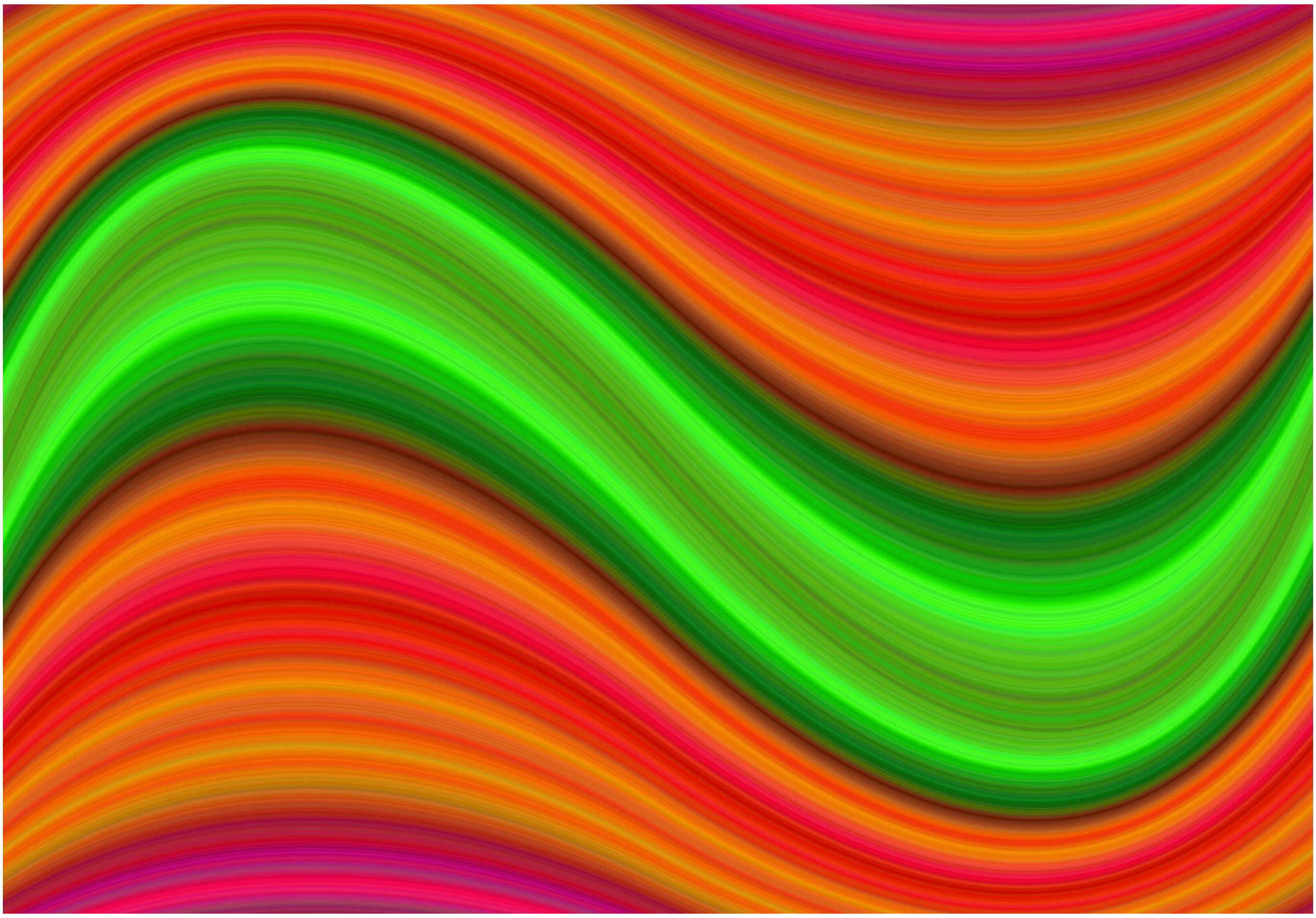


Wykorzystanie wartości funkcji trygonometrycznych kątów 30, 45, 60 stopni w zadaniach geometrycznych

Wykorzystanie wartości funkcji trygonometrycznych kątów 30, 45, 60 stopni w zadaniach geometrycznych

Źródło: dostępny w internecie: Obraz ememem z Pixabay.

Pałac Pokoju i Pojednania, Nur-Sułtan, Kazachstan

Źródło: Ninaras, dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, licencja: CC BY-SA 4.0.

Trójkąt równoboczny jest nam pomocny przy wyprowadzaniu wartości funkcji trygonometrycznych kątów 30° i 60°. Jednym z ciekawszych budynków, w którym wykorzystano ten trójkąt jest Pałac Pokoju i Pojednania w stolicy Kazachstanu. Ma on kształt piramidy składającej się z pięciu kondygnacji trójkątów równobocznych. Każdy bok takiego trójkąta jest równy 12 m.

