



Silnia w zastosowaniach

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Ten materiał poświęcimy na prezentację zastosowań pojęcia silni.

Pokażemy na przykładach, jak operować wyrażeniami arytmetycznymi oraz algebraicznymi zapisanymi z użyciem symbolu silni.

Opiszemy również sposób, dzięki któremu można ustalić rozkład liczby $n!$ na czynniki pierwsze.

Twoje cele

- Będziesz doskonalić umiejętność posługiwania się symbolem silni.
- Nauczysz się, jak przekształcać wyrażenia arytmetyczne, w których występują liczby zapisane za pomocą silni.
- Znajomość pojęcia silni pozwoli Ci przekształcać wyrażenia algebraiczne zapisane z użyciem silni, również w zadaniach na dowodzenie.
- Dzięki prezentowanym metodom dowiesz się, jak przedstawiać $n!$ w rozkładzie na czynniki pierwsze.

Przeczytaj

Operowanie symbolem silni w zadaniach sprowadza się zazwyczaj do wyróżniania pewnych jej czynników, a następnie do przekształcania otrzymanych wyrażeń do postaci, którą sugeruje polecenie.

Np. w zadaniach, w których istotne jest analizowanie zapisu dziesiętnego rozpatrywanej liczby warto mieć na uwadze jej czynniki podzielne przez 2 oraz podzielne przez 5.

Natomiast w zadaniach, w których chcemy wykazać, że rozpatrywana liczba jest kwadratem liczby całkowitej przydatne będzie grupowanie czynników w pary takich samych liczb oraz zapis danej liczby w postaci iloczynu potęg liczb całkowitych o parzystych wykładnikach.

Przykład 1

Wyznamy wszystkie dodatnie liczby całkowite n , które spełniają nierówność

$$4! \cdot 6! \cdot (n+3)! < n! \cdot 10!.$$

Rozwiązanie

Przekształcając nierówność równoważnie otrzymujemy kolejno

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6! \cdot n! \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) < n! \cdot 6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10,$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) < 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10,$$

$$(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) < 210 = 5 \cdot 6 \cdot 7.$$

Ponieważ ciąg $a_n = (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)$, gdzie $n \geq 1$, jest rosnący oraz $a_4 = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$, więc nierówność $a_n < 210$ jest spełniona dla $n \in \{1, 2, 3\}$.

Przykład 2

Wykażemy, że w zapisie dziesiętnym liczby

$$S = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! + \dots + 23 \cdot 23! + 24 \cdot 24!$$

występuje co najmniej 6 dziewiątek.

Rozwiązanie

Rozpatrzmy liczbę

$$w = 1! + 2! + 3! + 4! + \dots + 23! + 24!.$$

Zauważmy, że

$$S + w = (1 + 1) \cdot 1! + (2 + 1) \cdot 2! + (3 + 1) \cdot 3! + \dots + (24 + 1) \cdot 24!,$$

a więc

$$S + w = 2! + 3! + 4! + \dots + 25!.$$

Wobec tego

$$S = 2! + 3! + 4! + \dots + 25! - (1! + 2! + 3! + \dots + 24!) = 25! - 1! = 25! - 1.$$

Ponieważ wśród czynników liczby $25!$ są między innymi 2, 4, 5, 10, 15, 20 oraz 25, więc ta liczba dzieli się przez iloczyn

$$2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 20 \cdot 25 = 3000000.$$

Wynika stąd, że każda z sześciu ostatnich cyfr zapisu dziesiętnego liczby $25!$ jest zerem, a to oznacza, że sześć ostatnich cyfr liczby

$$S = 25! - 1$$

to dziewiątki.

To spostrzeżenie kończy dowód.

Uwaga!

