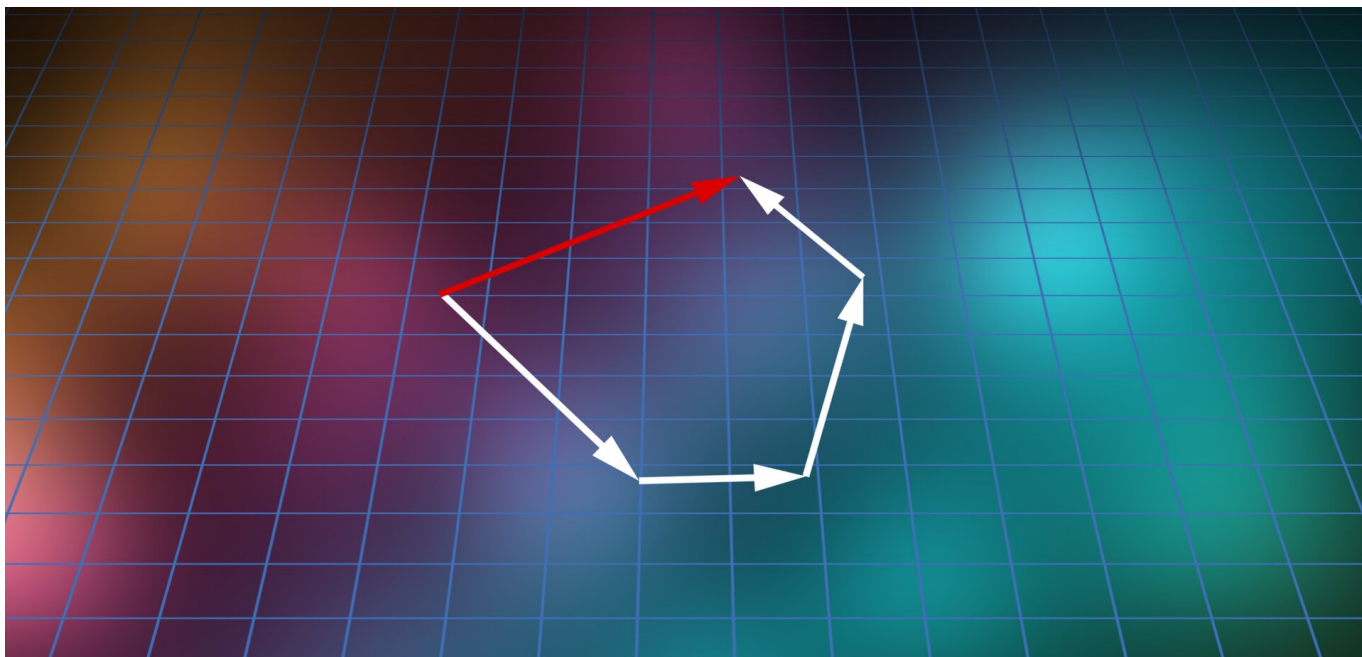
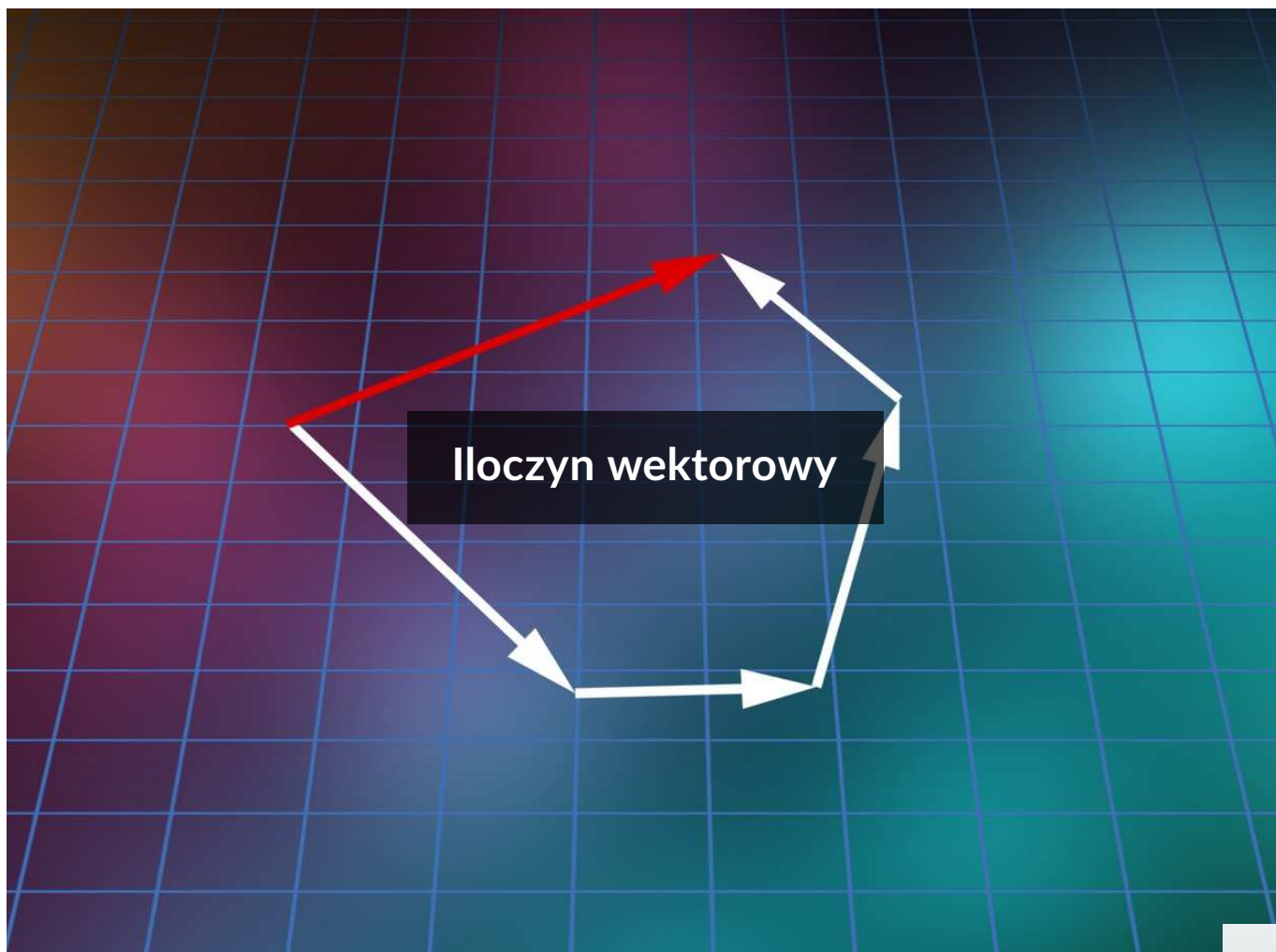