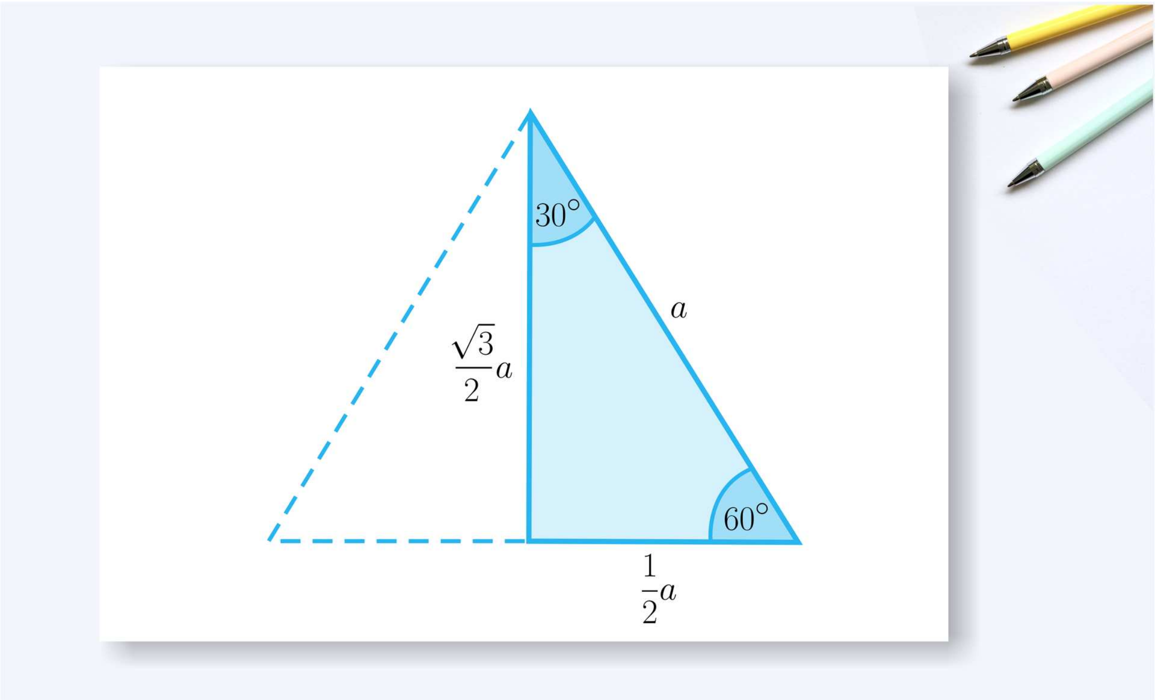
W tym materiale wykorzystamy wartości funkcji trygonometrycznych kątów 30°, 45° i 60° w zadaniach geometrycznych.

Twoje cele

- Wykorzystasz wartości funkcji trygonometrycznych kątów 30°, 45° i 60° do rozwiązywania trójkątów.
- Zastosujesz funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur.

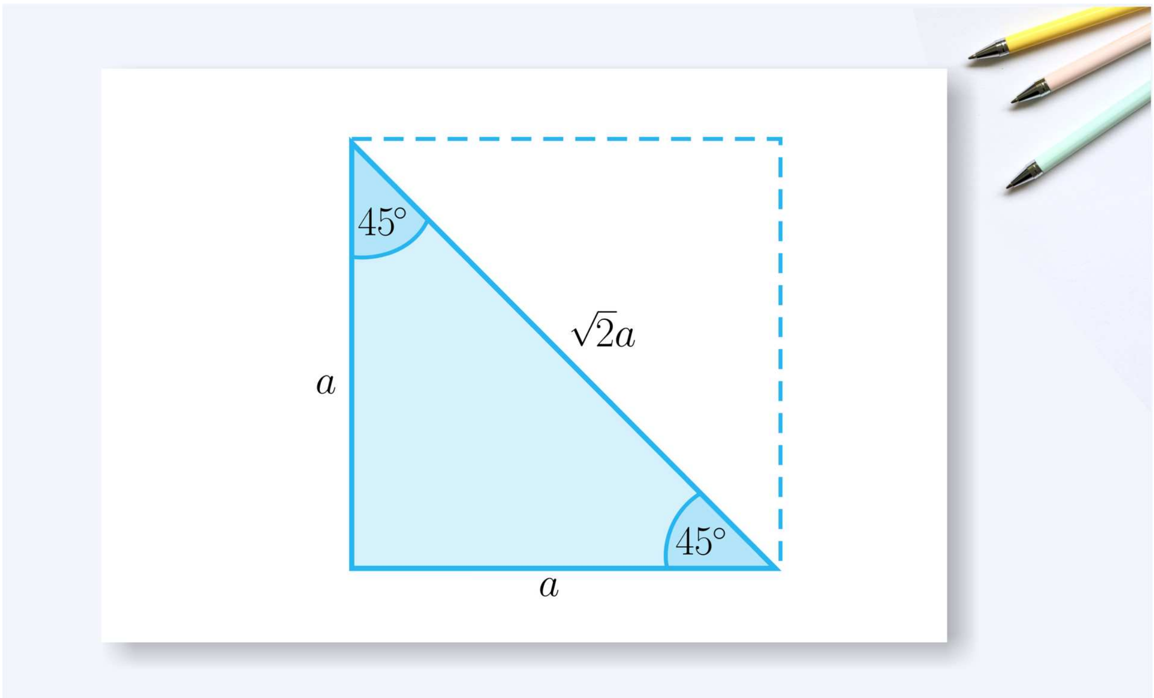
Przeczytaj

Trójkąt prostokątny o kątach 30° i 60° jest połową trójkąta równobocznego.



