określone jest wyrażenie.

1. $\log(7 - 4x)$

2. $\log_2 \frac{1}{x+3}$

3. $\log_3(x^2 - 4)$

4. $\log_x(2 - x)$

Ćwiczenie 22

Wyznacz wszystkie liczby x , dla których wyrażenie $\log_x \frac{x-3}{10}$ ma wartość -1 .

Ćwiczenie 23

Wykaż, że $5\log_{16} 4 + 7\log_{25} 5 = 6$.

Ćwiczenie 24

Wykaż, że $4^{1+\log_2 5} = 100$.

Ćwiczenie 25

Wykaż, że $\log_5 \sqrt{5} + \log_6 \sqrt[3]{6} + \log_7 \sqrt[4]{7} = 1\frac{1}{12}$.

Ćwiczenie 26

Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $\log_3 a = \log_5 b = \log_7 c = 4$. Wykaż, że $\sqrt{abc} = 11\,025$.

Ćwiczenie 27

Dane są liczby $a = \log_2 3$ oraz $b = \log_4 9$. Wykaż, że liczby a i b są równe.

Ćwiczenie 28

Dane są liczby $a = \log_5 7$, $b = \log 7$ oraz $c = \log 5$. Wykaż, że $c \cdot a = b$.

Ćwiczenie 29

Rozstrzygnij, czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite p i q , dla których zachodzi równość $\log_3 5 = \frac{p}{q}$.

Działania na logarytmach. Przykłady

Logarytm iloczynu

Przykład 1

Wykażemy, że

$$\log_8 2 + \log_8 32 = 2$$

Oznaczmy $c = \log_8 2$ oraz $d = \log_8 32$. Korzystając z definicji logarytmu, otrzymujemy $8^c = 2$ oraz $8^d = 32$. Zatem

$$\log_8 (8^c \cdot 8^d) = \log_8 (2 \cdot 32) = \log_8 64 = \log_8 8^2 = 2$$

Równocześnie

$$\log_8 (8^c \cdot 8^d) = \log_8 8^{c+d} = c + d$$

Zachodzi więc równość

$$c + d = 2$$

czyli stosując przyjęte oznaczenia

$$\log_8 2 + \log_8 32 = 2$$

W ten sposób dowód został zakończony.

Twierdzenie: Logarytm iloczynu

Jeżeli liczba a jest dodatnia i różna od 1, to dla dowolnych liczb dodatnich x i y

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Dowód

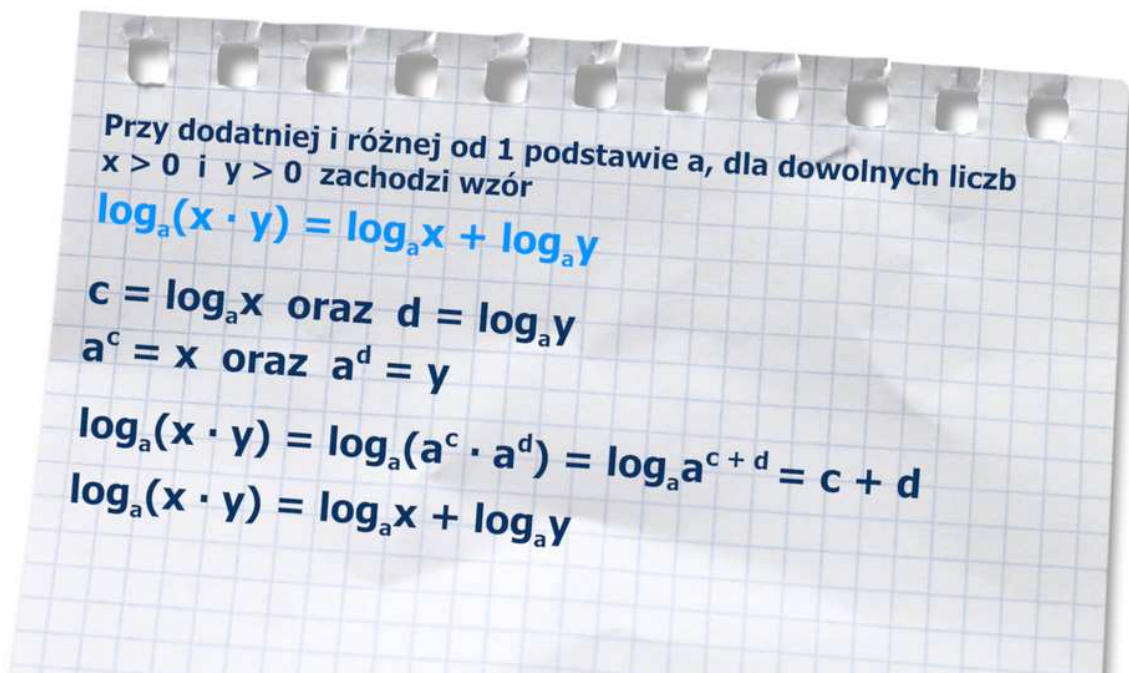
Oznaczmy $c = \log_a x$ oraz $d = \log_a y$. Korzystając z definicji logarytmu, otrzymujemy $a^c = x$ oraz $a^d = y$. Zatem

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a (a^c \cdot a^d) = \log_a a^{c+d} = c + d$$

Stosując przyjęte oznaczenia, mamy

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

To kończy dowód.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Przykład 2

Wykażemy, że

1. $\log_9 3 + \log_9 243 = 3$
2. $\log_{125} \frac{1}{5} + \log_{125} 625 = 1$
3. $\log_{12} 9 + \log_{12} 16 = 2$
4. $\log 2 + \log 25 + \log 0,002 = -1$

Rozwiązanie

1. Korzystamy z twierdzenia o logarytmie iloczynu.
2. $\log_9 3 + \log_9 243 = \log_9 (3 \cdot 243) = \log_9 729 = \log_9 9^3 = 3$
3. $\log_{125} \frac{1}{5} + \log_{125} 625 = \log_{125} \left(\frac{1}{5} \cdot 625 \right) = \log_{125} 125 = 1$
4. $\log_{12} 9 + \log_{12} 16 = \log_{12} (9 \cdot 16) = \log_{12} 144 = \log_{12} 12^2 = 2$
5. Ponieważ $\log 2 + \log 25 = \log(2 \cdot 25) = \log 50$, więc
 $\log 2 + \log 25 + \log 0,002 = \log 50 + \log \frac{1}{500} = \log \left(50 \cdot \frac{1}{500} \right) = \log \frac{1}{10} = \log 10^{-1} = -1$

Logarytm ilorazu

Przykład 3

Wykażemy, że $\log_3 135 - \log_3 5 = 3$.

Oznaczmy $c = \log_3 135$ oraz $d = \log_3 5$. Korzystając z definicji logarytmu, otrzymujemy

$$3^c = 135$$

$$3^d = 5$$

Zatem

$$\log_3 (3^c : 3^d) = \log_3 (135 : 5) = \log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$$

Równocześnie

$$\log_3 (3^c : 3^d) = \log_3 3^{c-d} = c - d$$

Zachodzi więc równość

$$c - d = 3$$

czyli stosując przyjęte oznaczenia

$$\log_3 135 - \log_3 5 = 3$$

W ten sposób dowód został zakończony.

Twierdzenie: Logarytm ilorazu

Przy dodatniej i różnej od 1 podstawie a dla dowolnych liczb $x > 0$ i $y > 0$ prawdziwa jest równość

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Dowód

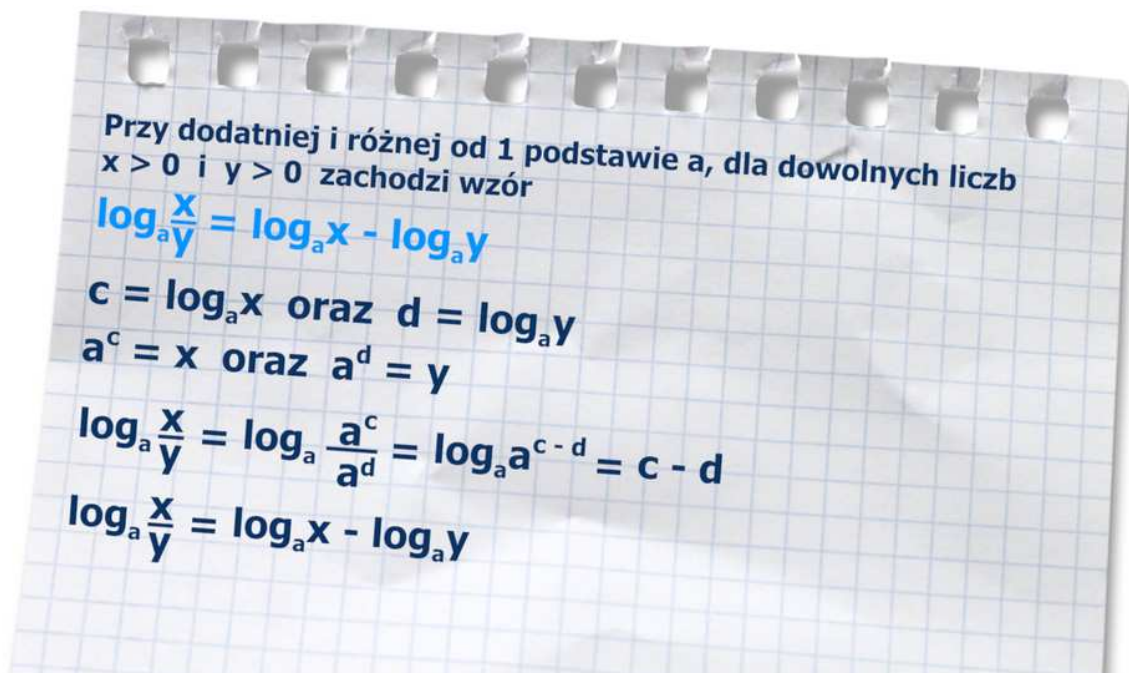
Oznaczmy $c = \log_a x$ oraz $d = \log_a y$. Korzystając z definicji logarytmu, otrzymujemy $a^c = x$ oraz $a^d = y$. Zatem

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a \frac{a^c}{a^d} = \log_a a^{c-d} = c - d$$

czyli stosując przyjęte oznaczenia

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

To kończy dowód.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Przykład 4

Wykażemy, że

1. $\log_{16} 2 - \log_{16} 32 = -1$
2. $\log_{49} 343 - \log_{49} \frac{1}{7} = 2$
3. $\log_4 192 - \log_4 3 = 3$
4. $\log 1750 - \log \frac{7}{40} = 4$

Rozwiązanie

Korzystamy z twierdzenia o logarytmie ilorazu.

