



Konwersja liczb pomiędzy systemami liczbowymi

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Schemat interaktywny
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Konwersja liczb pomiędzy systemami liczbowymi

Źródło: Pixabay, domena publiczna.

W tym e-materiale powtarzamy wiadomości ze szkoły podstawowej.

Wiedza dotycząca konwersji pomiędzy systemami liczbowymi przydaje się w momentach, gdy chcemy poznać działanie układów cyfrowych lub je obsługiwać. Każdy informatyk, aby zapoznać się z pracą procesora, który operuje na liczbach zapisanych w systemie dwójkowym, także powinien opanować umiejętność konwersji.

W tym e-materiale poznasz systemy liczbowe o ustalonych podstawach, np. trójkowy, piątkowy czy ósemkowy. Dowiesz się, w jaki sposób zamienić liczbę z dowolnego systemu na ten o innej podstawie. Jest to niezbędne, by przejść do kolejnych sekcji i zrozumieć działania na liczbach, które są zapisane w różnych systemach liczbowych.

Więcej informacji o systemach liczbowych znajdziesz w e-materiałach:

- [Systemy liczbowe,](#)
- [Reprezentacja liczb ujemnych w systemie binarnym,](#)
- [Reprezentacja ułamków w systemie binarnym.](#)

Więcej zadań dotyczących systemów liczbowych? [Systemy liczbowe – zadania maturalne.](#)

Twoje cele

- Poznasz systemy pozycyjne o różnych podstawach, na przykład trójkowy, czy piątkowy.
- Wskażesz różnice oraz zależności między systemami o różnych podstawach.
- Wykonasz konwersję liczby z dowolnego systemu na inny.

Przeczytaj

Jak już wiesz, w systemie pozycyjnym, w zależności od jego podstawy, masz do dyspozycji ustalony zbiór cyfr. Na przykład jeżeli korzystasz z systemu piątkowego, możesz używać cyfr: 0, 1, 2, 3, 4. System dziesiętny to cyfry: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, natomiast system dwójkowy (binarny) to jedynie 0 oraz 1.

Ważne!

Liczby w systemie innym niż dziesiętny zapisujemy z indeksem dolnym, który jest równy podstawie systemu. Oto przykład liczby zapisanej w systemie binarnym (dwójkowym):

$$1011001_{(2)}$$

Wybrana liczba jest przedstawiona jako ciąg cyfr zakończony dodatkową liczbą oznaczającą podstawę systemu liczbowego. Musimy jednak pamiętać, że w [systemie pozycyjnym](#) znaczenie ma położenie zapisywanych cyfr. Każdej z nich odpowiada [waga pozycji](#), czyli podstawa podniesiona do potęgi numeru pozycji. Dana cyfra jest mnożnikiem odpowiadającej jej wagi, dlatego tak ważna jest ich kolejność. W dalszej części lekcji, gdy zapoznasz się z obliczaniem wartości liczby całkowitej, wszystko stanie się jasne.

Ważne!

[Wartością liczby](#) o reprezentacji $\{x_i x_{i-1} \dots x_1 x_0\}_{(\beta)}$ w systemie dziesiętnym jest:

$$x_i \beta^i + x_{i-1} \beta^{i-1} + \dots + x_1 \beta^1 + x_0 \beta^0$$

gdzie x_i to kolejne cyfry wchodzące w skład liczby, zaś β to podstawa systemu.

Przykład 1

Obliczmy wartość liczby $421_{(5)}$ w systemie dziesiętnym.

$$421_{(5)} = 4 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0 = 111_{(10)}$$

Jak widzisz, w systemie dziesiętnym otrzymaliśmy wartość 111. Można, choć nie ma takiej konieczności, zapisać na końcu liczby 10 jako indeks dolny, który oznacza podstawę systemu – w tym przypadku dziesiętnego.

Konwersja części całkowitej

Każdą liczbę można wyrazić w wielu systemach. Jeżeli chcesz zamienić liczbę o danej podstawie na liczbę w innym systemie, musisz dokonać **konwersji**. Nauczysz się teraz zamiany części całkowitej liczby, natomiast z kolejnych lekcji dowiesz się, jak dokonać konwersji części ułamkowej. Wiedza ta przydaje się głównie podczas operacji na rejestrach, np. przy programowaniu w assemblerze lub podczas pracy z mikrokontrolerami. Jeżeli chcesz wykonać konwersję z systemu dziesiętnego na inny, możesz zrobić to na dwa sposoby.