Zauważmy, że przyprostokątna leżąca przy kącie 60° jest połową przeciwprostokątnej.

Trójkąt prostokątny o kącie 45° jest połową kwadratu.



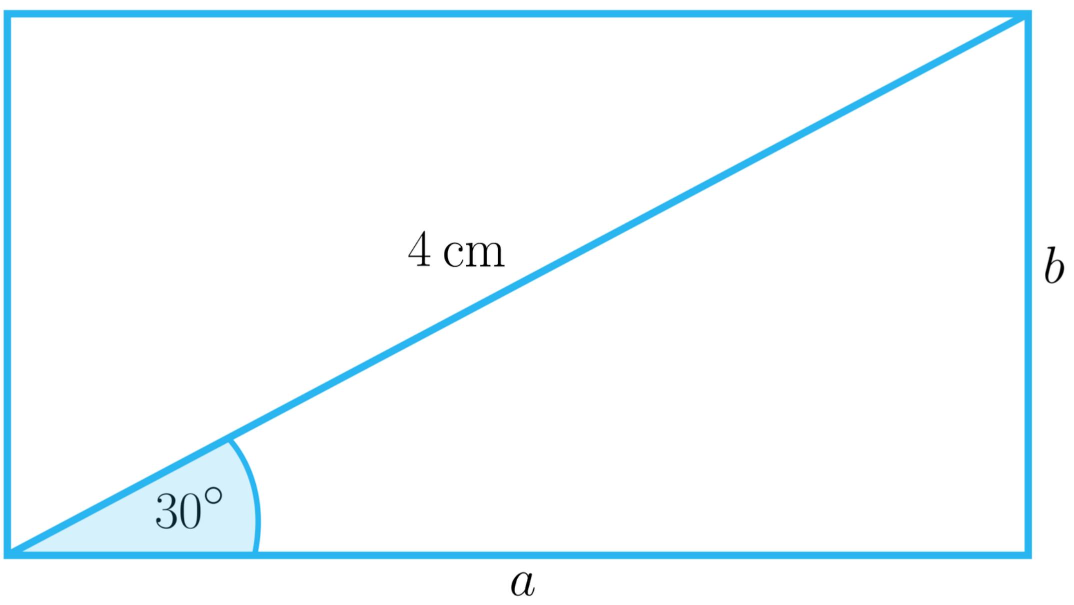
Zauważmy, że jest to trójkąt prostokątny równoramienny, czyli przyprostokątne są sobie równe.

Wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30°, 45°, 60° przedstawia tabela:

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Przykład 1

Przekątna prostokąta ma długość 4 cm i tworzy z dłuższym bokiem kąt o mierze 30°. Obliczymy obwód prostokąta.



Aby obliczyć obwód prostokąta, należy wyznaczyć długości jego boków. Przekątna „dzieli” prostokąt na dwa trójkąty prostokątne. Możemy zastosować więc funkcje trygonometryczne.

Bok a wyznaczymy z funkcji cosinus:

$\cos 30^\circ = \frac{a}{4}$ i $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, czyli $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{4}$, zatem $2 \cdot a = \sqrt{3} \cdot 4$, więc $a = 2\sqrt{3}$ cm.

Bok b wyznaczymy z funkcji sinus:

$\sin 30^\circ = \frac{b}{4}$, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, więc $\frac{1}{2} = \frac{b}{4}$, $b = 2$ cm.

Mogliśmy wyznaczyć b,wykorzystując fakt, że długość przyprostokątnej trójkąta prostokątnego leżącej naprzeciw kąta 30° jest połową długości przeciwprostokątnej, czyli $b = 4 : 2 = 2$ cm.

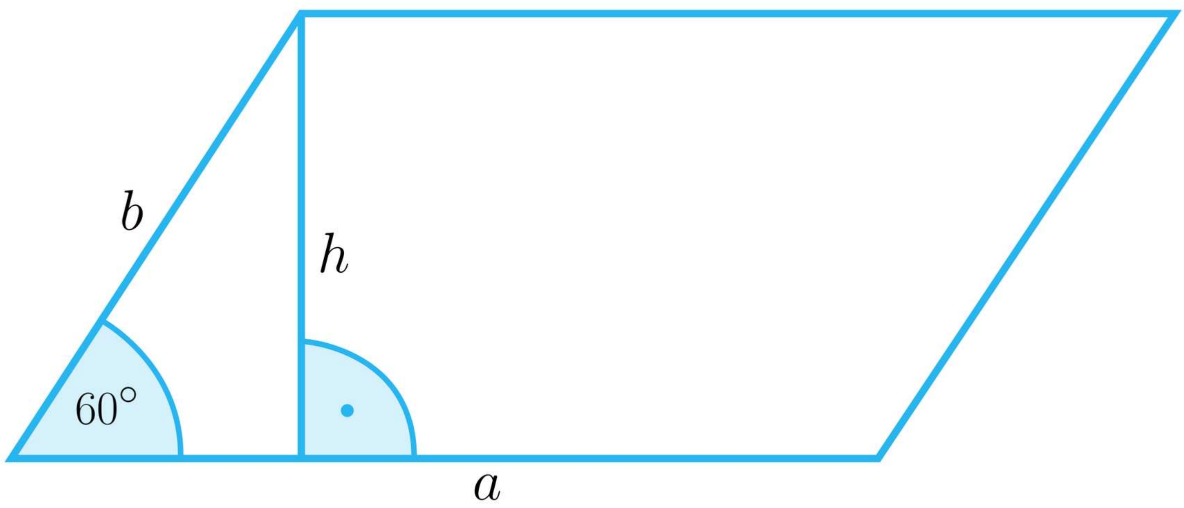
Obwód prostokąta zapisujemy za pomocą wzoru: $L = 2a + 2b$.