Iloczyn wektorowy

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Czy to nie ciekawe?

Wektor to uporządkowana para punktów. Wielkości wektorowe w fizyce stanowią szczególną grupę. Do ich opisu nie wystarczy podać ich wartości, ale należy też uwzględnić kierunek i zwrot. Jak więc mnożyć takie wielkości? Czy jest to w ogóle możliwe? Jaki może być wynik takiego mnożenia? Czy będzie to wielkość wektorowa czy skalarna?

Twoje cele

W tym e-materiale:

- zrozumiesz, czym są wektory,
- dowiesz się, że znane są różne mnożenia z udziałem wektorów,
- poznasz definicję iloczynu wektorowego oraz jego właściwości,
- przeanalizujesz przykład wyznaczania iloczynu wektorowego.

Przeczytaj

Warto przeczytać

Istnieje pewna szczególna grupa wielkości fizycznych – wielkości wektorowe. Do opisu takiej wielkości nie wystarczy podać jej wartości; należy jeszcze uwzględnić jej kierunek i zwrot. Powstaje pytanie: jakie działania możemy wykonywać z udziałem wielkości wektorowych?

Możemy wykonywać działania mnożenia na wektorach, jednak jest to bardziej skomplikowane niż na skalarach. Mamy trzy możliwości mnożenia z udziałem wektorów:

- iloczyn wektorowy wektorów – jego wynikiem jest zawsze wektor,
- iloczyn skalarny wektorów – jego wynikiem jest zawsze skalar,
- mnożenie wektora przez skalar – jego wynikiem jest zawsze wektor.

W tym e-materiale omówimy iloczyn wektorowy wektorów.

