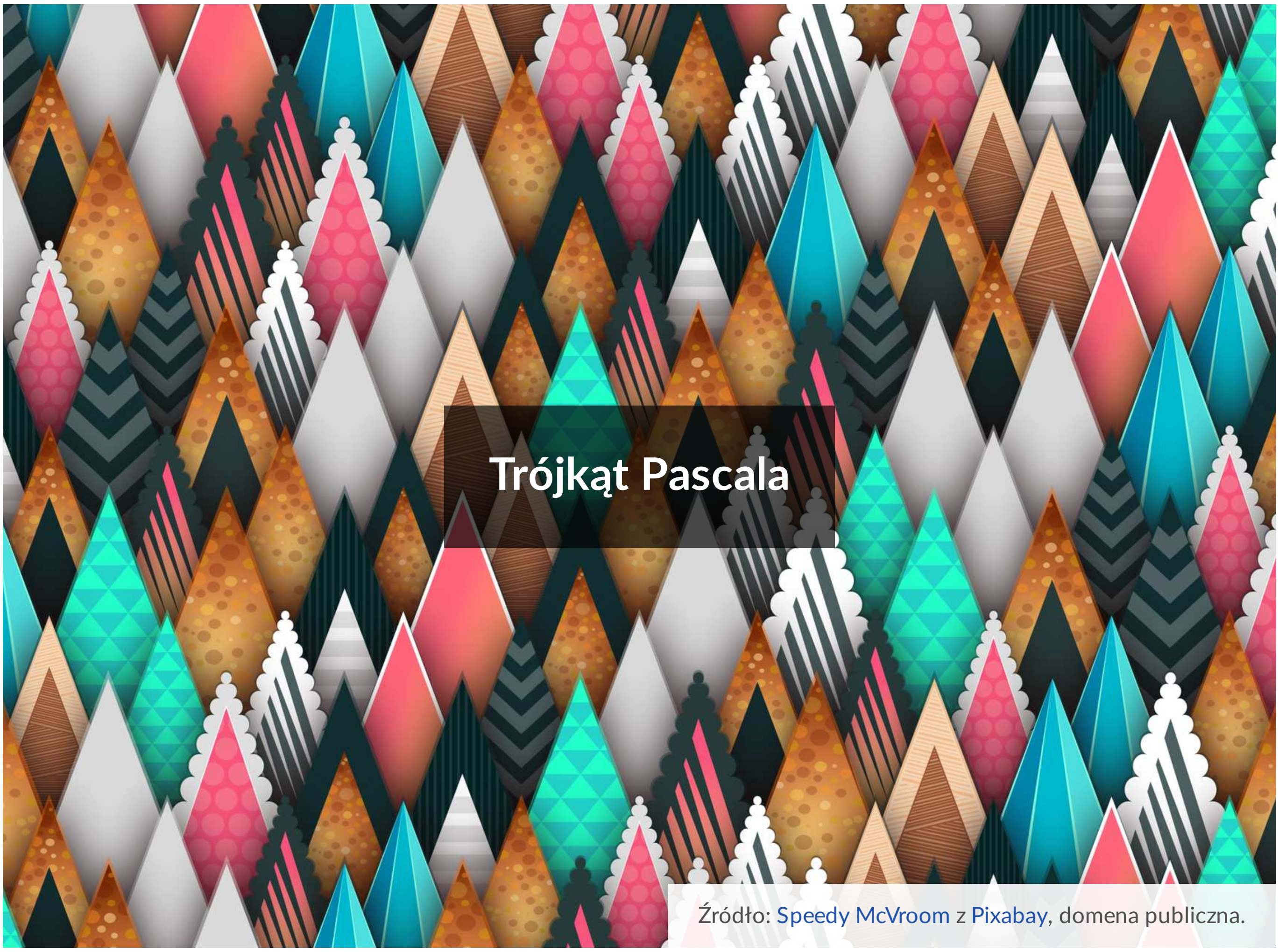
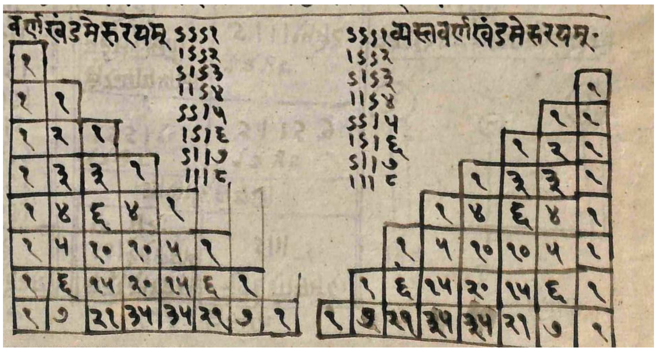
Trójkąt Pascala



Trójkąt Pascala

Źródło: Speedy McVroom z Pixabay, domena publiczna.