Podstawiając $a = 2\sqrt{3}$ cm i $b = 2$ cm, otrzymujemy
$L = 2 \cdot 2\sqrt{3} + 2 \cdot 2 = 4\sqrt{3} + 4 = 4\left(\sqrt{3} + 1\right)$ cm.

Odp. Obwód prostokąta wynosi $4\left(\sqrt{3} + 1\right)$ cm.

Przykład 2

Obwód równoległoboku wynosi 60 cm. Jeden bok jest 2 razy krótszy od drugiego. Obliczymy pole tego równoległoboku, jeżeli kąt ostry ma miarę 60°.



Oznaczmy:
h – wysokość równoległoboku,
a, b – boki równoległoboku,
L – obwód równoległoboku.

Z treści zadania wynika, że: $L = 60$ cm i $a = 2b$.

Ze wzoru na obwód równoległoboku mamy $L = 2a + 2b = 2 \cdot 2b + 2b = 4b + 2b = 6b$, a ponieważ $L = 60$, to $6b = 60$, stąd $b = 10$ cm, a ponieważ $a = 2b$, to $a = 20$ cm.

Aby wyliczyć pole równoległoboku, musimy wyznaczyć jego wysokość h. Wysokość jest prostopadła do boku a, możemy więc skorzystać z funkcji sinus.

$\frac{h}{b} = \sin 60^\circ$ i $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, więc $\frac{h}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, stąd $h = b \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, podstawiając $b = 10$, otrzymujemy $h = \frac{10 \cdot \sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ cm.

Obliczamy pole równoległoboku: $P = ah = 20 \cdot 5\sqrt{3} = 100\sqrt{3}$ cm^2.

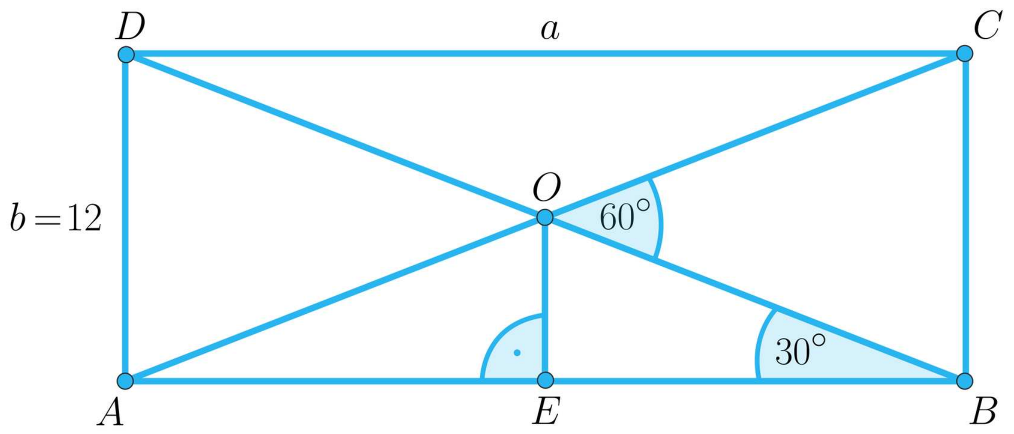
Odp. Pole równoległoboku wynosi $100\sqrt{3}$ cm^2.

Przykład 3

Obliczymy obwód prostokąta, którego przekątne przecinają się pod kątem 60°, a jeden z boków jest równy 12 cm. Rozważymy dwa przypadki.