Uogólniając spostrzeżenia poczynione w powyższym przykładzie zauważamy, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej k zachodzi równość

$$k \cdot k! = ((k + 1) - 1) \cdot k! = (k + 1) \cdot k! - k! = (k + 1)! - k!,$$

skąd wniosek, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej k

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + k \cdot k! &= (2 \cdot 1! - 1!) + (3 \cdot 2! - 2!) + \dots + ((k + 1) \cdot k! - k!) = \\ &= (2! - 1!) + (3! - 2!) + \dots + ((k + 1)! - k!) = (k + 1)! - 1! = (k + 1)! - 1. \end{aligned}$$

Dla $k = 24$ otrzymujemy w szczególności

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + 24 \cdot 24! = 25! - 1.$$

Przykład 3

Ustalimy, ile jest równa suma trzech ostatnich cyfr liczby

$$x = 10! + 11! + 12! + 13! + 14! + 15! + 16! + 17! + 18! + 19! + 20!.$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że każdy ze składników liczby x dzieli się przez $10!$, a więc dzieli się przez iloczyn $2 \cdot 5 \cdot 10 = 100$. Oznacza to, że dwie ostatnie cyfry liczby x są zerami.

Ponieważ wśród czynników liczby $15!$ są między innymi 4, 5, 10, 15, więc $15!$ dzieli się przez $4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 15 = 3000$.

Wynika stąd, że trzy ostatnie cyfry sumy

$$15! + 16! + 17! + 18! + 19! + 20!$$

są zerami.

Obliczamy, że

$$\frac{10!}{100} = 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 36288.$$

Wobec tego trzecia od końca cyfra liczby x to iloczyn liczby 8 przez cyfrę jedności liczby $\frac{10!+11!+12!+13!+14!}{10!}$.

Ta liczba jest równa $1 + 11 + 11 \cdot 12 + 11 \cdot 12 \cdot 13 + 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14$, a jej ostatnią cyfrą jest 4 (aby ją wyznaczyć wystarczy sprawdzić, że ostatnią cyfrą składników tej sumy są kolejno: 1, 1, 2, 6 oraz 4).

Ponieważ $4 \cdot 8 = 32$, więc ostatecznie stwierdzamy, że trzecia od końca cyfra liczby x to 2. Oznacza to, że suma trzech ostatnich cyfr liczby x jest równa 2.

Uwaga!

Korzystając z własności [przystawania liczb całkowitych](#) modulo 1000, a także z [twierdzeń o działaniach arytmetycznych](#) na otrzymanych [kongruencjach](#), kolejne wnioski sformułowane powyżej możemy zapisać następująco

$$10! = (2 \cdot 5 \cdot 10) \cdot (3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) = 100 \cdot 36288 \equiv 800 \pmod{1000},$$

$$10! + 11! + 12! + 13! + 14! \equiv$$

$$\equiv 800 \cdot (1 + 11 + 11 \cdot 12 + 11 \cdot 12 \cdot 13 + 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14) \equiv$$

$$800 \cdot 1 + 800 \cdot 1 + 800 \cdot 2 + 800 \cdot 6 + 800 \cdot 4 \equiv 200 \pmod{1000}$$

$$15! = 10! \cdot (11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14) \cdot 15 \equiv 0 \pmod{1000},$$

skąd

$$x \equiv 200 \pmod{1000}.$$

Przykład 4

Wykażemy, że liczba

$$a = 35 \cdot 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5! \cdot 6! \cdot 7! \cdot 8! \cdot 9! \cdot 10! \cdot 11! \cdot 12! \cdot 13! \cdot 14! \cdot 15! \cdot 16! \cdot 17! \cdot 18!$$

jest kwadratem liczby naturalnej.