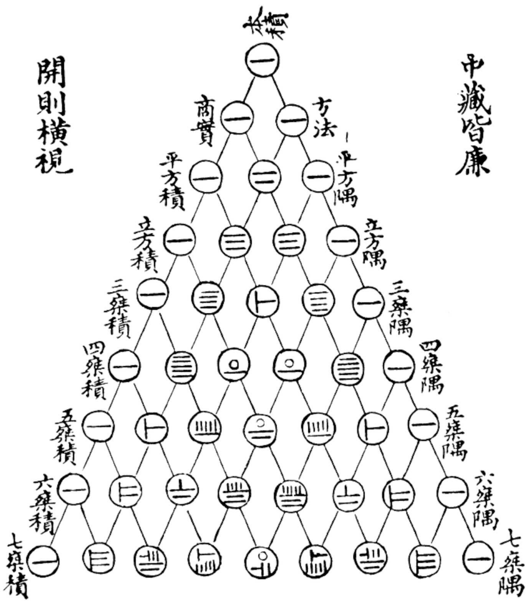


Trójkątna tablica liczb z rękopisu indyjskiego z VII wieku.

Źródło: Wikipedia.org, dostępny w internecie: www.wikipedia.org, domena publiczna.

W tym materiale poznasz niezwykłą, trójkątną tablicę liczbową. Uważa się, że początki tworzenia tej tablicy sięgają początków naszej ery. Na przestrzeni wieków zajmowali się nią między innymi uczeni perscy, indyjscy, chińscy. Dlatego określa się ją też trójkątem Chajjama, trójkątem Yang Hui lub trójkątem Tartaglii, od nazwisk uczonych, którzy badali własności tej tablicy.

W XVII w. matematyk francuski Blaise Pascal zebrał wszystkie informacje na temat tych trójkątnych tablic i zastosował je do rozwiązywania problemów z rachunku prawdopodobieństwa. Osiągnął przy tym tak znaczące wyniki, że obecnie trójkąt, który rozpropagował, zwany jest trójkątem Pascala.



Chiński trójkąt Yang Hui z XIV w.

Źródło: Wikipedia.org, dostępny w internecie: www.wikipedia.org, domena publiczna.

Trójkąt Pascala ma wiele ciekawych własności. Niektóre z nich poznasz, a niektóre nawet odkryjesz samodzielnie.

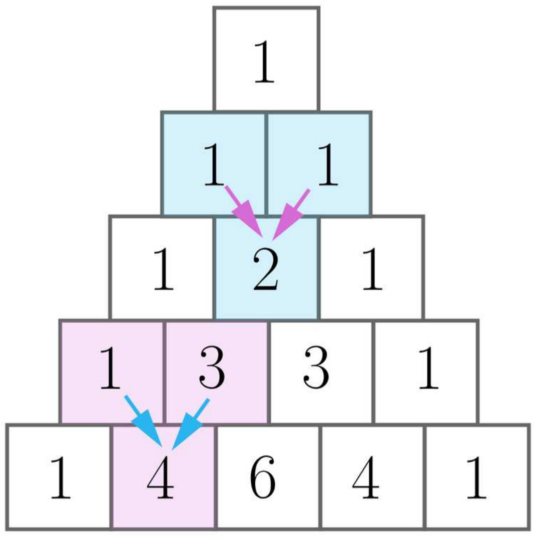
Twoje cele

- Zbudujesz trójkąt Pascala.
- Odkryjesz niektóre z własności trójkąta Pascala.
- Wykorzystasz własności trójkąta Pascala w przekształceniach arytmetycznych.