1. $\log_{16} 2 - \log_{16} 32 = \log_{16} \frac{2}{32} = \log_{16} \frac{1}{16} = \log_{16} 16^{-1} = -1$
2. $\log_{49} 343 - \log_{49} \frac{1}{7} = \log_{49} \frac{343}{\frac{1}{7}} = \log_{49} (343 \cdot 7) = \log_{49} 2401 = \log_{49} 49^2 = 2$
3. $\log_4 192 - \log_4 3 = \log_4 \frac{192}{3} = \log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$
4. $\log 1750 - \log \frac{7}{40} = \log \frac{1750}{\frac{7}{40}} = \log (1750 \cdot \frac{40}{7}) = \log 10\,000 = \log 10^4 = 4$

Logarytm potęgi

Przykład 5

Wykażemy, że $\log_5 8 = 3 \log_5 2$.

Oznaczmy $c = \log_5 2$. Korzystając z definicji logarytmu, otrzymujemy $5^c = 2$. Zatem

$$\log_5 8 = \log_5 2^3 = \log_5 (5^c)^3 = \log_5 5^{3 \cdot c} = 3 \cdot c = 3 \log_5 2$$

W ten sposób dowód został zakończony.

Twierdzenie: Logarytm potęgi

Przy dodatniej i różnej od 1 podstawie a dla dowolnej liczby $x > 0$ prawdziwa jest równość

$$\log_a x^r = r \cdot \log_a x$$

Dowód

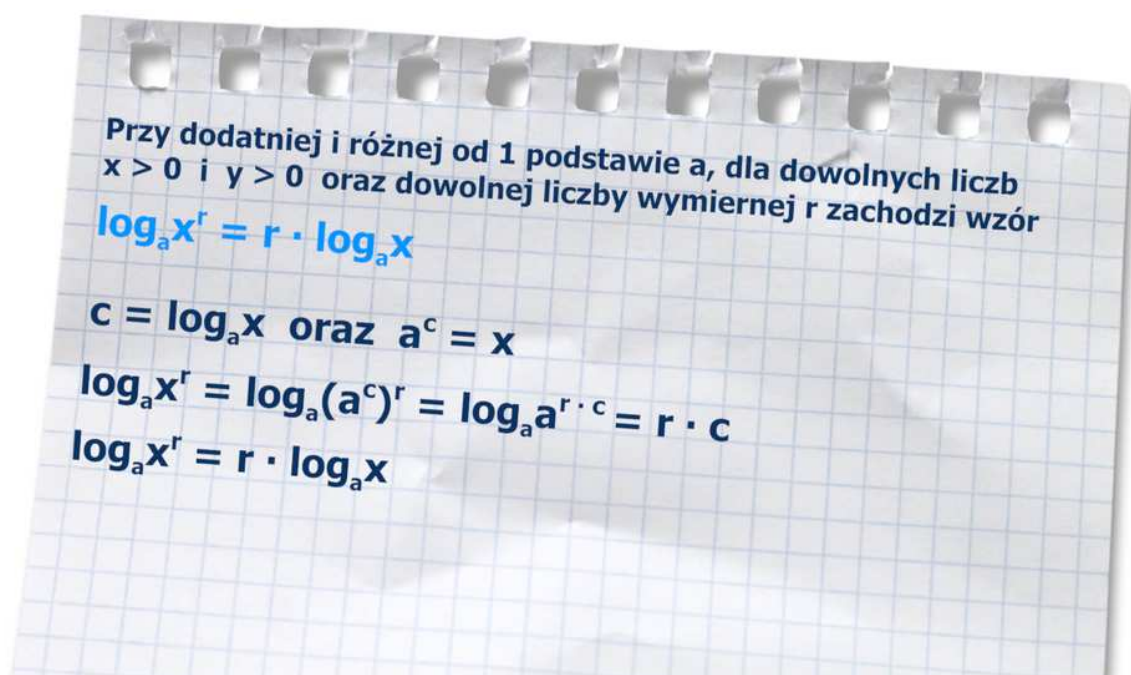
Oznaczmy $c = \log_a x$. Korzystając z definicji logarytmu, otrzymujemy $a^c = x$. Zatem

$$\log_a x^r = \log_a (a^c)^r = \log_a a^{r \cdot c} = r \cdot c$$

Stosując przyjęte oznaczenia mamy

$$\log_a x^r = r \cdot \log_a x$$

To kończy dowód.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Przykład 6

Wykażemy, że

1. $\log_5 16 = 4 \log_5 2$
2. $\log 81 = 4 \log 3$
3. $\log_3 \frac{1}{7} = -\log_3 7$
4. $\log_6 0,04 = -2 \log_6 5$

Rozwiązanie

Korzystamy z twierdzenia o logarytmie potęgi.

1. $\log_5 16 = \log_5 2^4 = 4 \log_5 2$
2. $\log 81 = \log 3^4 = 4 \log 3$
3. $\log_3 \frac{1}{7} = \log_3 7^{-1} = -1 \cdot \log_3 7 = -\log_3 7$
4. $\log_6 0,04 = \log_6 \frac{4}{100} = \log_6 \frac{1}{25} = \log_6 5^{-2} = -2 \log_6 5$

Zadania

Ćwiczenie 1

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2

Przeciągnij i upuść.

$$\begin{aligned}\log_2 4 &= \boxed{} \\ \log_{\frac{1}{2}} 2 &= \boxed{} \\ \log_{\frac{1}{3}} 27 &= \boxed{} \\ \log_{\frac{1}{4}} 16 &= \boxed{} \\ \log_{\sqrt{2}} 4 &= \boxed{} \\ \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{32} &= \boxed{} \\ \log_5 125 &= \boxed{}\end{aligned}$$

-3 1 3 4 -5 -1 5 -2 2

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3

Przeciągnij i upuść.

$$\begin{aligned}\log_2 2 + \log_2 4 &= \boxed{} \\ \log_2 16 - \log_2 4 &= \boxed{} \\ \log_3 5 + \log_3 6 - \log_3 10 &= \boxed{} \\ \log_4 \sqrt{2} + 2 \log_4 2\sqrt{2} &= \boxed{} \\ \log^2_3 \sqrt{3} - 3 \log_3 81 - \log_3 3\sqrt{3} &= \boxed{} \\ 3^{\log_3 26} &= \boxed{} \\ 3^{\log_3 26 - \log_3 2} &= \boxed{}\end{aligned}$$

1 26 17 3 15 $-13\frac{1}{4}$ 13 2 $1\frac{3}{4}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6

Dane są liczby $a = \log_8 2$, $b = \log_8 32$, $c = \log_8 4$. Rozstrzygnij, czy równość jest prawdziwa, czy fałszywa.

☐ $a + b + c = 3$

☐ $a + b = 2$

☐ $a + c = 1$

☐ $b - c = 1$

Ćwiczenie 7

Która z podanych niżej liczb jest całkowita?

☐ $C = \log(0,25) + \log(0,008) + \log(0,5)$

☐ $A = \log_9 3 - \log_9 243$

☐ $D = \log_{\frac{1}{6}} 4 - \left(\log_{\frac{1}{6}} 5 - \log_{\frac{1}{6}} 45 \right)$

☐ $B = \log_{12} 2 + \log_{12} 3 + \log_{12} 24$

Ćwiczenie 8

Funkcja wykładnicza określona jest wzorem $f(x) = 3^x$. Wówczas

☐ $f(x) = \frac{27}{32}$ dla $x = 3 - 5 \log_3 2$

☐ $f(x) = 6$ dla $x = 1 + \log_3 2$

☐ $f(x) = 625$ dla $x = 4 \log_3 5$

☐ $f(x) = \frac{10}{9}$ dla $x = \log_3 10 - 2$

Ćwiczenie 9

Które z podanych niżej stwierdzeń są prawdziwe?

☐ Liczba $\log_2 20$ jest o 2 większa od liczby $\log_2 5$.

☐ Liczba $\log_3 2$ jest o 27 mniejsza od liczby $\log_3 54$.

☐ Suma $\log_{21} 3 + \log_{21} 7$ jest równa 1.

☐ Różnica $\log_5 20 - \log_5 100$ jest równa -1 .

Ćwiczenie 10

Przyjmijmy $\log_2 3 = a$ i $\log_2 5 = b$. Wówczas

☐ $\log_2(16,2) = 4a - b$

☐ $\log_2 15 = a + b$

☐ $\log_2 \frac{5}{3} = a - b$

☐ $\log_2 675 = 3a + 2b$

Ćwiczenie 11

Wskaż liczbę, która spełnia równanie $5^x = 2^3$.

☐ $x = 3 \log_2 5$

☐ $x = 2 \log_3 5$

☐ $x = 2 \log_5 3$

☐ $x = 3 \log_5 2$

Ćwiczenie 12

Suma $\log_4 8 + \log_4 8$ jest równa

☐ 3

☐ 1

☐ 4

☐ 2

Ćwiczenie 13

Suma $\log_{15} 25 + \log_{15} 9$ jest równa

☐ 1

☐ $\log_{15} 34$

☐ $\log_{30} 34$

☐ 2

Ćwiczenie 14

Wartość wyrażenia $\log_3 54 - \log_3 \frac{2}{3}$ to

☐ 4

☐ $\log_3 53 \frac{1}{3}$

☐ $\log_6 27$

☐ 2

Ćwiczenie 15

Wskaż liczbę, która jest równa 7.

☐ $7 \log_7 1 + \log_7 7$

☐ $5 \log_4 2 + 9 \log_{25} 5$

☐ $2 \log_9 3 + 5 \log_{32} 2$

☐ $\log 1 + \log 2 + \log 4$

Ćwiczenie 16

Liczba $\log 21$ jest równa

☐ $\log 20 + \log 1$

☐ $\log 25 - \log 4$

☐ $\log 3 \cdot \log 7$

☐ $\log 7 + \log 3$

Ćwiczenie 17

Liczba $\log 25$ jest równa

☐ $\log 100 - \log 75$

☐ $2 \log 5$

☐ $\frac{1}{2} \log 50$

☐ $\log 10 + \log 15$

Ćwiczenie 18

Liczba $\log_8 16$ jest równa

☐ 16

☐ 8

☐ 48

☐ 12

Ćwiczenie 19

Zapisz podaną liczbę bez użycia logarytmu.

1. $\log 2 + \log 5$

2. $\log_{21} 9 + \log_{21} 49$

3. $\log_{15} 45 + \log_{15} 75$

4. $\log_6 3 + \log_6 4 + \log_6 18$

Ćwiczenie 20

Zapisz podaną liczbę bez użycia logarytmu.

1. $\log_2 40 - \log_2 5$

2. $\log_3 90 - \log_3 10$

3. $\log_5 60 - \log_5 12$

4. $\log_7 21 - (\log_7 24 - \log_7 8)$

Ćwiczenie 21

Zapisz podaną liczbę bez użycia logarytmu.