Rozwiązanie

Zauważmy, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej k prawdziwa jest równość

$$(2k - 1)! \cdot (2k)! = (2k - 1)! \cdot (2k - 1)! \cdot (2k) = ((2k - 1)!)^2 \cdot (2k).$$

Wynika stąd, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n prawdziwe są poniższe równości

$$\begin{aligned} 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2n - 1)! \cdot (2n)! &= \\ &= (1! \cdot 2!) \cdot (3! \cdot 4!) \cdot \dots \cdot ((2n - 1)! \cdot (2n)!) = \\ &= (1!)^2 \cdot 2 \cdot (3!)^2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot ((2n - 1)!)^2 \cdot (2n) = \\ &= (1! \cdot (3!) \cdot \dots \cdot (2n - 1)!)^2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n) = \\ &= (1! \cdot (3!) \cdot \dots \cdot (2n - 1)!)^2 \cdot (1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n) \cdot 2^n = \\ &= (1! \cdot (3!) \cdot \dots \cdot (2n - 1)!)^2 \cdot n! \cdot 2^n. \end{aligned}$$

Korzystając z powyższej tożsamości możemy zapisać

$$\begin{aligned} a &= 35 \cdot 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5! \cdot 6! \cdot 7! \cdot 8! \cdot 9! \cdot 10! \cdot 11! \cdot 12! \cdot 13! \cdot 14! \cdot 15! \cdot 16! \cdot 17! \cdot 18! = \\ &= 35 \cdot 2^9 \cdot 9! \cdot (1! \cdot 3! \cdot \dots \cdot 17!)^2. \end{aligned}$$

Ponieważ

$$35 \cdot 2^9 \cdot 9! = 5 \cdot 7 \cdot 2^9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 = 2^{16} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2$$

więc

$$a = 2^{16} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot (1! \cdot 3! \cdot \dots \cdot 17!)^2 = (2^8 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot (1! \cdot 3! \cdot \dots \cdot 17!))^2.$$

Oznacza to, że liczba a jest kwadratem liczby całkowitej.

Słownik

ciąg

funkcja, której dziedziną jest zbiór wszystkich dodatnich liczb całkowitych lub pewien jego podzbiór, a wartościami są liczby rzeczywiste

kongruencja modulo n

jeśli liczby całkowite a i b dają tę samą resztę z dzielenia przez dodatnią liczbę całkowitą n , to n jest dzielnikiem $a - b$; tę relację zapisujemy symbolicznie $a \equiv b \pmod{n}$ i czytamy: „ a przystaje do b modulo n ”

twierdzenie o działaniach arytmetycznych na kongruencjach

rozpatrzmy dodatnią liczbę całkowitą n oraz liczby całkowite a, b, c oraz d ; wówczas

- jeżeli $a \equiv b \pmod{n}$ to dla dowolnej liczby c prawdziwe są kongruencje $a + c \equiv b + c \pmod{n}$ oraz $ac \equiv bc \pmod{n}$,
- jeżeli $a \equiv b \pmod{n}$ oraz $c \equiv d \pmod{n}$ to prawdziwe są kongruencje $a + c \equiv b + d \pmod{n}$ oraz $ac \equiv bd \pmod{n}$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z przedstawioną poniżej animacją. Przeanalizuj zaprezentowane w niej rozwiązanie zadania, w którym pokazane jest, jak ustalić dziesięć ostatnich cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby $41!$.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D14pouKC3>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej silni w zastosowaniach.

Polecenie 2

Korzystając z przykładu omówionego w animacji rozwiąż samodzielnie następujące zadanie.

Liczbę $52!$ można zapisać w postaci

$$52! = 3^{\alpha} \cdot 7^{\beta} \cdot 11^{\gamma} \cdot 13^{\delta} \cdot k,$$

gdzie k jest liczbą, która nie ma wspólnych dzielników z liczbą 3003.

Oblicz $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dobierz w pary wielkości odpowiadające równym odcinkom czasowym.

11! sekund

66 tygodni

7! dni

2160 tygodni

10! minut

720 tygodni

9! godzin

360 tygodni

Ćwiczenie 2



Oblicz, nie używając kalkulatora:

$$\frac{(15!+14!)\cdot(14!+13!)\cdot(13!+12!)\cdot(12!+11!)\cdot(11!+10!)}{(15!-14!)\cdot(14!-13!)\cdot(13!-12!)\cdot(12!-11!)\cdot(11!-10!)}$$

W kratkach poniżej wpisz kolejno cyfry: jedności i dwie pierwsze po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

--	--	--

Ćwiczenie 3



Dodatnia liczba całkowita n spełnia warunek

$$(3! \cdot 5!) \cdot n! = ((3!)!)!$$

Oblicz n .