I sposób

Założmy, że chcemy zamienić liczbę $119_{(10)}$ na liczbę w systemie trójkowym. Spójrz na poniższą tabelę przedstawiającą kolejne potęgi liczby 3.

3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6
1	3	9	27	81	243	729

Sprawdźmy, jaka największa możliwa wielokrotność docelowej podstawy liczby jest mniejsza lub równa $119_{(10)}$. Jest to liczba 81, czyli 3^4 . Daje to informację, że docelowa liczba zapisana w systemie trójkowym będzie składała się z pięciu cyfr. Następnie obliczmy, ile razy liczba 81 mieści się w 119. Może mieścić się maksymalnie dwa razy, ponieważ system trójkowy składa się z cyfr 0, 1, 2. Tak w tej chwili wygląda nasza liczba o podstawie 3:

1				
----------	--	--	--	--

x_4

x_3

x_2

x_1

x_0

Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Kolejnym etapem jest odjęcie przekonwertowanej już części.

$$119 - 81 = 38$$

Spójrz na tabelę zawierającą potęgi liczby 3 i sprawdź, czy 3^3 jest mniejsze lub równe od pozostałej części do przekształcenia. Widzimy, że $27 < 38$ – teraz policzmy, ile razy zmieścimy 27 w 38. Będzie to wartość kolejnej cyfry, teraz już na pozycji x_3 .

1	1			
----------	----------	--	--	--

 x_4 x_3 x_2 x_1 x_0

Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Ponownie odejmujemy:

$$38 - 27 = 11$$

Patrzmy na tabelę i pozycję numer dwa: 3^2 jest mniejsze (lub równe) od 11. W liczbie 11 mieści się jeden raz. Na pozycji x_2 wstawiamy ponownie liczbę 1.

1	1	1		
----------	----------	----------	--	--

 x_4 x_3 x_2 x_1 x_0

Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Odejmujemy:

$$11 - 9 = 2$$

Spójrz na tabelę. Czy 3^1 jest mniejsze lub równe 2? Nie jest i dlatego na pozycji x_1 umieszczamy cyfrę 0.

1	1	1	0	
----------	----------	----------	----------	--

 x_4 x_3 x_2 x_1 x_0

Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

W tym przypadku nie musimy już nic odejmować, więc sprawdzimy ostatnią wielokrotność liczby 3, czyli 3^0 . Czy 1 jest mniejsze lub równe 2? Tak, jest mniejsze. Ile razy się mieści? Mieści się 2 razy. W takim razie na pozycji x_0 umieszczamy cyfrę 2. W taki sposób dokonaliśmy konwersji liczby $119_{(10)}$ i otrzymaliśmy $11102_{(3)}$.

1	1	1	0	2
x_4	x_3	x_2	x_1	x_0

Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

II sposób

Możemy również dokonać konwersji w inny sposób: obliczamy iloraz i resztę z dzielenia r_0 liczby X przez podstawę systemu docelowego β . Następnie obliczony poprzednio iloraz ponownie dzielimy przez podstawę β – otrzymujemy w ten sposób kolejny iloraz i resztę z dzielenia r_1 . Wykonujemy powyższy krok aż uzyskamy iloraz równy 0. Uzyskane reszty z dzielenia, czytane w odwrotnej kolejności, dadzą nam liczbę w systemie o wybranej podstawie β . Zamieńmy ponownie liczbę $119_{(10)}$ na liczbę w systemie trójkowym, tym razem według drugiego sposobu. Konwersję przedstawia poniższa grafika.

$$\begin{array}{r|l}
 119 : 3 & \\
 \hline
 39 & 2 \\
 13 & 0 \\
 4 & 1 \\
 1 & 1 \\
 0 & 1 \uparrow
 \end{array}$$

Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Odczytując uzyskane cyfry w odwrotnej kolejności, otrzymujemy liczbę $11102_{(3)}$. Jak widać, uzyskany wynik zgadza się z wynikiem konwersji przeprowadzonej według pierwszego schematu.

Dokładniejszy opis II sposobu znajdziesz w kolejnej części materiału.