1. $10 \log_4 2$

2. $9 \log_{27} 3$

3. $12 \log_{25} \sqrt{5}$

4. $8 \log_{12} (2\sqrt{3})$

Ćwiczenie 22

Wykaż, że

1. funkcja wykładnicza $g(x) = 3^x$ dla argumentu $x = \log_3 2 + \log_3 5$ przyjmuje wartość 10.

2. funkcja wykładnicza $h(x) = 4^x$ dla argumentu $x = \log_4 55 - \log_4 5$ przyjmuje wartość 11.

3. funkcja wykładnicza $f(x) = 7^x$ dla argumentu $x = 6 \log_7 2$ przyjmuje wartość 64.

Ćwiczenie 23

Wykaż, że podana liczba jest całkowita.

1. $\log_{g_5} 6 - \log_{g_5} 30$

2. $\log_{g_2} 7 - \log_{g_2} 56$

3. $\log_{g_3} 7 - \log_{g_3} 63$

4. $\log 143 - (\log 26 + \log 55)$

Ćwiczenie 24

Wykaż, że $\log 15 + \log 1250 - \log \frac{3}{16} = 5$.

Ćwiczenie 25

Wykaż, że $3 \log_{g_5} 4 + 2 \log_{g_5} 7 = \log_{g_5} 3136$.

Ćwiczenie 26

Wykaż, że $\log_{g_2} 405 - 4 \log_{g_2} 3 = \log_{g_2} 5$.

Ćwiczenie 27

Wykaż, że liczby $\log 9$, $\log 21$, $\log 49$ tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny.

Ćwiczenie 28

Przyjmijmy $\log_{g_5} 3 = a$. Wykaż, że $\log_{g_5} (27\sqrt{5}) = \frac{6a+1}{2}$.

Ćwiczenie 29

Przyjmijmy $\log 125 = a$ i $\log 4 = b$. Wykaż, że $2a + 3b = 6$.

Ćwiczenie 30

Wykaż, że $(\log_6 2)^2 + \log_6 3 \cdot \log_6 12 = 1$.

Ćwiczenie 31

Funkcja f każdej dodatniej liczbie x przyporządkowuje wykładnik potęgi, do której należy podnieść liczbę 2, aby otrzymać x . Wykaż, że $2 \cdot f(5) + f(0,1) + 1 = f(40) + f(\frac{1}{8})$.

Ćwiczenie 32

Dane są takie liczby dodatnie x i y , że $\log_2 x + \log_3 y^2 = \frac{3}{2}$ i $\log_2 x^4 + \log_3 y^3 = \frac{7}{2}$. Wykaż, że $2 \log_6(x \cdot y) = 1$.

Zastosowanie funkcji wykładniczej

Za pomocą funkcji wykładniczej można opisać wiele zjawisk z życia codziennego. Funkcję tę stosujemy do opisu wielkości, które w stałym tempie się zmieniają, czyli w kolejnych odcinkach czasu tyle samo razy lub o ten sam procent się zwiększają lub zmniejszają. Wielkości takie mają tę własność, że ich przyrost od pewnego momentu jest dużo szybszy niż wzrost liniowy. Za to spadek w tempie wykładniczym jest wolniejszy niż spadek w tempie liniowym. Z wzrostem i spadkiem wykładniczym mamy do czynienia w biologii, chemii, demografii, gospodarce. Podamy poniżej kilka zastosowań funkcji wykładniczej.

Przykład 1

Żeby określić liczebność pewnej populacji osobników, można skorzystać ze wzoru

$$L(t) = L(0) \cdot a^t$$

gdzie

$L(0)$ jest początkową liczbą osobników w populacji,

a pewną stałą większą od zera, charakterystyczną dla tej populacji.

Populacja osobników w tempie wykładniczym rozmnaża się najczęściej przez pewien czas, po którym następuje czas względnej równowagi pomiędzy ilością osobników tworzących się i obumierających.

Przyrost populacji, przebieg epidemii czy zasięg sieci społecznościowych w internecie nie mogą wzrastać w nieskończoność, gdyż istnieją ograniczenia środowiska czy przestrzeni, w której dane zjawiska występują.

Pewna kolonia bakterii liczy na początku obserwacji 500 osobników. Co godzina ich liczba wzrasta o 10 %. Oblicz, ile bakterii będzie w tej kolonii po 3 godzinach, ile po 5 godzinach, a ile po 10 godzinach.

Liczbę osobników tej kolonii obliczymy ze wzoru $L(t) = 500 \cdot 1,1^t$.

Zatem

$$L(3) = 500 \cdot 1,1^3 = 665,5$$

$$L(5) = 500 \cdot 1,1^5 = 805,255$$

$$L(10) = 500 \cdot 1,1^{10} = 1296,87$$

Przykład 2

W pewnym mieście odnotowano w kolejnych latach podaną w tabeli liczbę mieszkańców.

Tabela. Dane

rok	Liczba ludności (w tysiącach)	Przyrost ludności (w tysiącach)
-----	-------------------------------	---------------------------------

2009	30,30	
2010	31,00	0,7
2011	31,71	0,71
2012	32,44	0,73
2013	33,19	0,75
2014	33,95	0,76

Zauważmy, że liczba mieszkańców nie przyrasta w sposób liniowy, ponieważ w kolejnych latach przyrost jest coraz większy. Obliczmy stosunek liczby mieszkańców w danym roku do liczby mieszkańców w poprzednim roku.

$$\frac{\text{liczba mieszkańców w 2014}}{\text{liczba mieszkańców w 2013}} = \frac{33,95}{33,19} = 1,023$$

$$\frac{\text{liczba mieszkańców w 2013}}{\text{liczba mieszkańców w 2012}} = \frac{33,19}{32,44} = 1,023$$

$$\frac{\text{liczba mieszkańców w 2012}}{\text{liczba mieszkańców w 2011}} = \frac{32,44}{31,71} = 1,023$$

$$\frac{\text{liczba mieszkańców w 2011}}{\text{liczba mieszkańców w 2010}} = \frac{31,71}{31} = 1,023$$

$$\frac{\text{liczba mieszkańców w 2010}}{\text{liczba mieszkańców w 2009}} = \frac{31}{30,3} = 1,023$$

Ponieważ otrzymane ilorazy są równe, wynika stąd, że liczba mieszkańców rośnie każdego roku o około 2,3 %. Liczbę ludności w tym mieście po t latach od 2009 roku możemy opisać wzorem

$$X(t) = 30,3 \cdot (1,023)^t$$

Zatem przyrost ludności w tym mieście ma charakter wykładniczy. Jeżeli w kolejnych latach przyrost ludności zachowa ten charakter, ile osób będzie mieszkało w tym mieście w latach 2016, 2020?

W roku 2016 będzie $33,95 \cdot (1,023)^2 = 35,53$, czyli 35,53.

Liczba mieszkańców w 2020 roku to

$$X(11) = 30,3 \cdot (1,023)^{11} = 38,91,$$

czyli 38,91 tysięcy.

Przykład 3

Pierwiastki promieniotwórcze samoistnie rozpadają się. Czasem połowicznego rozpadu nazywamy czas, po którym masa próbki takiego pierwiastka zmniejszy się o połowę. Masę próbki po upływie czasu t możemy obliczyć ze wzoru

$$m(t) = m(0) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

gdzie

$m(0)$ – jest masą próbki na początku,

T to okres połowicznego rozpadu.

Izotop jodu ma czas połowicznego rozpadu 8 dni. Ile miligramów jodu zostanie z 20 mg próbki po upływie 32 dni? Jaki procent izotopu ulegnie rozpadowi w tym czasie?

32 dni to 4 okresy połowicznego rozpadu izotopu jodu, bo $\frac{t}{T} = \frac{32}{8} = 4$. Mamy więc

$$m(32) = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{20}{16} = \frac{5}{4} = 1,25$$

Zatem z próbki złożonej z 20 mg pozostanie po 32 dniach 1,25 mg. Rozpadowi ulegnie więc 18,75 mg z 20 mg. Układamy proporcję

$$\begin{array}{rcl} 100\% & - & 20 \text{ mg} \\ x & - & 18,75 \text{ mg} \end{array}$$

Stąd

$$x = \frac{18,75 \cdot 100\%}{20} = 93,75\%$$

Przykład 4

W naturze występują trzy izotopy węgla $C - 12$, $C - 13$ i $C - 14$, różniące się między sobą liczbą protonów i neutronów w jądrze. Węgiel $C - 14$ jest radioaktywny i jego czas połowicznego rozpadu jest równy 5730 lat. Powstaje on w górnych warstwach atmosfery w wyniku bombardowania atomów azotu neutronami o wysokiej energii z promieniowania kosmicznego. Izotopu $C - 14$ jest bardzo mało w zawartym w powietrzu dwutlenku węgla, jeden atom przypada na około 10^{12} atomów węgla $C - 12$. Wszystkie rośliny pobierają z atmosfery oba rodzaje węgla. Także zwierzęta, jedząc rośliny, pobierają oba rodzaje węgla. Okazuje się, że zawartość węgla $C - 14$ w organizmach jest podobna do jego zawartości w atmosferze. Po śmierci kończy się dopływ węgla z zewnątrz i wtedy węgiel $C - 12$ pozostaje w komórkach, a węgiel $C - 14$ ulega rozpadowi.

Liczbę atomów węgla $C - 14$ w próbce po czasie t obliczymy ze wzoru

$$N(t) = N(0) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

1. Ile lat temu zginął człowiek, jeżeli w jego szczątkach znajduje się tylko 6,25 % ilości węgla, jaka jest w żywym organizmie?

Zbadajmy, jaka ilość węgla $C - 14$ pozostanie po kolejnych okresach.

Tabela. Dane

Okres, jaki upłynął	Ilość węgla $C - 14$, jaka pozostanie
5730	50 %
11 460	25 %
17 190	12,5 %
22 920	6,25 %

Zatem człowiek ten żył około 22 920 lat temu.

2. Znaleziono kość pewnego zwierzęcia, w której 1 atom węgla $C - 14$ przypada na $4 \cdot 10^{12}$ atomów zwykłego węgla. Jaki czas upłynął od śmierci tego zwierzęcia?

Ponieważ w atmosferze na 1 atom węgla $C - 14$ przypada 10^{12} atomów zwykłego węgla, więc ilość węgla zmniejszyła się czterokrotnie. Po pierwszym okresie, czyli łącznie po 5730 latach, ilość węgla zmniejszyła się o połowę i po kolejnym okresie, czyli po 11 460 latach, ilość węgla zmniejszyła się czterokrotnie. Zatem zwierzę żyło około 11 500 lat temu.