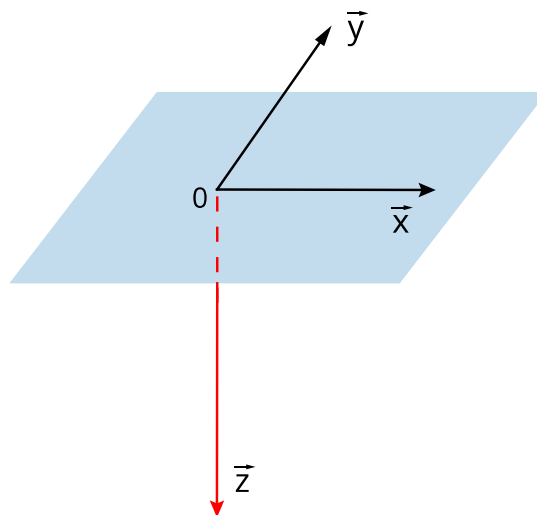
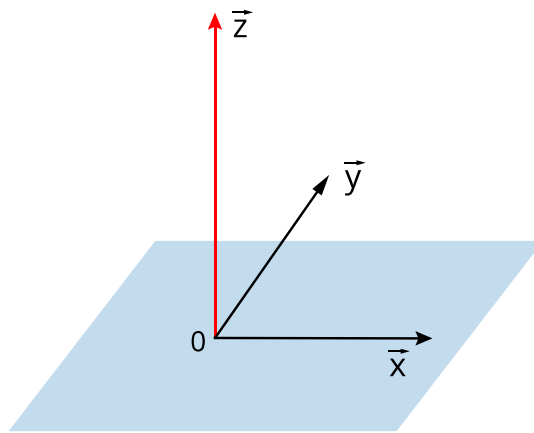
Wynikiem iloczynu wektorowego dwóch wektorów $\vec{x}$ i $\vec{y}$ jest zawsze wektor, nazwijmy go $\vec{z}$ i zapiszmy tę operację następująco:

$$\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$$

Znak $\times$ jest symbolem iloczynu wektorowego.

Wektor $\vec{z}$ jest skierowany pod kątem 90 stopni do płaszczyzny utworzonej przez wektory $\vec{x}$, $\vec{y}$. Zwrot wektora $\vec{z}$ ustalamy w oparciu o regułę śruby prawoskrętnej.

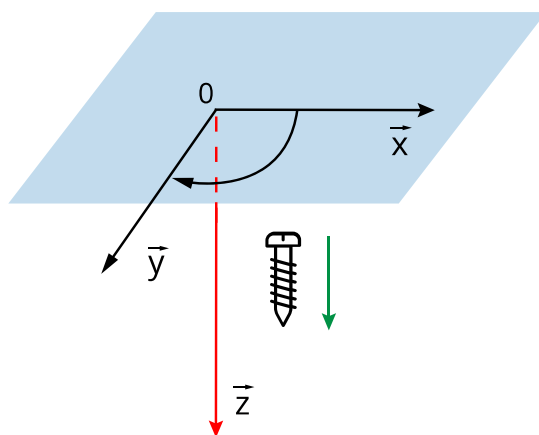
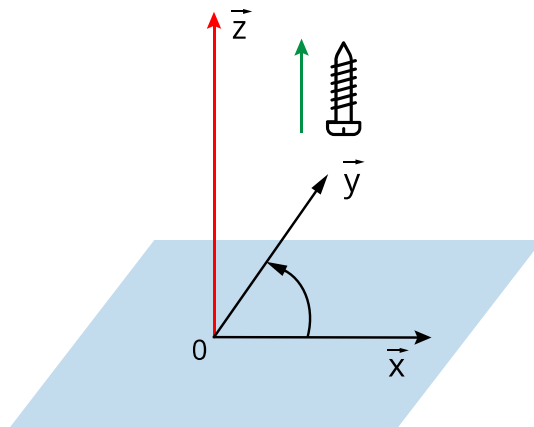
Czym jest reguła śruby prawoskrętnej? Jak łatwo zauważyć, jeśli wektor $\vec{z}$ ma być ustawiony pod kątem prostym do płaszczyzny wektorów $\vec{x}$, $\vec{y}$ to mamy dwie możliwości takiego ustawienia (Rys. 1.):