Przypadek 1 ($b = 12$ cm):

Z rysunku wynika, że: $\sphericalangle AOB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, $\sphericalangle EOB = 120^\circ : 2 = 60^\circ$, więc $\sphericalangle EBO = 30^\circ$.



kąt $AOB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$
kąt $EOB = 120^\circ : 2 = 60^\circ$
więc kąt $EBO = 30^\circ$

Zauważmy, że: $|AE| = |EB| = \frac{1}{2}a$, $|OE| = \frac{1}{2}b = 6$ cm i kąt EBO ma miarę 30°. Trójkąt OEB jest prostokątny, więc korzystając z funkcji tangens wyliczmy długość boku a:

$\frac{|OE|}{|EB|} = \text{tg } 30^\circ$, a ponieważ $|EB| = \frac{1}{2}a$ i $|OE| = 6$, więc $\frac{6}{\frac{a}{2}} = \text{tg } 30^\circ$, $6 = \frac{a}{2} \cdot \text{tg } 30^\circ$ i $\text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, stąd

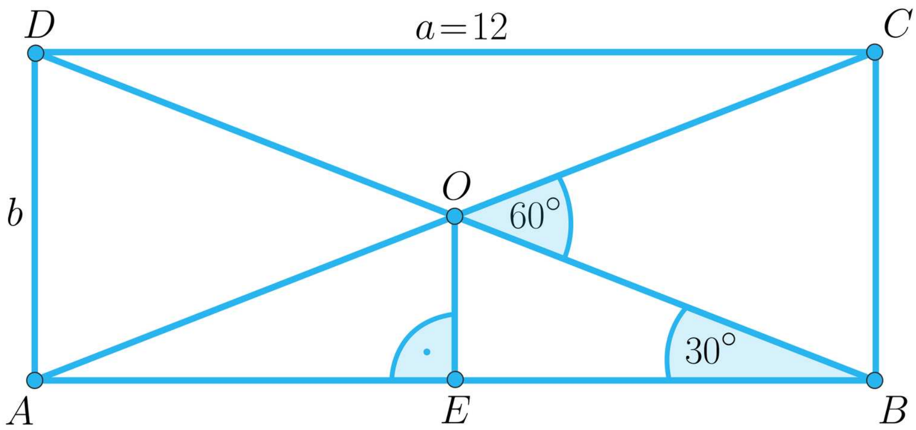
$a = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{12 \cdot 3}{\sqrt{3}} = \frac{36}{\sqrt{3}} = \frac{36 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = 12 \cdot \sqrt{3}$ cm.

Ze wzoru na obwód prostokąta: $L = 2a + 2b$ otrzymujemy

$L = 2 \cdot 12\sqrt{3} + 2 \cdot 12 = 24\sqrt{3} + 24 = 24\left(\sqrt{3} + 1\right)$ cm.

Odp. Obwód prostokąta wynosi $24\left(\sqrt{3} + 1\right)$ cm.

Przypadek 2 ($a = 12$ cm):



kąt $AOB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$
kąt $EOB = 120^\circ : 2 = 60^\circ$
więc kąt $EBO = 30^\circ$

Z rysunku wynika, że: $\sphericalangle AOB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, $\sphericalangle EOB = 120^\circ : 2 = 60^\circ$, więc $\sphericalangle EBO = 30^\circ$.

Zauważmy, że: $|AE| = |EB| = \frac{1}{2}a = 6$ cm, $|OE| = \frac{1}{2}b$ i kąt EBO ma miarę 30°. Trójkąt OEB jest prostokątny, więc korzystając z funkcji tangens wyliczymy długość boku b:

$\frac{|OE|}{|EB|} = \text{tg } 30^\circ$, $|OE| = \frac{1}{2}b$ i $|EB| = 6$, więc $\frac{\frac{b}{2}}{6} = \text{tg } 30^\circ$, $\frac{b}{2} = 6 \cdot \text{ tg } 30^\circ$, a ponieważ $\text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, to otrzymujemy $b = \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$ cm.

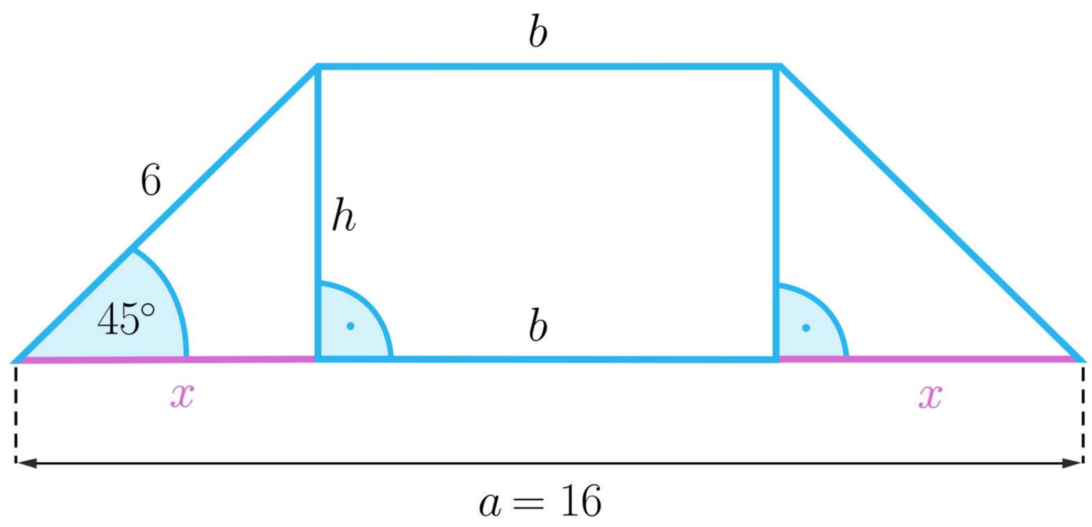
Ze wzoru na obwód prostokąta $L = 2a + 2b$ obliczamy

$L = 2 \cdot 12 + 2 \cdot 4\sqrt{3} = 24 + 8\sqrt{3} = 8\left(3 + \sqrt{3}\right)$ cm.