Przykład 5

Po podaniu pewnego leku do organizmu substancja czynna tego leku przenika do krwiobiegu. Następnie z każdą godziną ilość tej substancji maleje o około 40 %. Jeżeli podana dawka leku zawierała 250 mg substancji, to po ilu godzinach zostanie w krwiobiegu pacjenta mniej niż 32,4 mg substancji?

- sposób *I*

Jeżeli z każdą następną godziną ilość substancji w krwiobiegu maleje o 40 %, to znaczy, że po każdej godzinie pozostanie 0,6 ilości substancji obecnej w poprzedniej godzinie. Zatem $X(t) = 250 \cdot (0,6)^t$, gdzie t oznacza ilość czasu w godzinach, jaki upłynął od podania leku, a $X(t)$ to ilość leku w organizmie po t godzinach.

Mamy więc $250 \cdot (0,6)^t < 32,4$. Stąd $(0,6)^t < 0,1296$. Ponieważ $0,1296 = (0,6)^4$, więc nierówność ma postać $(0,6)^t < (0,6)^4$. Funkcja $y = (0,6)^x$ jest funkcją malejącą, więc dla większych argumentów przyjmuje mniejsze wartości. Stąd wynika, że $t > 4$.

- sposób II

W kolejnych godzinach mamy:

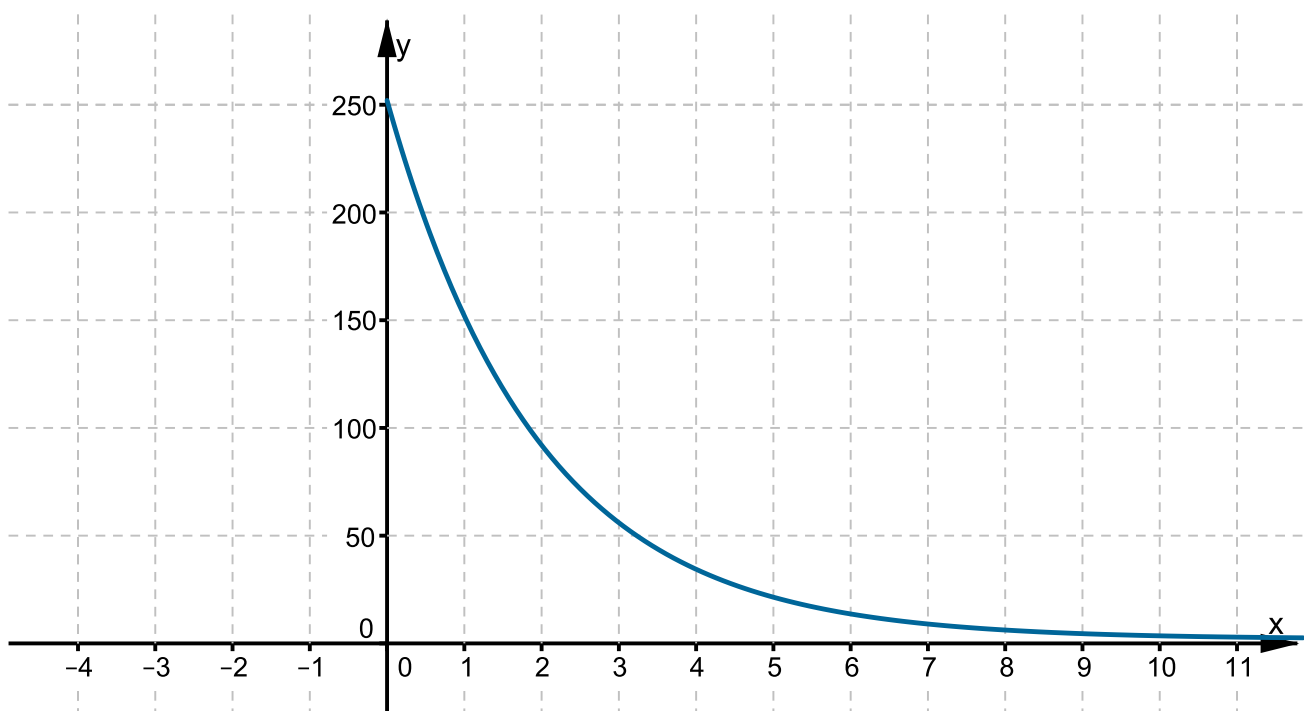
$$X(1) = 250 \cdot 0,6 = 150$$

$$X(2) = 150 \cdot 0,6 = 90$$

$$X(3) = 90 \cdot 0,6 = 54$$

$$X(4) = 54 \cdot 0,6 = 32,4$$

Funkcja opisująca ilość leku we krwi jest funkcją malejącą oraz dla argumentu 4 przyjmuje dokładnie wartość 32,4, zatem dla argumentów większych przyjmuje wartości mniejsze.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

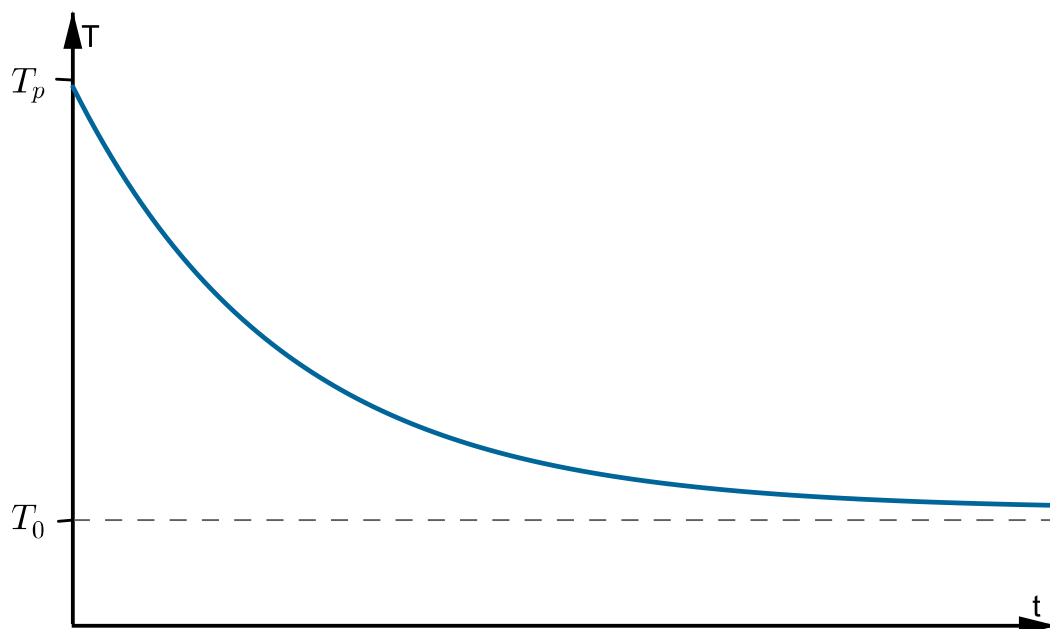
Po czasie dłuższym niż 4 godziny w organizmie pacjenta pozostanie mniej niż 32,4 g leku.

Przykład 6

Jeżeli umieścimy przedmiot w stałej temperaturze otoczenia, niższej od jego temperatury, to przedmiot ten będzie stygł aż do osiągnięcia temperatury otoczenia. Temperaturę po określonym czasie obliczymy za pomocą wzoru

$$T(t) = T_O + (T_P - T_O)a^{-t}$$

T_O to temperatura otoczenia, T_P to temperatura początkowa przedmiotu, a jest stałą charakterystyczną dla danego przedmiotu.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zagotowaliśmy wodę do temperatury 100°C , a następnie umieściliśmy w pomieszczeniu o temperaturze 25°C . Po 10 minutach zmierzaliśmy temperaturę wody i okazało się, że wynosi ona 70°C . Jaką temperaturę będzie miała woda po następnych 10 minutach? Temperaturę wody po 10 minutach opisuje wzór

$$T(10) = 25^{\circ} + (100^{\circ} - 25^{\circ}) \cdot a^{-10} = 70^{\circ}$$

stąd

$$75^{\circ} \cdot a^{-10} = 45^{\circ}$$

Otrzymujemy więc $a^{-10} = 0,6$. Stąd $a^{10} = \frac{1}{0,6} = 1,67$, a więc $a = \sqrt[10]{1,67} \approx 1,053$.

Po następnych 10 minutach, czyli po 20 minutach od zagotowania wody jej temperatura będzie równa

$$T(20) = 25^{\circ} + 75^{\circ} \cdot 1,053^{-20} = 25^{\circ} + 75^{\circ} \cdot 0,356 = 25^{\circ} + 27^{\circ} = 52^{\circ}$$

Przykład 7

Przykładem zastosowania funkcji wykładniczej w medycynie jest zanik monochromatycznej wiązki promieniowania rentgenowskiego przy przechodzeniu przez materię. W tym przypadku natężenie promieniowania I przy przejściu przez ciało grubości x dane jest wzorem:

$$I(x) = I_0 e^{-kx}$$

gdzie

I_0 – natężenie wychodzące z lampy rentgenowskiej,

k – liniowy współczynnik pochłaniania promieniowania w materii,

x – grubość warstwy pochłaniającej.

e – liczba niewymierna, $e \approx 2,718$

Jednostką liniowego współczynnika pochłaniania (absorpcji) jest $[1/m]$.

Ćwiczenie 1

Kolonia bakterii składała się z 500 organizmów. Po każdej godzinie liczba bakterii rośnie o 20%. Ile bakterii będzie po 3 godzinach?

Ćwiczenie 2

Na początku obserwacji kolonia liczyła 500, a na końcu 845 bakterii. O ile procent przyrastała liczba bakterii w ciągu godziny, jeżeli liczba bakterii przyrasta w tempie wykładniczym, czyli według wzoru $L(t) = L(0) \cdot a^t$, a eksperyment trwał 2 godziny?

Ćwiczenie 3

Na początku obserwacji kolonia liczyła 1000 bakterii. Po 5 godzinach liczba ta wzrosła do 1800. Ile osobników będzie liczyła kolonia po 20 godzinach?

Ćwiczenie 4

W pewnej kolonii liczba bakterii zwiększa się co godzinę o 25%. Po ilu godzinach liczba ta uległa podwojeniu?

Ćwiczenie 5

W pewnej miejscowości mieszkało 1400 osób. Miejscowość rozwija się prężnie, tak że każdego roku liczba ta zwiększa się o 10%. Po ilu latach liczba mieszkańców przekroczy 2000?