Rys. 1. Dwa możliwe sposoby ustawienia wektora $\vec{z}$ prostopadłego do płaszczyzny $\vec{x}$, $\vec{y}$: a) zwrot wektora $\vec{z}$ zgodny z regułą śruby prawoskrętnej, b) przedstawiono zwrot niezgodny z tą regułą

Metodą na wybranie właściwego zwrotu jest właśnie **reguła śruby prawoskrętnej**. Polega ona na tym, że gdy mnożymy wektor $\vec{x}$ przez wektor $\vec{y}$, to najpierw przesuwamy jeden z nich równolegle tak, by ich początki były w jednym punkcie. Następnie (w wyobraźni) obracamy pierwszym czynnikiem iloczynu (tutaj: wektorem $\vec{x}$) ku drugiemu czynnikowi (tutaj: ku wektorowi $\vec{y}$). Wybieramy kierunek obrotu wyznaczony przez mniejszy z dwóch kątów, jakie tworzą te wektory. Na koniec określamy zwrot przemieszczenia **prawoskrętnej**

śruby, która obracałaby się tak samo, jak wektor $\vec{x}$ (Rys. 2.). Ten właśnie zwrot przypisujemy wektorowi $\vec{z}$.



Rys. 2. Prawidłowy zwrot wektora $\vec{z}$ będącego wynikiem iloczynu wektorowego: $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$

Zwróć uwagę na to, że iloczyn wektorowy nie jest przemienny, $\vec{x} \times \vec{y} \neq \vec{y} \times \vec{x}$. Kierunek i wartość są takie same, ale zwroty są przeciwne. Zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej

$$\vec{x} \times \vec{y} = -(\vec{y} \times \vec{x})$$

Kolejnym krokiem, po ustaleniu kierunku i zwrotu iloczynu wektorowego, będzie wyliczenie jego wartości.

Wartość wektora będącego wynikiem iloczynu wektorowego wektora $\vec{x}$ przez wektor $\vec{y}$ jest równa iloczynowi wartości wektorów $\vec{x}$ i $\vec{y}$ oraz sinusa kąta między nimi.

Dla iloczynu wektorowego:

$$\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$$

$$|\vec{z}| = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \sin \alpha$$

gdzie α jest kątem między wektorem $\vec{x}$ a wektorem $\vec{y}$. Jeśli kąt α jest rozwarty, to stosujemy tożsamość:

$$\sin \alpha = \sin (180^\circ - \alpha)$$

Ale po co nam właściwie iloczyn wektorowy?

Wielkości fizyczne są potrzebne do opisu zjawisk fizycznych. Możemy wyróżnić wielkości wektorowe i wielkości skalarne. Okazuje się, że do zdefiniowania niektórych wielkości wektorowych musimy posłużyć się iloczynem wektorowym. Tak jest w przypadku między innymi: [momentu siły](#), [siły elektrodynamicznej](#) i [siły Lorentza](#). Każda z tych wielkości jest dokładnie opisana w e-materiałach. Tu poznasz je jako przykłady zastosowania iloczynu wektorowego.

Moment siły to iloczyn wektorowy promienia wodzącego $\vec{r}$ o początku w punkcie podparcia i końcu w punkcie przyłożenia siły, oraz siły $\vec{F}$:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

(Więcej szczegółów o momencie siły znajdziesz w e-materiałach „*Jak definiuje się moment siły?*” i „*Jak wyznaczyć moment siły*”.)

Drugim takim przykładem jest siła działająca na ładunek w polu magnetycznym.

Na ładunek dodatni q poruszający się z prędkością v w polu magnetycznym o indukcji B działa siła zwana siłą Lorentza:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

Siła ta jest definiowana jako iloczyn ładunku i iloczynu wektorowego wektora prędkości przez wektor indukcji pola magnetycznego.

(Więcej szczegółów o sile Lorentza znajdziesz w e-materialach „Czym jest siła Lorentza?” i „Jakie siły działają na pętlę z przewodnika z prądem w jednorodnym polu magnetycznym?”.)