Konwersja na system dziesiętny

Aby wykonać konwersję z dowolnego systemu na dziesiętny, przyda nam się wzór na **wartość liczby**. Zamieńmy liczbę $11102_{(3)}$ na liczbę o podstawie 10. Tutaj znowu może przydać nam się tabela przedstawiająca wielokrotności liczby 3.

$$1 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 81 + 27 + 9 + 2 = 119$$

Wynikiem jest liczba, którą wcześniej zamienialiśmy na liczbę o podstawie 3. Teraz wykonywaliśmy działanie odwrotne – otrzymaliśmy ten sam wynik, co oznacza, że wszystkie obliczenia zostały wykonane prawidłowo.

Słownik

waga pozycji

całkowita potęga podstawy, gdzie wykładnik to numer pozycji cyfry

wartość liczby

suma wartości cyfr pomnożonych przez odpowiadające im wagi

konwersja

zamiana liczby z jednego systemu na inny

system pozycyjny

system, w którym znaczenie ma pozycja zapisywanych cyfr; każdej z nich odpowiada waga (zależna od miejsca zajmowanego przez cyfrę i od podstawy systemu)

Schemat interaktywny

Polecenie 1

Przeanalizuj poniższą prezentację. Dowiedz się, w jaki sposób dokonać konwersji z systemu dziesiętnego na system siódmkowy. Następnie spróbuj wytłumaczyć własnymi słowami osobie siedzącej obok proces konwersji.

Polecenie 2

W poniższej aplikacji przygotuj algorytm, który przeliczy liczbę z systemu ósemkowego na system dziesiętny.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Maurycy Gast

Przedmiot: Informatyka

Temat: Konwersja liczb pomiędzy systemami liczbowymi

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum

Podstawa programowa:

Cele kształcenia – wymagania ogólne

I. Rozumienie, analizowanie i rozwiązywanie problemów na bazie logicznego i abstrakcyjnego myślenia, myślenia algorytmicznego i sposobów reprezentowania informacji.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

I. Rozumienie, analizowanie i rozwiązywanie problemów.

Zakres podstawowy. Uczeń:

2) stosuje przy rozwiązywaniu problemów z różnych dziedzin algorytmy poznane w szkole podstawowej oraz algorytmy:

a) na liczbach: badania pierwszości liczby, zamiany reprezentacji liczb między pozycyjnymi systemami liczbowymi, działań na ułamkach z wykorzystaniem NWD i NWW,

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne (językiem ucznia):

- Poznasz systemy pozycyjne o różnych podstawach, na przykład trójkowy, czy piątkowy.
- Wskażesz różnice oraz zależności między systemami o różnych podstawach.
- Wykonasz konwersję liczby z dowolnego systemu na inny.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem multimediu i ćwiczeń interaktywnych.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. **Przygotowanie do zajęć.** Nauczyciel loguje się na platformie i udostępnia e-materiał: „Konwersja liczb pomiędzy systemami liczbowymi”. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel wyświetla uczniom temat zajęć oraz cele. Prosi, by na ich podstawie uczniowie sformułowali kryteria sukcesu.
2. **Rozpoznanie wiedzy uczniów.** Nauczyciel prosi wybranego ucznia lub uczniów o przedstawienie sytuacji problemowej związanej z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Odnosząc się do treści zawartej w sekcji „Przeczytaj”, uczniowie w parach konstruują alternatywny przykład, definiując samodzielnie problem, rozwiązanie i ewentualną implementację. Rezultaty omawiane są na forum klasy.
2. **Praca z multimediu.** Nauczyciel wyświetla zawartość sekcji „Schemat interaktywny”, czyta treść polecenia nr 2: „W poniższym schemacie przygotuj algorytm, który

przeliczy liczbę z systemu ósemkowego na system dziesiętny.” i omawia kolejne kroki rozwiązania.

3. **Ćwiczenie umiejętności.** Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1-8 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel prosi uczniów o podsumowanie zgromadzonej wiedzy.

Praca domowa:

1. Uczniowie proponują alternatywny sposób rozwiązania problemu postawionego w sekcji „Schemat interaktywny”.

Wskazówki metodyczne:

- Uczniowie mogą wykorzystać multimedium w sekcji „Schemat interaktywny” do przygotowania się do lekcji powtórkowej.