Ćwiczenie 6

W pewnej kolonii bakterii po 4 godzinach od rozpoczęcia doświadczenia liczba organizmów była równa 7500, a po 6 godzinach była już równa 37 500. Wiedząc, że liczba bakterii przyrastała w sposób wykładniczy oblicz, ile bakterii było na początku doświadczenia oraz ile po 12 godzinach.

Ćwiczenie 7

Dla uranu ^{235}U czas połowicznego rozpadu wynosi 713 milionów lat. Ile lat potrzeba, żeby z 1 g pierwiastka pozostało nie więcej niż 0,125 g?

Ćwiczenie 8

Po upływie 15 dni z początkowej próbki o masie 2 g pozostanie 0,25 g bizmutu ^{210}Bi . Jaki jest czas połowicznego rozpadu tego pierwiastka?

Ćwiczenie 9

W próbce znajduje się 0,05 g izotopu wapnia. Jaka masa izotopu była 3 lata wcześniej, jeżeli okres połowicznego rozpadu dla wapnia wynosi 6 miesięcy?

Ćwiczenie 10

Ile wynosi okres połowicznego rozpadu kobaltu, jeżeli wiadomo, że podczas doświadczenia, które trwało 20 lat, z próbki ważącej 40 g pozostało 2,5 g tego pierwiastka?

Ćwiczenie 11

W pewnej kości zawartość węgla $C - 14$ jest mniejsza o 75 % od zawartości w atmosferze. Oblicz wiek znaleziska.

Ćwiczenie 12

Określ wiek znaleziska archeologicznego, wiedząc, że jeden atom węgla $C - 14$ przypada na $16 \cdot 10^{12}$ atomów węgla $C - 12$.

Ćwiczenie 13

Jaki procent węgla $C-14$ pozostał w znalezisku archeologicznym, które ma 15 000 lat?

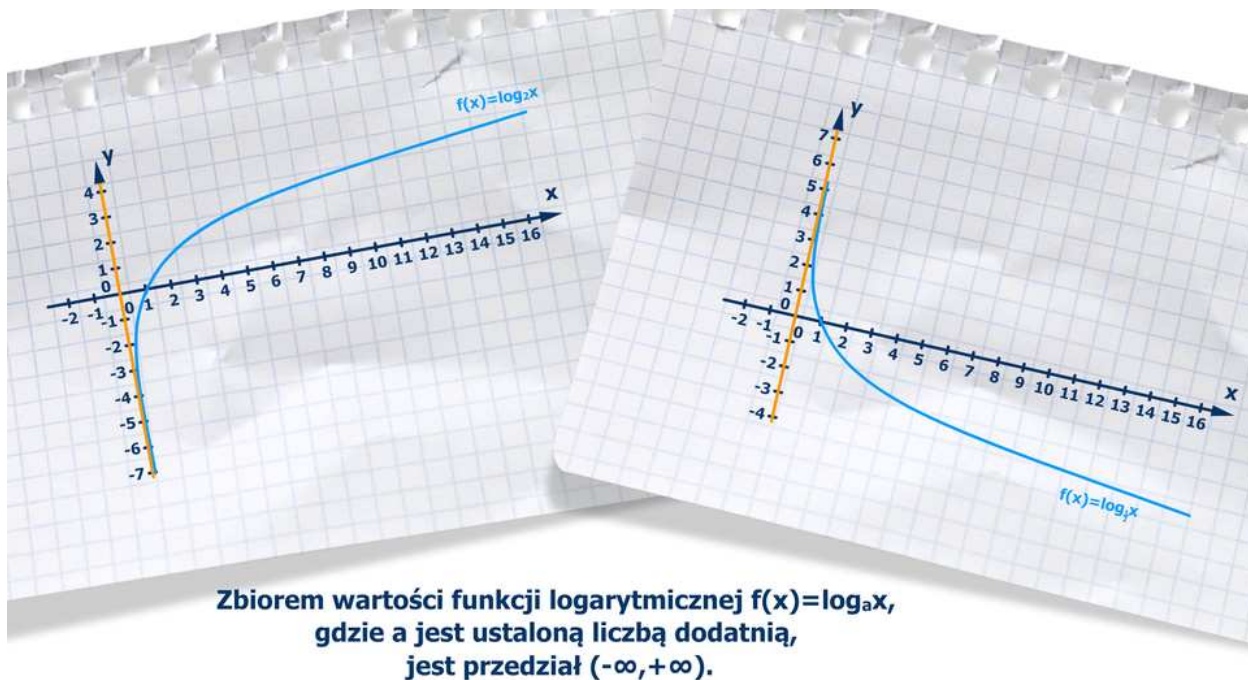
Ćwiczenie 14

Pewien płyn podgrzano do temperatury $80^{\circ}C$, a następnie odstawiono, żeby wystygł. Po 15 minutach temperatura płynu wynosiła $60^{\circ}C$. Jaką temperaturę miał płyn po godzinie od podgrzania?

Wykresy funkcji specjalnych i ich własności

Wykresy funkcji specjalnych

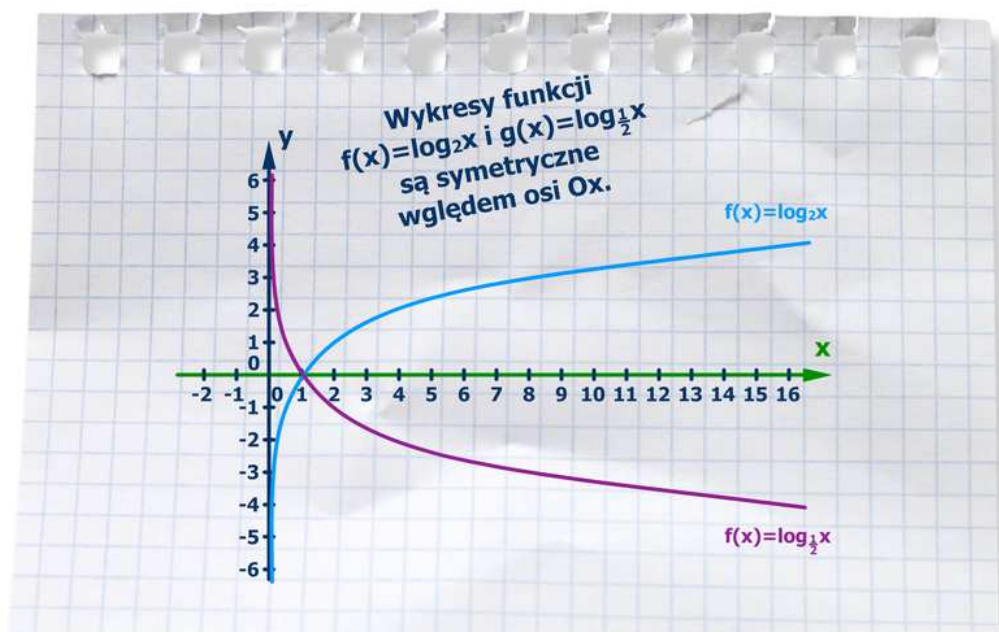
Wykresy funkcji specjalnych



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

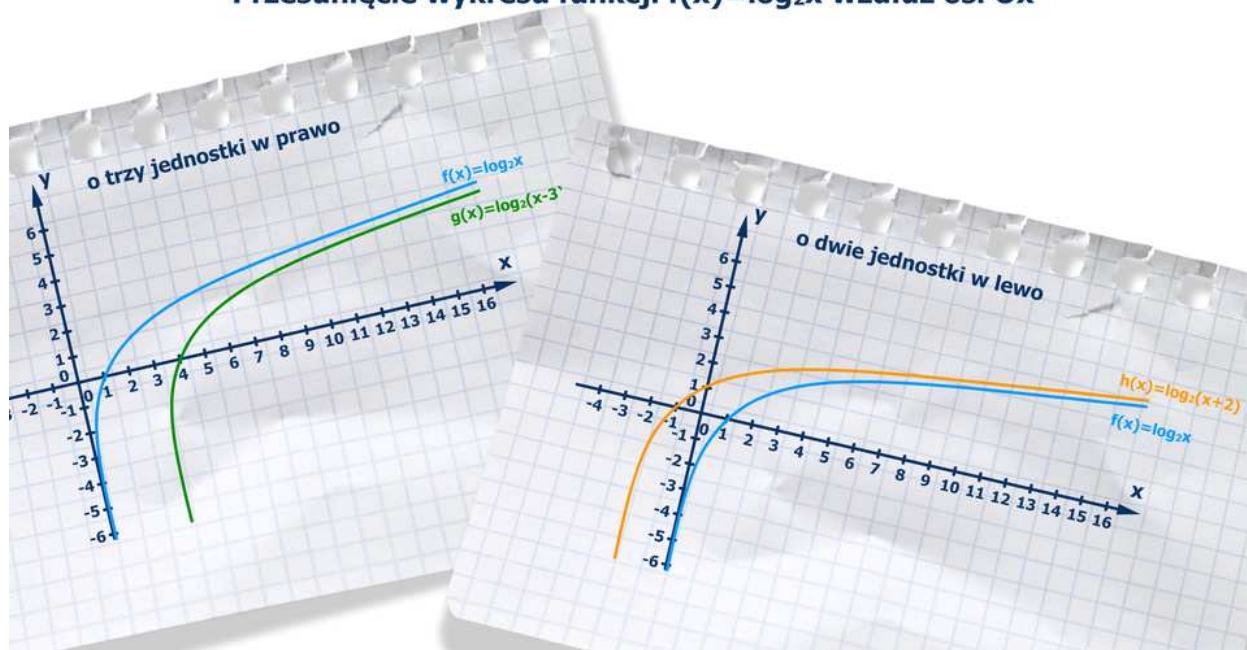


Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia wykresy funkcji logarytmicznej $f(x) = \log$ przy podstawie 2 z liczby x oraz $g(x) = \log$ przy podstawie jedna druga z liczby x . Funkcja $g(x)$ jest symetryczna do funkcji $f(x)$ względem osi Ox .

Przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \log_2 x$ wzdłuż osi Ox

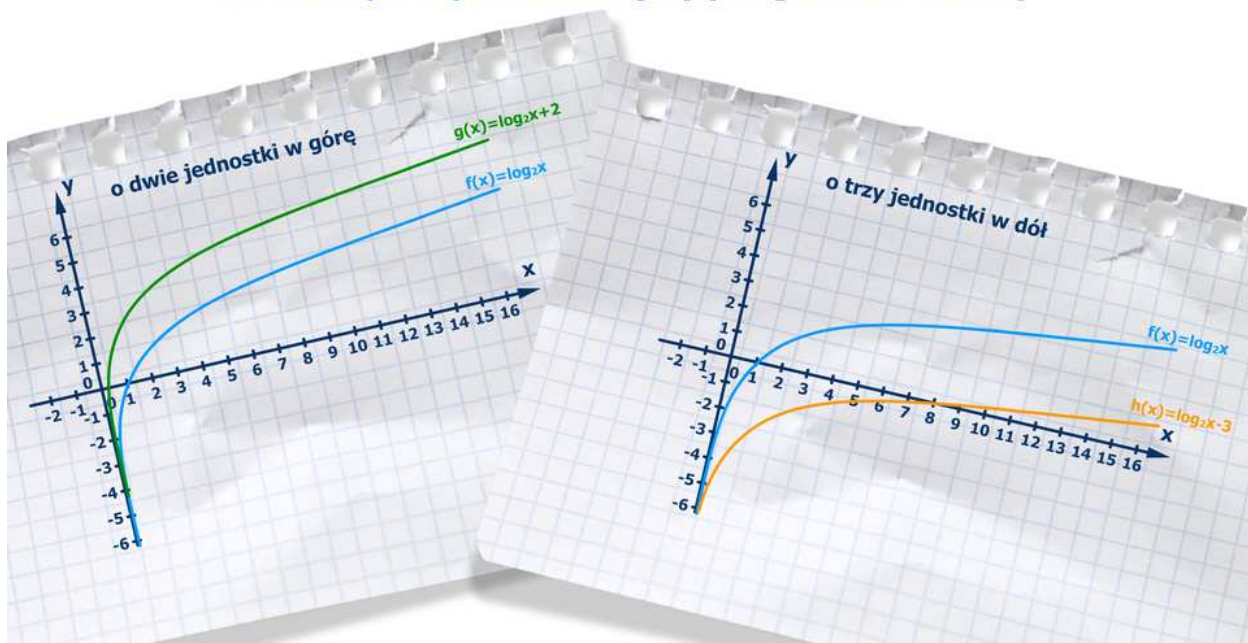


Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia przesunięcie wykresu funkcji logarytmicznej $f(x) = \log$ przy podstawie 2 z liczby x wzdłuż osi OX . Rozpatrzono dwa przypadki przesunięcia: o 3 jednostki w prawo - otrzymano funkcję $g(x) = \log$ przy podstawie 2 z liczby $(x - 3)$ oraz o 2 jednostki w lewo - otrzymano funkcję $h(x) = \log$ przy podstawie 2 z liczby $(x + 2)$.

Przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \log_2 x$ wzdłuż osi Oy

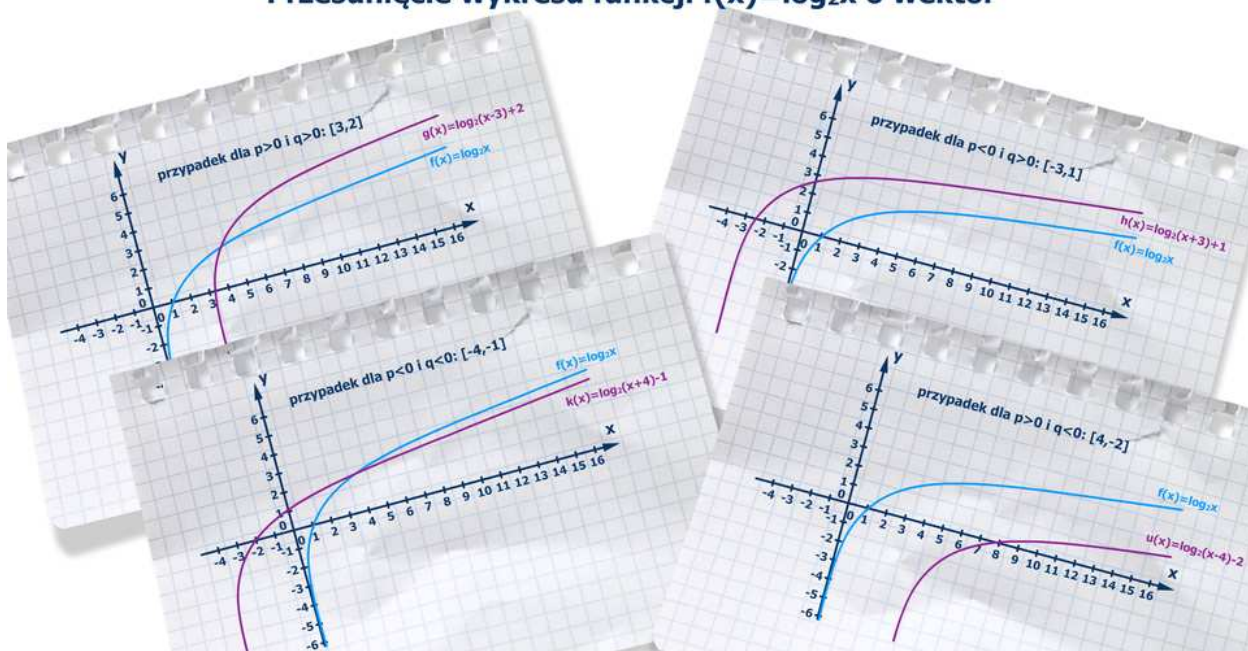


Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia przesunięcie wykresu funkcji logarytmicznej $f(x) = \log$ przy podstawie 2 z liczby x wzdłuż osi OY . Rozpatrzono dwa przypadki przesunięcia: o 2 jednostki w górę - otrzymano funkcję $g(x) = (\log \text{ przy podstawie } 2 \text{ z liczby } x) + 2$ oraz o 3 jednostki w dół - otrzymano funkcję $h(x) = (\log \text{ przy podstawie } 2 \text{ z liczby } x) - 3$.

Przesunięcie wykresu funkcji $f(x)=\log_2 x$ o wektor

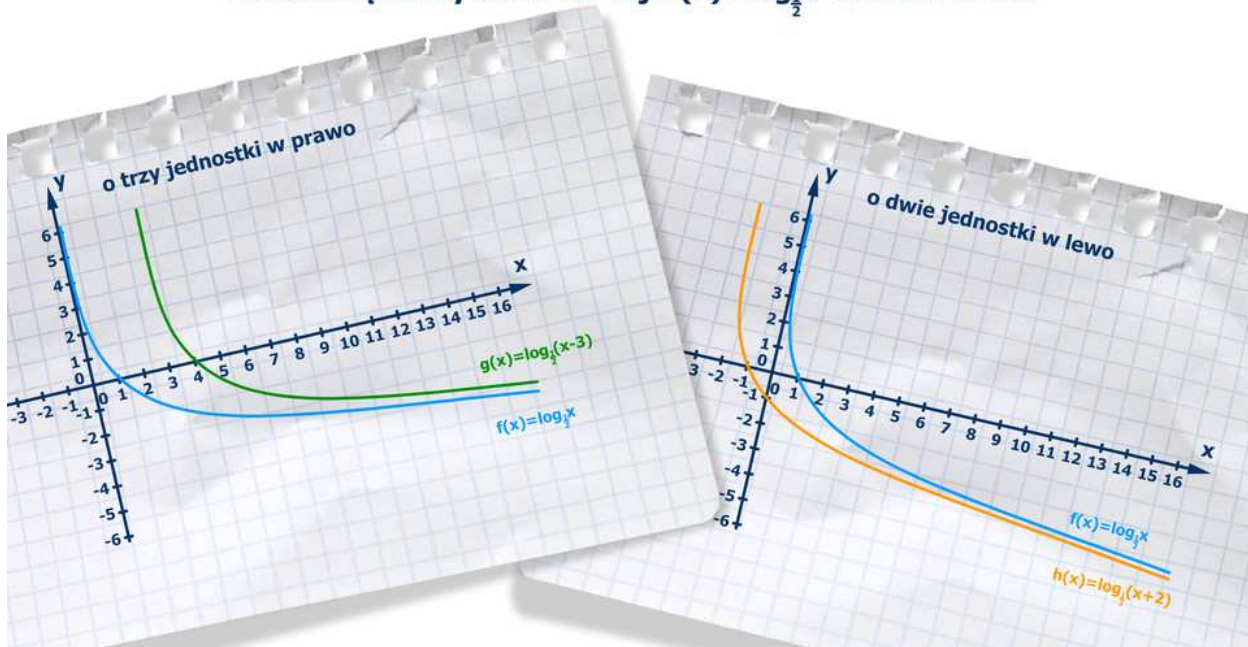


Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Przesunięcie wykresu funkcji $f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$ wzdłuż osi Ox



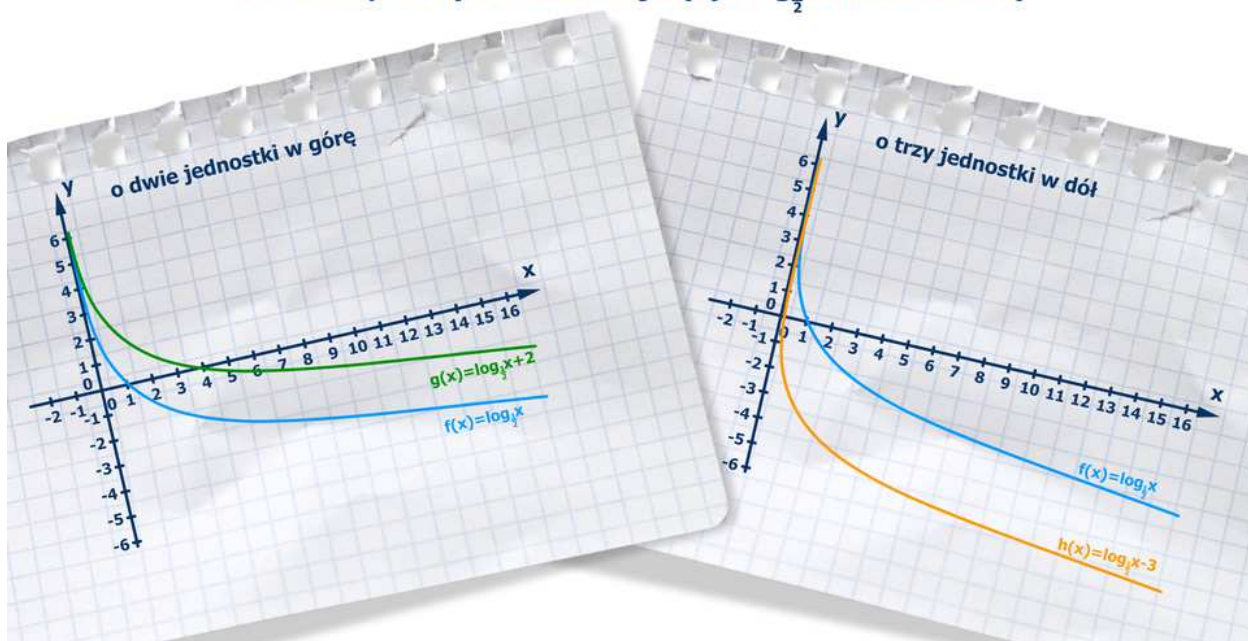
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia przesunięcie wykresu funkcji logarytmicznej $f(x) = \log$ przy podstawie jedna druga z x wzdłuż osi Ox układu współrzędnych. W wyniku przesunięcia o trzy jednostki w prawo otrzymujemy funkcję $g(x) = \log$ przy podstawie jedna druga z $(x-3)$.