Kolejnym przykładem wielkości fizycznej definiowanej jako iloczyn wektorowy innych wielkości wektorowych jest siła działająca na przewodnik, przez który płynie prąd, umieszczony w polu magnetycznym. Przepływ prądu to uporządkowany ruch ładunków elektrycznych, a na ładunek poruszający się w polu magnetycznym działa siła Lorentza. Z tego wniosek, że na płynący prąd powinna działać jakaś siła ze strony pola magnetycznego. Jeśli rozpatrzmy prostoliniowy przewodnik o długości l umieszczony w polu magnetycznym o indukcji B , przez który płynie prąd elektryczny natężeniu I , to siła działająca na ten przewodnik wynosi

$$\vec{F} = I \vec{l} \times \vec{B}$$

Siłę tę nazywamy siłą elektrodynamiczną.

(Więcej szczegółów o sile elektrodynamicznej znajdziesz w e-materialach „Co to jest [siła elektrodynamiczna](#)?” i „Od jakich parametrów zależy wartość siły elektrodynamicznej – na podstawie doświadczeń”.)

Słowniczek

moment siły

wielkość wektorowa niezbędna do sformułowania warunku równowagi bryły sztywnej zdefiniowana jako to iloczyn wektorowy promienia wodzącego $\vec{r}$ o początku w punkcie podparcia i końcu w punkcie przyłożenia siły, oraz siły $\vec{F}$:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

siła Lorentza

wielkość wektorowa niezbędna do opisu ruchu cząstki naładowanej w polu magnetycznym, zdefiniowana jako iloczyn ładunku i iloczynu wektorowego wektora prędkości cząstki przez wektor indukcji pola magnetycznego:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

siła elektrodynamiczna

opisuje oddziaływanie pola magnetycznego na umieszczony w nim przewodnik z prądem. Siłę elektrodynamiczną definiujemy jako iloczyn natężenia prądu i iloczynu wektorowego wektora długości prostoliniowego przewodnika, przez który płynie ten

prąd (wektor ten ma kierunek i zwrot przepływu prądu) przez wektor indukcji pola magnetycznego.

$$\vec{F} = I \vec{l} \times \vec{B}$$

Film samouczek

Iloczyn wektorowy

Obejrzyj film, w którym przedstawione jest zastosowanie iloczynu wektorowego do analizy równowagi na huśtawce.

[Film dostępny na portalu epodreczniki.pl](https://epodreczniki.pl)

Wysłuchaj alternatywnej ścieżki lektorskiej.

Ćwiczenie 1

Opisz ciąg zmian wielkości fizycznych wywołanych niewielkim przemieszczeniem się syna na huśtawce w kierunku punktu podparcia. Wskaż te spośród wymienionych w filmie odległości, wartości sił i momentów sił, które zmaleją bądź wzrosną oraz te, które pozostaną bez zmian. Twój opis powinien stanowić uzasadnienie tezy, że wskutek takiego przemieszczenia równowaga huśtawki zostanie naruszona, a syn powędruje do góry.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz zdania fałszywe:

- ☐ Wynikiem mnożenia wektora przez skalar jest zawsze wektor
- ☐ Iloczyn wektorowy jest przemienny
- ☐ Wynikiem iloczynu skalarnego wektorów jest zawsze wektor
- ☐ Wynikiem iloczynu wektorowego wektorów jest zawsze wektor

Ćwiczenie 2



Zaznacz zdanie prawdziwe:

- ☐ Kierunek wektora będącego wynikiem iloczynu wektorowego wyznaczamy metodą śruby lewoskrętnej
- ☐ Zwrot wektora będącego wynikiem iloczynu wektorowego wyznaczamy metodą śruby prawoskrętnej
- ☐ Zwrot wektora będącego wynikiem iloczynu wektorowego wyznaczamy metodą śruby lewoskrętnej
- ☐ Kierunek wektora będącego wynikiem iloczynu wektorowego wyznaczamy metodą śruby prawoskrętnej

Ćwiczenie 3



Do końca pręta w odległości 2m od osi obrotu przyłożono siłę o wartości 2N, prostopadłe do pręta. Wartość wektora momentu tej siły wynosi (zaznacz poprawną odpowiedź):