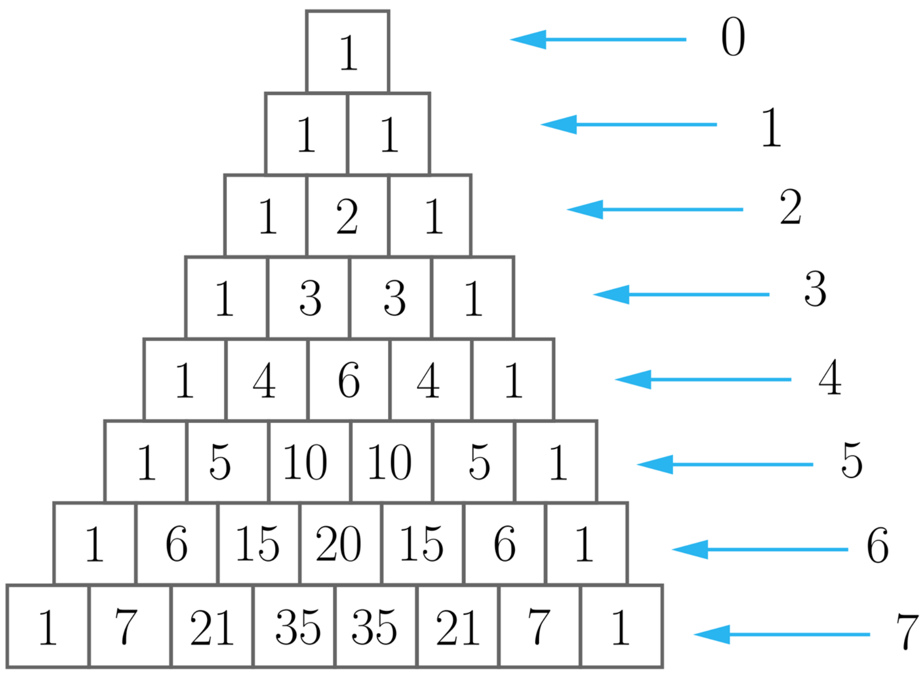
Przeczytaj

Budowa trójkąta Pascala

Trójkąt Pascala to trójkątna tablica liczb. W pierwszym wierszu znajduje się liczba 1, w następnym – dwie jedynki. W kolejnych wierszach jedynki umieszczone są na początku i końcu każdego wiersza. Każda liczba „środkowa” jest sumą dwóch liczb bezpośrednio znajdujących się nad nią.



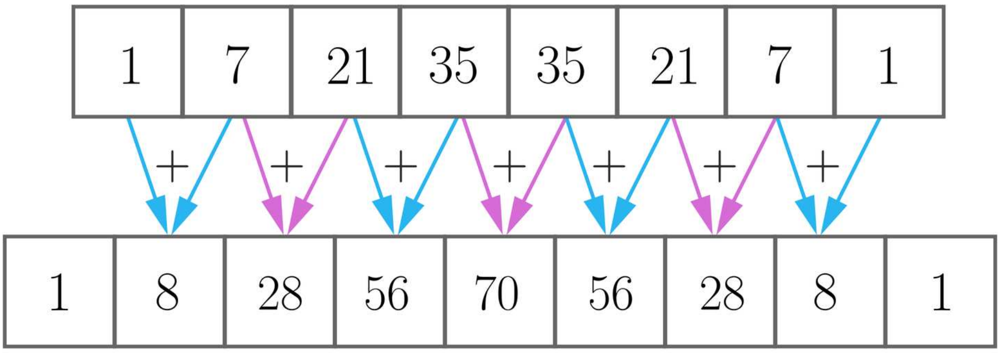
Wiersze w trójkącie Pascala numerujemy kolejnymi liczbami naturalnymi.



Przykład 1

Zbudujemy w trójkącie Pascala wiersz nr 8.

Zauważmy, że w każdym kolejnym wierszu trójkąta Pascala znajduje się o jedna liczba więcej niż w wierszu go poprzedzającym. Zatem wiersz ósmy zbudowany będzie z 9 liczb. Początkowa i końcowa liczba to 1. Znajdujemy „środkowe” liczby, jako sumy liczb z wiersza nr 7.