W wyniku przesunięcia o dwie jednostki w lewo otrzymujemy funkcję $h(x) = \log$ przy podstawie jedna druga z $(x+2)$.

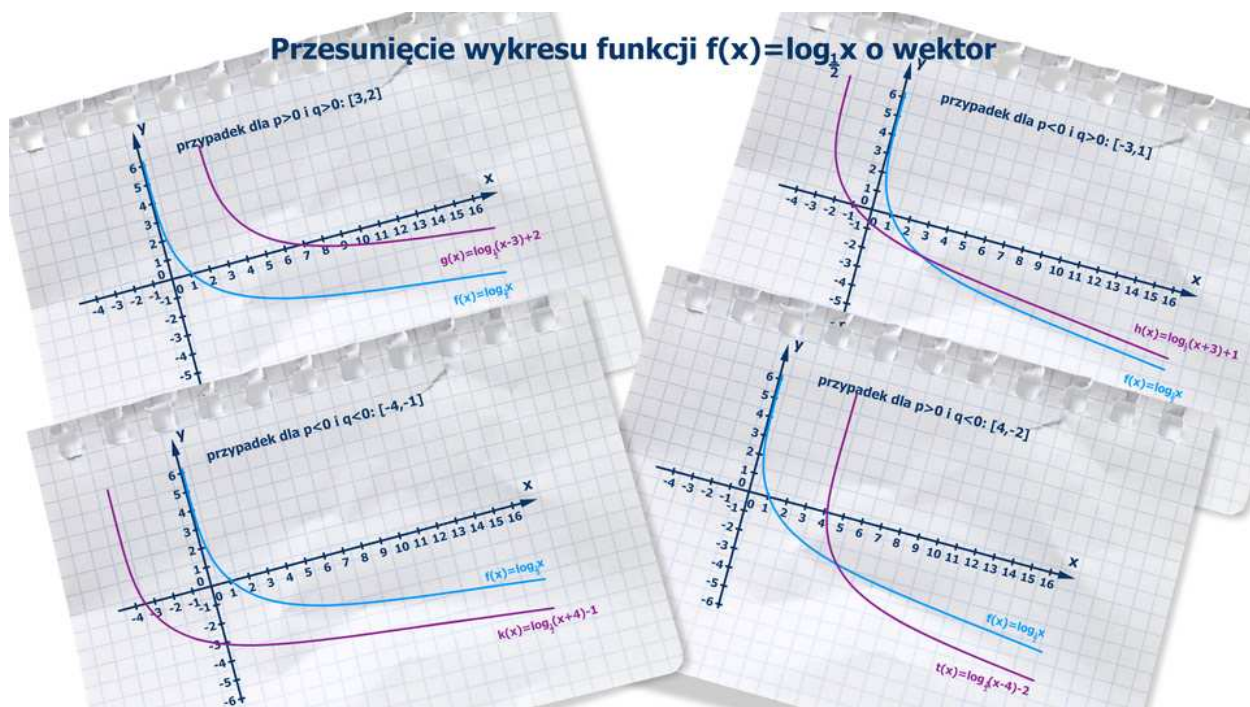
Przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ wzdłuż osi Oy



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia przesunięcie wykresu funkcji logarytmicznej $f(x) = \log$ przy podstawie jedna druga z x wzdłuż osi OY układu współrzędnych. W wyniku przesunięcia o dwie jednostki w górę otrzymujemy funkcję $g(x) = (\log \text{ przy podstawie jedna druga z } x) + 2$. W wyniku przesunięcia o trzy jednostki w dół otrzymujemy funkcję $h(x) = (\log \text{ przy podstawie jedna druga z } x) - 3$.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia przesunięcie wykresu funkcji wykładniczej $f(x) = \log$ przy podstawie jedna druga z x o wektor $[p, q]$ w układzie współrzędnych. Rozpatrzono przypadki: Dla $p > 0$ oraz $q > 0$ przesunięcie o wektor $[3, 2]$ – otrzymano funkcję $g(x) = [\log \text{ przy podstawie jedna druga z } (x - 3)] + 2$. Dla $p < 0$ przesunięcie o wektor $[-3, 1]$ – otrzymano funkcję $h(x) = [\log \text{ przy podstawie jedna druga z } (x + 3)] + 1$. Dla $p < 0$ oraz $q < 0$ przesunięcie o wektor $[-4, -1]$ – otrzymano funkcję $k(x) = [\log \text{ przy podstawie jedna druga z } (x + 4)] - 1$. Dla $p > 0$ oraz $q < 0$ przesunięcie o wektor $[4, -2]$ – otrzymano funkcję $t(x) = [\log \text{ przy podstawie jedna druga z } (x - 4)] - 2$.

Słowniczek

Definicja: Ciąg arytmetyczny

Ciąg (a_n) nazywamy **arytmetycznym**, jeżeli ma co najmniej 3 wyrazy i każdy jego wyraz, począwszy od drugiego, jest sumą wyrazu poprzedniego i pewnej ustalonej liczby. Liczbę tę nazywamy różnicą ciągu i oznaczamy ją r .

Jeśli więc ciąg jest skończony i ma $k \geq 3$ wyrazów, to $a_{n+1} = a_n + r$ dla dowolnej liczby całkowitej $1 \leq n \leq k - 1$. Jeśli natomiast ciąg jest nieskończony, to $a_{n+1} = a_n + r$ dla dowolnej liczby całkowitej $n \geq 1$.

Definicja: Ciąg geometryczny

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągami geometrycznym**, jeżeli ma przynajmniej 3 wyrazy, jego pierwszy wyraz jest różny od 0, a każdy następny wyraz jest iloczynem poprzedniego wyrazu i pewnej ustalonej liczby. Liczbę tę nazywamy ilorazem ciągu geometrycznego i oznaczamy przez q .

Definicja: Ciągi monotoniczne

- Ciąg nazywamy **rosnącym**, jeżeli jego każdy wyraz, począwszy od drugiego, jest większy od wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego, a więc jeżeli dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi nierówność

$$a_{n+1} > a_n$$

- Ciąg nazywamy **malejącym**, jeżeli jego każdy wyraz, począwszy od drugiego, jest mniejszy od wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego, a więc jeżeli dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi nierówność

$$a_{n+1} < a_n$$

- Ciąg nazywamy **stałym**, jeżeli wszystkie wyrazy tego ciągu są sobie równe, a więc jeżeli dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi równość

$$a_{n+1} = a_n$$

- Ciąg nazywamy **niemalejącym**, jeżeli jego każdy wyraz, począwszy od drugiego, jest nie mniejszy od wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego, a więc jeżeli dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi nierówność

$$a_{n+1} \geq a_n$$

- Ciąg nazywamy **nierosnącym**, jeżeli jego każdy wyraz, począwszy od drugiego, jest nie większy od wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego, a więc jeżeli dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi nierówność

$$a_{n+1} \leq a_n$$

Jeżeli ciąg jest rosnący, malejący, nierosnący, niemalejący lub stały, to mówimy, że ten ciąg jest **monotoniczny**. O innych ciągach mówimy, że nie są monotoniczne.

Definicja: Definicja ciągu

- Ciągiem nazywamy funkcję, określoną w zbiorze liczb całkowitych dodatnich. Wartości tej funkcji dla kolejnych liczb naturalnych nazywamy **wyrazami ciągu**.
- Jeżeli ciąg jest nieskończony, to jego dziedziną jest zbiór dodatnich liczb całkowitych. **Dziedziną ciągu** skończonego jest zbiór $\{1, 2, \dots, n\}$, gdzie n jest ustaloną dodatnią liczbą całkowitą.
- **Ciąg dwuwyrazowy** jest parą uporządkowaną, z którą spotkaliśmy się, np. podając współrzędne punktu w prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie. Zwróćmy uwagę, że pary uporządkowane $(1, 3)$ i $(3, 1)$ są różne.
- Ciąg opisany w przykładzie powyżej jest skończony, ponieważ w kolejce stoi 5 osób, czyli skończona liczba osób. Dziedziną tego ciągu jest zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Jeżeli elementy jakiegoś zbioru ponumerujemy, a więc ustalimy kolejność tych elementów, to w ten sposób otrzymamy ciąg.

W praktyce będziemy zajmować się najczęściej ciągami liczbowymi, czyli takimi, których wyrazy są liczbami. Ciąg oznaczamy zazwyczaj (a_n) , (b_n) , (c_n) , itd. Natomiast a_n oznacza n -ty wyraz ciągu (a_n) , na przykład drugi wyraz ciągu (a_n) to a_2 .

Jeżeli ciąg z podanego wyżej przykładu 1 oznaczmy (a_n) , to a_1 = Tomek, a_2 = Małgosia, a_3 = Julka, a_4 = Franek, a_5 = Jurek.

Twierdzenie: Funkcja kwadratowa w postaci kanonicznej i ogólnej

Każdą funkcję kwadratową można zapisać w postaci ogólnej $f(x) = ax^2 + bx + c$ lub w równoważnej postaci kanonicznej $f(x) = a(x - p)^2 + q$, gdzie $p = \frac{-b}{2a}$ i $q = \frac{-\Delta}{4a}$. Symbolem Δ (delta) oznaczyliśmy liczbę $\Delta = b^2 - 4ac$, którą nazywamy wyróżnikiem funkcji kwadratowej f .

Dowód

Zauważmy, że po rozwinięciu wyrażenia $(x - p)^2$, postać kanoniczną funkcji f możemy zapisać jako

$$f(x) = a(x^2 - 2px + p^2) + q,$$

stąd

$$f(x) = ax^2 - 2apx + ap^2 + q.$$

Aby dla każdego x zachodziła równość

$$ax^2 - 2apx + ap^2 + q = ax^2 + bx + c$$

potrzeba i wystarcza, żeby równe były współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej x . Zatem

$-2ap = b$ oraz $ap^2 + q = c$, stąd $p = \frac{-b}{2a}$ i $q = c - a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 = c - \frac{ab^2}{4a^2} = c - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$. Przyjmując oznaczenie $\Delta = b^2 - 4ac$, otrzymujemy $q = \frac{-\Delta}{4a}$.