☐ 4 Nm

☐ -4 Nm

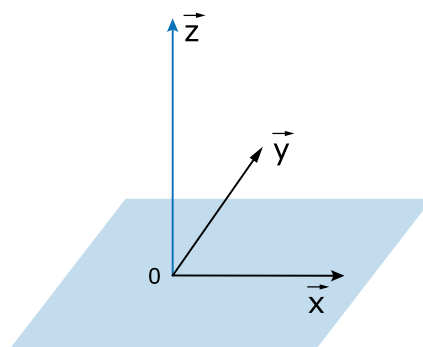
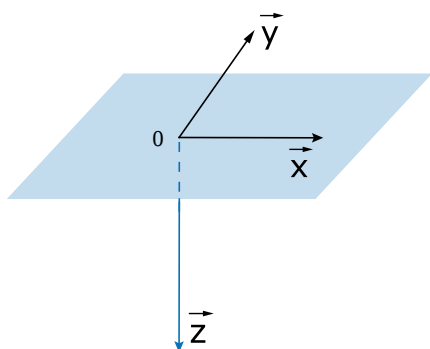
☐ 2 Nm

☐ -2 Nm

Ćwiczenie 4



Wykonujemy iloczyn wektorowy $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$. Który rysunek poprawnie przedstawia zwrot wektora $\vec{z}$?



Ćwiczenie 5



Poniżej przedstawiono opis kilku wielkości fizycznych: - pęd jest równy iloczynowi masy i wektora prędkości, - moment pędu jest równy iloczynowi wektorowemu wektora wodzącego oraz wektora pędu, - moment bezwładności punktu materialnego jest iloczynem masy tego punktu oraz kwadratu jego odległości od osi obrotu, - praca jest równa iloczynowi skalarnemu wektora siły oraz wektora przemieszczenia. Pogrupuj powyższe wielkości określając czy są to wielkości wektorowe czy skalarne.

Wielkości wektorowe

moment pędu

praca

pęd

moment bezwładności

Wielkości skalarne

Ćwiczenie 6



Chłopiec siedzi na huśtawce-równoważni. Waży on 10 kg i działa na huśtawkę siłą 98 N skierowaną pionowo w dół. Odległość od punktu podparcia wynosi 1 m. Wskaż właściwą wartość momentu siły, jakim chłopiec działa na huśtawkę.

☐ $\left| \vec{M} \right| = 10 \text{ Nm}$

☐ $\left| \vec{M} \right| = -98 \text{ Nm}$

☐ $\left| \vec{M} \right| = -10 \text{ Nm}$

☐ $\left| \vec{M} \right| = 98 \text{ Nm}$

Ćwiczenie 7



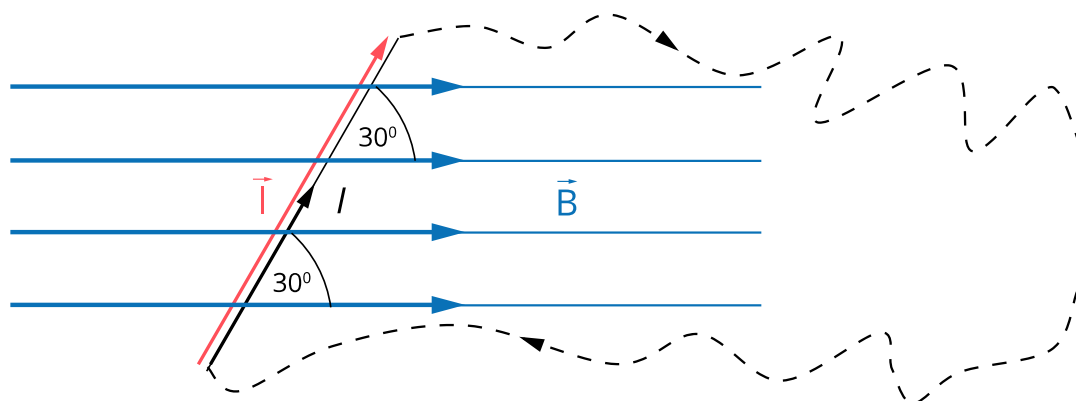
Chłopiec siedzi na huśtawce-równoważni, w odległości 1 m od punktu podparcia. Wskaż właściwy kierunek momentu siły, z jakim chłopiec działa na huśtawkę.

- ☐ Moment siły jest skierowany pionowo w dół.
- ☐ Moment siły jest skierowany poziomo prostopadle do huśtawki.
- ☐ Moment siły jest skierowany poziomo równoległe do huśtawki.
- ☐ Moment siły jest skierowany pionowo w górę.