Odp. Obwód prostokąta wynosi $8\left(3 + \sqrt{3}\right)$ cm.

Przykład 4

Obliczmy pole trapezu równoramiennego, którego dłuższa podstawa ma długość 16 cm, a ramię o długości 6 cm tworzy z podstawą kąt 45°.



Przyjmując oznaczenia jak na rysunku, możemy zapisać $a=2x+b$, a ponieważ $a=16$, to $2x+b=16$.

Do wyznaczenia pola trapezu wykorzystamy wzór $P=\frac{a+b}{2}\cdot h$.

Wyznaczmy wysokość trapezu h, korzystając z funkcji sinus: $\sin 45^\circ=\frac{h}{6}$ i $\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$, czyli $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{h}{6}$, $2\cdot h=\sqrt{2}\cdot 6$, więc $h=3\sqrt{2}$ cm.

Aby wyznaczyć długość krótszej podstawy, musimy obliczyć długość odcinka x. W tym celu, zapisując $\cos 45^\circ=\frac{x}{6}$ i podstawiając $\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$, otrzymujemy $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{x}{6}$, $2\cdot x=\sqrt{2}\cdot 6$, więc $x=3\sqrt{2}$ cm.

Mogliśmy x wyznaczyć, wykorzystując fakt, że przyprostokątne w trójkącie prostokątnym równoramiennym są równe, więc $x=h=3\sqrt{2}$ cm.

Przejdźmy teraz do wyliczenia krótszej podstawy b trapezu.

Z równania $2x+b=16$ wyznaczamy $b=16-2x$ i podstawiając $x=3\sqrt{2}$, otrzymujemy

$$b=16-2\cdot 3\sqrt{2}=16-6\sqrt{2}=2\left(8-3\sqrt{2}\right)\text{ cm.}$$

Wyliczone wartości h i b podstawiamy do wzoru na pole trapezu $P=\frac{a+b}{2}\cdot h$.

$$P=\frac{a+b}{2}\cdot h=\frac{16+16-6\sqrt{2}}{2}\cdot 3\sqrt{2}=\frac{32-6\sqrt{2}}{2}\cdot 3\sqrt{2}=$$

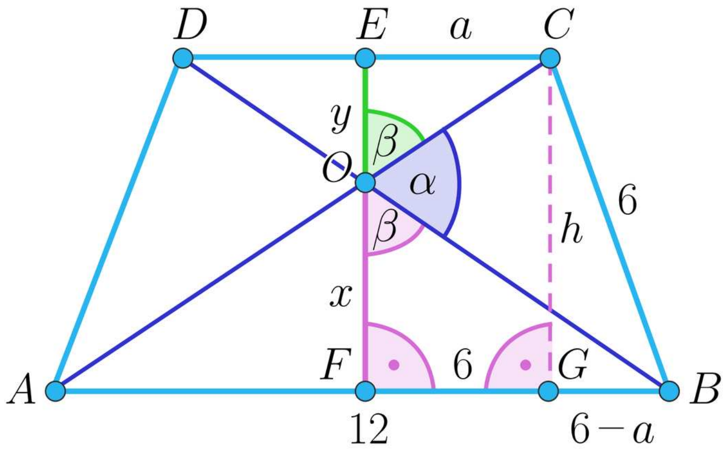
$$=\frac{2\left(16-3\sqrt{2}\right)}{2}\cdot 3\sqrt{2}=\left(16-3\sqrt{2}\right)\cdot 3\sqrt{2}=48\sqrt{2}-18=18\left(\sqrt{2}-1\right)\text{ cm}^2$$

Odp. Pole trapezu wynosi $18\left(\sqrt{2}-1\right)$ cm^2.

Przykład 5

Dłuższa podstawa trapezu ma długość 12 a ramię jest 2 razy krótsze od tej podstawy. Przekątne tego trapezu przecinają się pod kątem 60°. Obliczymy długość drugiej podstawy tego trapezu.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:



Skoro $\alpha = 60^\circ$, to $2\beta = 120^\circ$, zatem $\beta = 60^\circ$.

W trójkącie FBO: $\operatorname{tg}\beta = \frac{6}{x}$, więc: $\operatorname{tg}60^\circ = \frac{6}{x}$, stąd: $x = \frac{6}{\operatorname{tg}60^\circ} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.

W trójkącie EOC: $\operatorname{tg}\beta = \frac{a}{y}$, stąd: $a = y \cdot \operatorname{tg}60^\circ = y\sqrt{3}$.