Należy zauważyć, że do przekształcenia wzoru funkcji kwadratowej z postaci ogólnej do kanonicznej można też zastosować wzór skróconego mnożenia (tę metodę stosowaliśmy w kilku poprzednich przykładach). Przekształcamy wtedy według poniższego schematu

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}. \end{aligned}$$

Definicja: Funkcja kwadratowa zmiennej x

Funkcją kwadratową zmiennej x nazywamy funkcję określoną wzorem

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

gdzie a , b oraz c to liczby rzeczywiste, przy czym liczba a jest różna od zera. Powyższy wzór funkcji kwadratowej nazywamy jej postacią ogólną.

- Wzór funkcji kwadratowej możemy też zapisać w postaci kanonicznej

$$f(x) = a(x - p)^2 + q,$$

gdzie a , p oraz q to liczby rzeczywiste i $a \neq 0$.

Definicja: Funkcja wykładnicza

Funkcją wykładniczą nazywamy funkcję określoną dla każdej liczby rzeczywistej x wzorem $f(x) = a^x$, gdzie a jest ustaloną liczbą dodatnią i różną od 1.

Twierdzenie: Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej

Funkcja kwadratowa f określona wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$)

- ma dwa różne miejsca zerowe rzeczywiste x_1 i x_2 wtedy i tylko wtedy, gdy jej wyróżnik Δ jest dodatni.

Wówczas wzór funkcji f można zapisać w postaci iloczynowej

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2),$$

gdzie $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ oraz $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

- ma dokładnie jedno miejsce zerowe x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta = 0$. W tym przypadku wzór funkcji f można zapisać w postaci iloczynowej $f(x) = a(x - x_0)^2$, gdzie $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- nie ma pierwiastków rzeczywistych wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta < 0$. Wtedy wzoru funkcji f nie można zapisać w postaci iloczynowej.

Twierdzenie: Liczba rozwiązań równania kwadratowego

Równanie kwadratowe

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- nie ma rozwiązań rzeczywistych wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta < 0$,
- ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste $x_0 = -\frac{b}{2a}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta = 0$,
- ma dwa (różne) rozwiązania rzeczywiste $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ oraz $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta > 0$.

Definicja: Logarytm

Logarytmem $\log_a c$ dodatniej liczby c przy dodatniej i różnej od 1 podstawie a nazywamy wykładnik b potęgi, do której należy podnieść a , aby otrzymać c .

$\log_a c = b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a^b = c$.

Twierdzenie: Logarytm iloczynu

Jeżeli liczba a jest dodatnia i różna od 1, to dla dowolnych liczb dodatnich x i y

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Dowód

Oznaczmy $c = \log_a x$ oraz $d = \log_a y$. Korzystając z definicji logarytmu, otrzymujemy $a^c = x$ oraz $a^d = y$. Zatem

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(a^c \cdot a^d) = \log_a a^{c+d} = c + d$$

Stosując przyjęte oznaczenia, mamy

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

To kończy dowód.

Twierdzenie: Logarytm ilorazu

Przy dodatniej i różnej od 1 podstawie a dla dowolnych liczb $x > 0$ i $y > 0$ prawdziwa jest równość

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Dowód

Oznaczmy $c = \log_a x$ oraz $d = \log_a y$. Korzystając z definicji logarytmu, otrzymujemy $a^c = x$ oraz $a^d = y$. Zatem

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a \frac{a^c}{a^d} = \log_a a^{c-d} = c - d$$

czyli stosując przyjęte oznaczenia

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

To kończy dowód.

Twierdzenie: Logarytm potęgi

Przy dodatniej i różnej od 1 podstawie a dla dowolnej liczby $x > 0$ prawdziwa jest równość

$$\log_a x^r = r \cdot \log_a x$$

Dowód

Oznaczmy $c = \log_a x$. Korzystając z definicji logarytmu, otrzymujemy $a^c = x$. Zatem

$$\log_a x^r = \log_a (a^c)^r = \log_a a^{r \cdot c} = r \cdot c$$

Stosując przyjęte oznaczenia mamy

$$\log_a x^r = r \cdot \log_a x$$

To kończy dowód.

Twierdzenie: Monotoniczność ciągu arytmetycznego

Jeżeli różnica ciągu arytmetycznego jest dodatnia, to ciąg ten jest rosnący. Jeżeli różnica ciągu arytmetycznego jest ujemna, to ciąg ten jest malejący. Jeżeli różnica ciągu arytmetycznego jest równa zero, to ciąg jest stały i jego wszystkie wyrazy są równe a_1 .

Twierdzenie: O sumie wyrazów ciągu arytmetycznego

Suma S_n początkowych n wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Twierdzenie: Oś symetrii funkcji kwadratowej

Jeżeli funkcja kwadratowa

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

ma dwa miejsca zerowe x_1 i x_2 , to oś symetrii paraboli będącej wykresem funkcji f ma równanie

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Dowód

Jak zauważyliśmy, oś symetrii paraboli, która jest wykresem funkcji f , to jednocześnie symetralna odcinka o końcach w punktach $(x_1, 0)$ i $(x_2, 0)$. Korzystając ze wzoru na współrzędne środka odcinka, stwierdzamy, że ta symetralna przechodzi przez punkt o współrzędnych $(\frac{x_1 + x_2}{2}, 0)$. Dla dowodu wystarczy więc pokazać, że

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = p.$$

Ponieważ

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta} + (-b + \sqrt{\Delta})}{2a} = \frac{-b}{a},$$

więc

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b}{2a} = p.$$

Definicja: Proporcjonalność odwrotna

Funkcja f opisująca zależność między dodatnimi wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi x i y nazywana jest proporcjonalnością odwrotną, a iloczyn $x \bullet y = a$ nazywany jest współczynnikiem proporcjonalności odwrotnej.

Z faktu, że liczby x i y są dodatnie, wynika, że współczynnik a także jest dodatni.

Zależność między wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi x i y możemy zapisać również w postaci $y = \frac{a}{x}$.

Twierdzenie: Proste prostopadłe

Proste o równaniach $m : y = a_1x + b_1$ oraz $k : y = a_2x + b_2$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy ich współczynniki kierunkowe spełniają warunek

$$a_1 \bullet a_2 = -1$$

Twierdzenie: Proste równoległe

Proste o równaniach

- $m : y = a_1x + b_1$
- $k : y = a_2x + b_2$

są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy ich współczynniki kierunkowe są równe.

$$a_1 = a_2$$

Twierdzenie: Rozwiązanie równania $x^n = a$

Dla liczby naturalnej dodatniej n , większej od 1, oraz liczby rzeczywistej $a \neq 0$ równanie $x^n = a$ ma

- jedno rozwiązanie równe $x = \sqrt[n]{a}$, gdy n jest liczbą nieparzystą,
- dwa rozwiązania równe $x = \sqrt[n]{a}$ oraz $x = -\sqrt[n]{a}$, gdy n jest liczbą parzystą oraz a jest liczbą dodatnią,
- zero rozwiązań, gdy n jest liczbą parzystą oraz a jest liczbą ujemną.

Definicja: Równanie ogólne prostej

Równanie $Ax + By + C = 0$, gdzie A, B i C są liczbami rzeczywistymi oraz A i B nie są jednocześnie równe zero, nazywamy równaniem ogólnym prostej.

Twierdzenie: Twierdzenie o sumie n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Jeżeli (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q , to suma S_n jego n początkowych wyrazów jest równa

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \text{ dla } q \neq 1 \text{ albo } S_n = na_1 \text{ dla } q = 1.$$

Własność: Uogólnienie własności wyrazów ciągu arytmetycznego

Dla dowolnego wyrazu ciągu arytmetycznego $n > 1$ oraz dowolnej dodatniej liczby całkowitej $k < n$ mamy

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$$

Zauważmy, że wyrazy a_{n-k} , a_n , a_{n+k} są trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy kr . Zatem twierdzenie to wynika także z twierdzenia o zależności pomiędzy trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

Definicja: Wielkości odwrotnie proporcjonalne

Mówimy, że dwie dodatnie wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn jest stały i różny od zera.

Definicja: Wielomian

Wielomianem zmiennej x stopnia n (n – liczba naturalna dodatnia) nazywamy funkcję określoną wzorem

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

gdzie $x \in R$, $a_n \neq 0$ oraz $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ są liczbami rzeczywistymi. Liczby $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ nazywamy współczynnikami wielomianu.

- Przyjmujemy ponadto, że funkcja liniowa stała $W(x) = a_0$, gdzie $a_0 \neq 0$, jest wielomianem stopnia zerowego, natomiast funkcję liniową $W(x) = 0$ nazywamy **wielomianem zerowym** i nie określamy stopnia tego wielomianu.
- Zgodnie z tą definicją funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ jest wielomianem stopnia pierwszego, gdy $a \neq 0$, a funkcja kwadratowa

$$g(x) = ax^2 + bx + c$$

jest wielomianem stopnia drugiego. Oczywiście $a \neq 0$, gdyż inaczej nie byłaby to funkcja kwadratowa.

Własność: Własności wyrazów ciągu arytmetycznego

Ciąg (a_n) jest arytmetyczny wtedy i tylko wtedy, gdy dowolny wyraz tego ciągu (poza pierwszym i ostatnim, jeśli ciąg jest skończony) jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2} \text{ dla } n > 1$$

Niekiedy łatwiej korzystać z tej równości zapisanej w postaci

$$2a_n = a_{n+1} + a_{n-1}$$

Własność: Własność ciągu geometrycznego

Ciąg (a_n) o wyrazach różnych od 0 jest ciągiem geometrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby całkowitej $n > 1$ ($1 < n < k$, ciąg (a_n) jest k -wyrazowy) prawdziwa jest równość

$$a_n^2 = a_{n+1} \cdot a_{n-1}$$

Jeżeli wyrazy ciągu (a_n) są liczbami dodatnimi, to równość $a_n^2 = a_{n+1} \cdot a_{n-1}$ możemy zapisać w postaci $a_n = \sqrt{a_{n+1} \cdot a_{n-1}}$.

Oznacza to, że wyraz a_n jest średnią geometryczną wyrazów sąsiednich.

Twierdzenie: Wzór ogólny ciągu arytmetycznego

Każdy wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r jest równy $a_n = a_1 + (n - 1)r$. Zależność między dwoma kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, a więc równość $a_{n+1} = a_n + r$ możemy też zapisać w postaci równoważnej $a_{n+1} - a_n = r$.

Twierdzenie: Wzór ogólny ciągu geometrycznego

Jeżeli a_1 jest pierwszym wyrazem ciągu geometrycznego (a_n) i q jest ilorazem tego ciągu, to dla dowolnej liczby całkowitej $n > 1$ mamy $a_n = a_1 q^{n-1}$.