Ćwiczenie 8



Przez fragment przewodnika o długości 3 m przepływa prąd o natężeniu 4 A. Wiedząc, że wartość indukcji pola magnetycznego wynosi 3 mT, a kąt pomiędzy kierunkami przepływu prądu a wektorem indukcji pola magnetycznego wynosi 30° (patrz rysunek), wskaż poprawną wartość siły elektrodynamicznej działającej na ten fragment:



☐ $|\vec{F}| = -18 \text{ mN}$

☐ $|\vec{F}| = 36 \text{ mN}$

☐ $|\vec{F}| = 18 \text{ mN}$

☐ $|\vec{F}| = -36 \text{ mN}$

Dla nauczyciela

Imię i nazwisko autora:	Martyna Jakubowska
Przedmiot:	Fizyka
Temat zajęć:	Jak posługiwać się współrzędnymi wektora?
Grupa docelowa:	III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony
Podstawa programowa:	Cele kształcenia - wymagania ogólne I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości. Zakres rozszerzony Treści nauczania - wymagania szczegółowe I. Wymagania przekrojowe. Uczeń: 5) rozróżnia wielkości wektorowe i skalarne, wykonuje graficznie działania na wektorach (dodawanie, odejmowanie, rozkładanie na składowe).
Kształtowane kompetencje kluczowe:	• kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji, • kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii, • kompetencje cyfrowe.
Cele operacyjne:	1. Uczeń zrozumie czym są wektory. 2. Uczeń pozna różnice między iloczynem wektorowym a iloczynem skalarnym. 3. Uczeń pozna definicję iloczynu wektorowego. 4. Uczeń pozna właściwości iloczynu wektorowego. 5. Uczeń przeanalizuje przykład wyznaczania iloczynu wektorowego.
Strategie i metody nauczania:	– blended-learning, – nauczanie hybrydowe.
Formy zajęć:	– film samouczek, – praca w grupach.

Środki dydaktyczne:	– komputer z rzutnikiem, – kartka w kratkę, – linijka, – długopis.
Materiały pomocnicze:	Zadania podobne do tych z Zestawu ćwiczeń, o zróżnicowanym stopniu trudności, przygotowane przez nauczyciela do podyktowania uczniom.
PRZEBIEG LEKCJI	
Faza wprowadzająca:	
Rozpoznanie wiedzy ucznia: Czy uczeń słyszał już o wektorach, czy wie, czym są wektory (może zetknął się z tym pojęciem na matematyce?). Przeczytanie i omówienie „Wprowadzenia”.	
Faza realizacyjna:	
Uczniowie samodzielnie czytają blok tekstowy. Nauczyciel sprawdza, czy uczniowie mają jakieś pytania do tekstu. Sprawdza, czy uczniowie potrafią zastosować regułę śruby prawoskrętnej, prosząc kilku uczniów o określenie zwrotu przykładowych wektorów będących wynikiem iloczynu wektorowego. Następnie uczniowie oglądają „Samouczek”. Nauczyciel sprawdza, czy uczniowie mają jakieś pytania związane z samouczkiem. Uczniowie wspólnie zastanawiają się nad pytaniami, które się pojawiły. Nauczyciel naprowadza uczniów na właściwe odpowiedzi. Jeśli zajdzie taka potrzeba uczniowie wracają to wybranego fragmentu tekstu lub samouczka. Nauczyciel udziela dokładniejszych informacji na temat wielkości fizycznych opisanych w samouczku. Na koniec tej fazy, uczniowie rozwiązują zadania z Zestawu ćwiczeń.	
Faza podsumowująca:	
Uczniowie dzielą się na 4 grupy, w których omawiają rozwiązania zadań. Wspólnie zastanawiają się nad tymi, które sprawiły im trudność. Każda z grup omawia 2 zadania „na forum klasy”. Nauczyciel sprawdzi, które zadania sprawiły uczniom kłopot i dlaczego. Poprzez analizę wypowiedzi uczniów nauczyciel określi, w jakim stopniu osiągnięte zostały wyznaczone cele.	
Praca domowa:	
Nauczyciel wybiera trzy zadania spośród przygotowanych przez siebie, analogiczne do tych, które uczniowie wskazali jako najtrudniejsze. Te poleca do rozwiązania w domu.	

Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania danego multimedium:	Multimedium może być wykorzystane jako wstęp do lekcji lub w czasie lekcji tak, jak pokazano w konspekcie.
--	--