Skorzystamy z tw. Pitagorasa w trójkącie CGB:

$$h^2 + (6-a)^2 = 6^2$$

$$(x+y)^2 + \left(6 - y\sqrt{3}\right)^2 = 36$$

$$\left(2\sqrt{3} + y\right)^2 + \left(6 - y\sqrt{3}\right)^2 = 36$$

$$12 + 4\sqrt{3}y + y^2 + 36 - 12y\sqrt{3} + 3y^2 = 36$$

$$4y^2 - 8y\sqrt{3} + 12 = 0$$

$$\left(2y - 2\sqrt{3}\right)^2 = 0$$

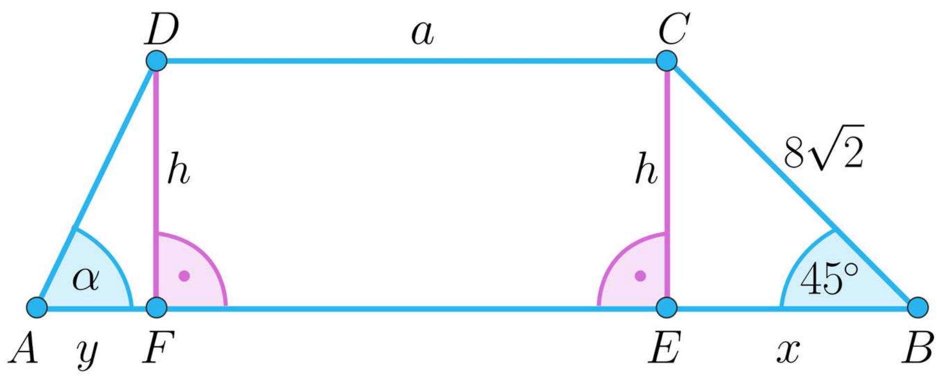
$$y = \sqrt{3}.$$

Zatem: $a = 3$.

Przykład 6

Dłuższe ramię trapezu ma długość $8\sqrt{2}$ i jest nachylone do dłuższej podstawy pod kątem 45°. Wyznaczymy miarę kąta nachylenia drugiego ramienia do dłuższej podstawy, jeśli pole trapezu wynosi 96, a długości podstaw są w stosunku $1 : 3$.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:



Obliczymy długość boku EB. W trójkącie CEB: $\cos 45^{\circ} = \frac{x}{8\sqrt{2}}$, stąd: $x = 8\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 8$.

Podobnie:

$\sin 45^{\circ} = \frac{h}{8\sqrt{2}}$, zatem: $h = 8\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 8$.

Z treści zadania $|AB| = 3a$.

Zauważmy, że: $|AB| = y + |FE| + x$, stąd: $3a = y + a + 8$, czyli: $y = 2a - 8$.

Skorzystamy z pola trapezu:

$96 = \frac{a+3a}{2} \cdot 8$

$4a = 24$

$a = 6$

Zatem: $y = 2 \cdot 6 - 8 = 4$.

W trójkącie AFD: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{y}$, stąd: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{4} = 2$ i w konsekwencji $\alpha \approx 64^{\circ}$.

Słownik

równoległobok

czworokąt, w którym przynajmniej jedna para boków jest do siebie równoległa

trapez

czworokąt, w którym przynajmniej jedna para boków jest do siebie równoległa; boki równoległe nazywamy podstawami trapezu

wysokość trapezu

odległość między podstawami trapezu

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją dotyczącą wykorzystania wartości funkcji trygonometrycznych kątów 30°, 45°, 60°. Następnie rozwiąż zadania i porównaj z odpowiedziami.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/Do2Bjuz96

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej wykorzystania wartości funkcji trygonometrycznych kątów 30, 60, 45 stopni w zadaniach geometrycznych.

Polecenie 2

Ramiona trapezu są nachylone do jego dłuższej podstawy pod kątem 30° i 45°. Krótsza podstawa ma długość $8 \ \mathrm{cm}$ i jest równa wysokości h trapezu. Oblicz pole i obwód tego trapezu.

Polecenie 3

W trójkącie równoramiennym suma długości ramienia i wysokości wynosi 6, a kąt przy podstawie równy jest 30°. Oblicz pole tego trójkąta.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

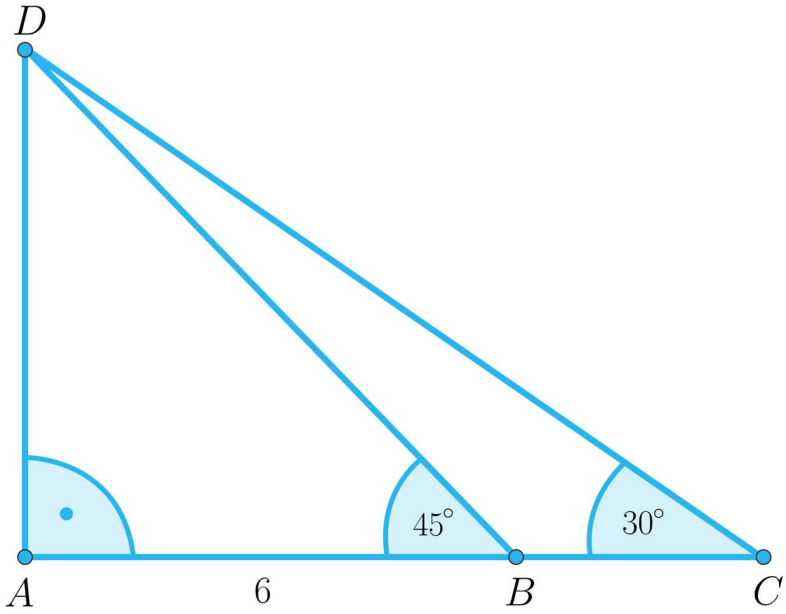
Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