W kratkach poniżej wpisz kolejno cyfry: setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

--	--	--

Ćwiczenie 4



Liczba $50!$ nie jest podzielna przez:

☐ 53

☐ 51

☐ 54

☐ 52

Ćwiczenie 5



Dla pewnych dodatnich liczb całkowitych α, β, γ, n , gdzie n jest liczbą względnie pierwszą z liczbą 30, zachodzi równość

$$120! = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma \cdot n$$

Połącz podane niżej liczby tak, aby w każdej w ten sposób dobranej parze otrzymać liczby równe.

$$\alpha - \beta$$

$$2\beta - 28$$

$$\alpha - \gamma$$

$$3\gamma - 26$$

$$\alpha - 82$$

$$\beta + \gamma$$

$$\alpha - 30$$

$$3\beta - 5\gamma$$

Ćwiczenie 6



Rozpatrujemy zbiór 100 kolejnych liczb naturalnych

$$\{101! + 2, 101! + 3, 101! + 4, \dots, 101! + 101\}$$

Oblicz, ile jest w tym zbiorze liczb złożonych.

☐ 51

☐ 99

☐ 100

☐ 50

Ćwiczenie 7



Oblicz sumę wszystkich dodatnich liczb całkowitych n , które spełniają nierówność

$$2! \cdot (n + 2)! < 6! \cdot n!$$

Zakoduj w kratkach poniżej kolejne cyfry rozwinięcia dziesiętnego otrzymanej sumy.

--	--	--

Ćwiczenie 8



Dodatnia liczba całkowita n spełnia warunek

$$1 + (1 \cdot 1!) + (2 \cdot 2!) + (3 \cdot 3!) + \dots + 234 \cdot 234! = n!$$

Wynika stąd, że

☐ $n > 235$

☐ $n < 240$

☐ $n < 237$

☐ $n > 236$

Ćwiczenie 9



Dodatnia liczba całkowita n spełnia warunek

$$n = 27! \cdot \left(\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{25}{26!} \right).$$

Wynika stąd, że

☐ $n > (4!)!$

☐ $n < 26! + 25!$

☐ $n > 27! - 5!$

☐ $n < 27! - 4!$

Dla nauczyciela

Autor: Paweł Kwiatkowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Silnia w zastosowaniach

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XI. Kombinatoryka.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1. oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- posługuje się symbolem silni,
- przekształca wyrażenia arytmetyczne, w których występują liczby zapisane za pomocą silni,
- przekształca wyrażenia algebraiczne zapisane z użyciem silni, również w zadaniach na dowodzenie,
- przedstawia $n!$ w rozkładzie na czynniki pierwsze.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- metoda tekstu przewodniego;
- quiz;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia temat zajęć: „Silnia w zastosowaniach” oraz wspólne z uczniami ustalenie kryteriów sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie, metodą tekstu przewodniego zapoznają się z treścią w sekcji „Przeczytaj” i zapisują w zeszycie minimum dwa pytania.
2. Następnie nauczyciel dzieli uczniów na dwie grupy. Grupy na przemian zadają przygotowane wcześniej pytania grupie przeciwnej, która udziela odpowiedzi. Nauczyciel uzupełnia wyjaśnienia. Wygrywa grupa, której członkowie udzielali najbardziej wyczerpujących odpowiedzi.
3. Uczniowie zapoznają się z Animacją i rozwiązują polecenia z nią związane.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne nr 3-9 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel podsumowuje przebieg zajęć. Wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne nr 1-2 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Pojęcie silni](#)

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel może wykorzystać animację do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jej treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie pracować na lekcji.