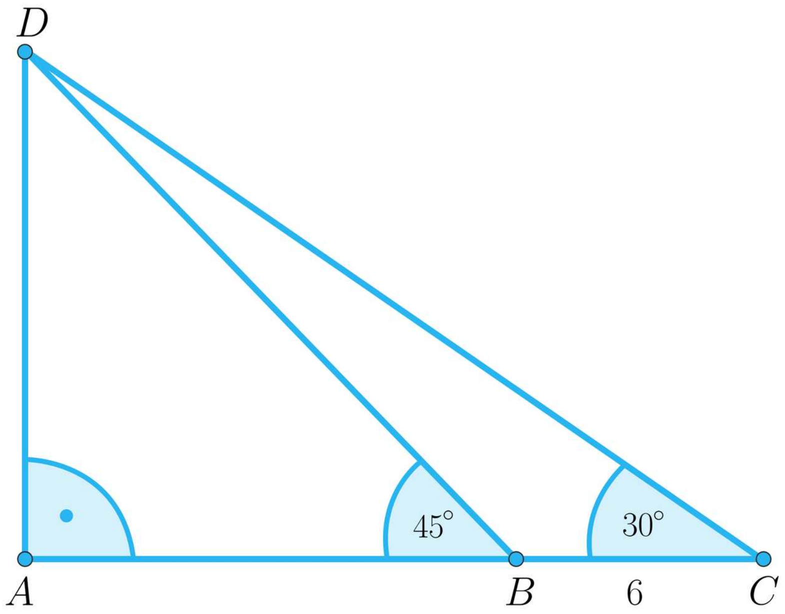
Ćwiczenie 7

Na rysunku przedstawiono trójkąt ACD, w którym długość odcinka AB wynosi 6, kąt ABD ma miarę 45°, a kąt ACD ma miarę 30°. Uzupełnij pola odpowiednimi wartościami.



Ćwiczenie 8

Na rysunku przedstawiono trójkąt ACD, w którym długość odcinka BC wynosi 6, kąt ABD ma miarę 45°, a kąt ACD ma miarę 30°.



Dla nauczyciela

Autor: Katarzyna Podfigurna

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wykorzystanie wartości funkcji trygonometrycznych kątów 30, 60, 45 stopni w zadaniach geometrycznych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
VII. Trygonometria. Zakres podstawowy. Uczeń:
1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180° , w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30°, 45°, 60°;
6) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty).
VIII. Planimetria. Zakres podstawowy. Uczeń:
4) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach;
11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykorzystuje wartości funkcji trygonometrycznych kątów 30°, 45° i 60° do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich,
- wykorzystuje wartości funkcji trygonometrycznych kątów 30°, 45° i 60° do obliczenia pól figur;
- analizuje zadania z zastosowaniem funkcji trygonometrycznych kątów 30°, 45° i 60° oraz wybiera najefektywniejszą metodę prowadzącą do ich rozwiązania.

- rozwiązuje zadania z z zastosowaniem funkcji trygonometrycznych kątów 30°, 45° i 60°.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- wykład informacyjny
- burza mózgów
- pokaz multimedialny

Formy pracy:

- praca indywidualna,
- praca w grupach,
- praca całego zespołu.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu,
- projektor multimedialny,
- e-podręcznik,
- arkusze papieru, pisaki

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

- uczniowie podają definicje funkcji trygonometrycznych (zapisują je na tablicy);
- nauczyciel podaje temat i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

- nauczyciel dzieli uczniów na 3-osobowe grupy;
- każda z grup otrzymuje zadanie polegające na analizie materiału zawartego w sekcji Przeczytaj;
- uczniowie w grupach analizują przykłady zawarte w sekcji Przeczytaj;
- nauczyciel kontroluje pracę uczniów udzielając im wskazówek;
- uczniowie oglądają animację i omawiają go wraz z nauczycielem;
- uczniowie rozwiązują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela;

Faza podsumowująca:

- wybrani uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych wskazanych przez nauczyciela; uczniowie określają co było dla nich trudne lub niezrozumiałe a nauczyciel udziela wyjaśnień;
- nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia aktywność uczniów.

Praca domowa:

- Zadaniem uczniów jest wykonanie ćwiczeń interaktywnych, które nie zostały rozwiązane na lekcji.

Materiały pomocnicze:

- Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego
- Przykłady - funkcje trygonometryczne w zadaniach

Wskazówki metodyczne:

Materiały zawarte w multimedium uczniowie mogą wykorzystać w przygotowaniu się do lekcji. Umożliwi im to wystąpienie na zajęciach w roli ekspertów.