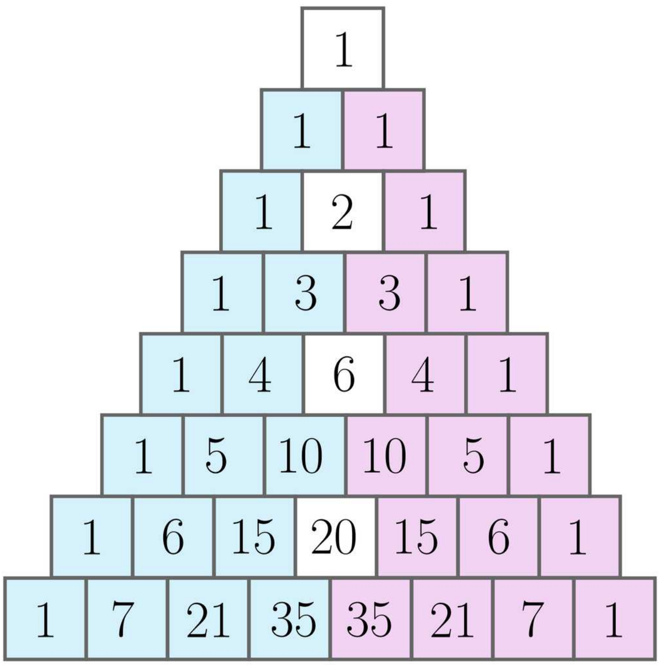


Wiersz nr 8 składa się z liczb: 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1.

Niektóre własności trójkąta Pascala

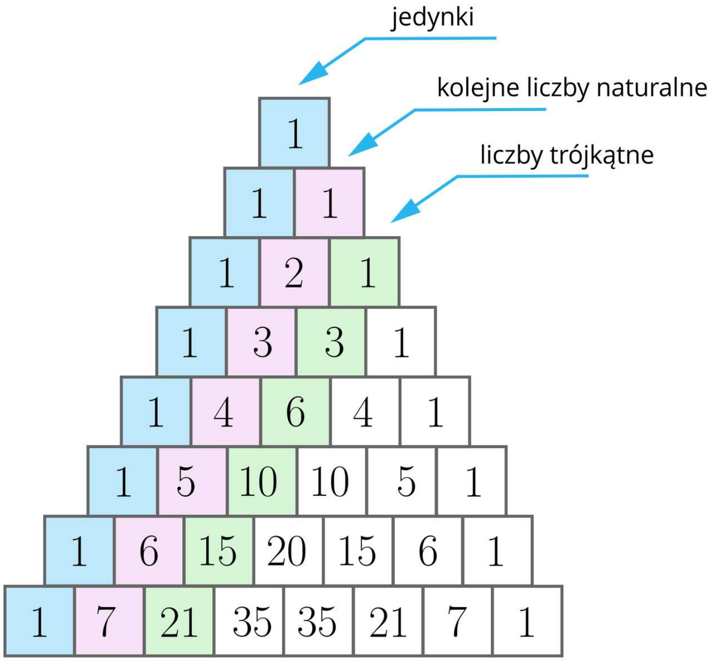
Własność: Własność 1

Liczby w trójkącie Pascala ułożone są symetrycznie.



Własność: Własność 2

Na pierwszej „przekątnej” trójkąta Pascala leżą jedynki, na drugiej „przekątnej” kolejne liczby naturalne, na trzeciej – kolejne liczby trójkątne.



Przykład 2

Znajdziemy siódmą liczbę trójkątną, korzystając z trójkąta Pascala.

Korzystamy z powyższego rysunku. Odczytujemy, że kolejne liczby trójkątne to: 1, 3, 6, 10, 15, 21.

Zauważamy, że:

$3 - 1 = 2$

$6 - 3 = 3$

$10 - 6 = 4$

$15 - 10 = 5$

$21 - 15 = 6$

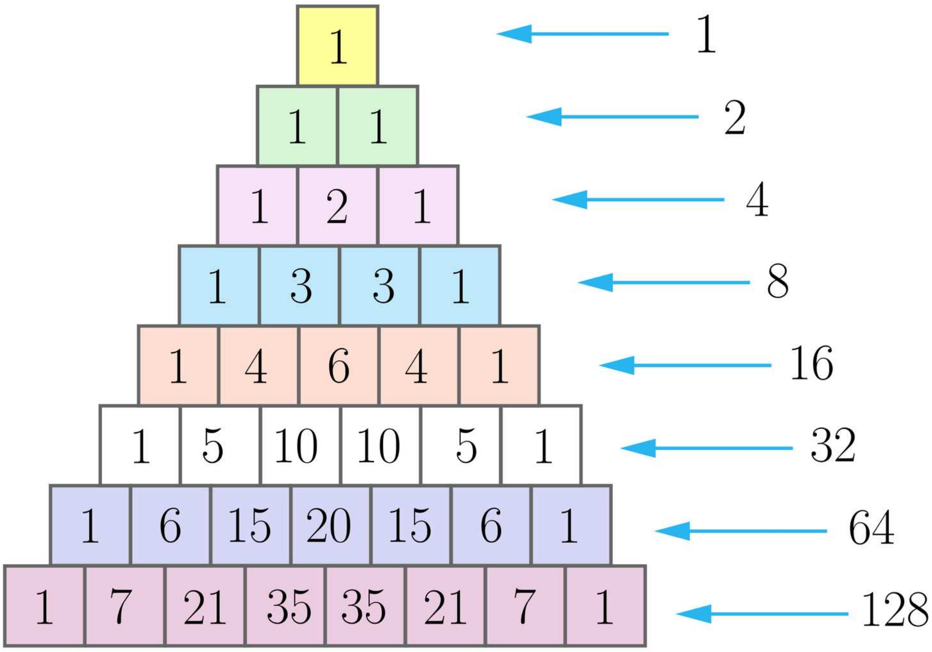
Zatem kolejne liczby trójkątne różnią się o kolejne liczby naturalne. Siódma liczba trójkąta, będzie różniła się od szóstej o 7.

$21 + 7 = 28$

Siódma liczba trójkątna to 28.

Własność: Własność 3

Sumy liczb stojących w kolejnych wierszach trójkąta Pascala tworzą kolejne potęgi liczby 2.



Przykład 3

Obliczymy sumę S liczb w wierszu o numerze 10 trójkąta Pascala.

Wiemy, że suma ta będzie równa 10 potędze liczby 2.

$S = 2^{10} = 1024.$

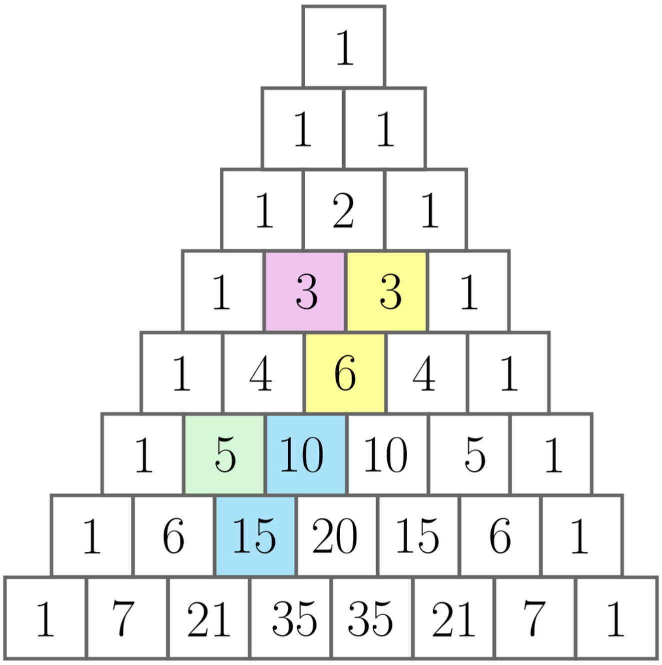
Przykład 4

Porównaj kwadrat liczby zaznaczonej na fioletowo z sumą liczb zaznaczonych na żółto.

Porównaj kwadrat liczby zaznaczonej na zielono z sumą liczb zaznaczonych na niebiesko.

Zbadaj podobne zależności dla liczb 4 i 6.

Co zauważasz?



Własność: Własność 4

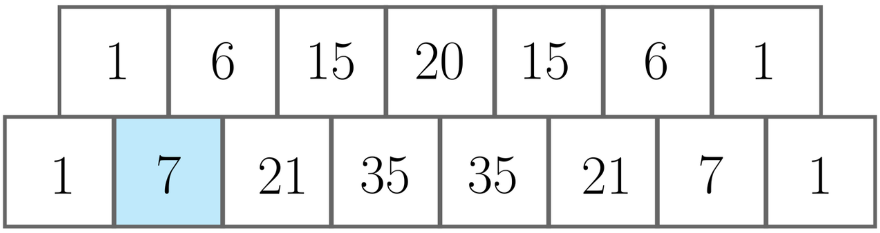
Kwadrat liczby zapisanej na drugiej „przekątnej” trójkąta Pascala (za wyjątkiem liczby 1) jest równy sumie kolejnej liczby stojącej obok w tym samym wierszu i liczby stojącej poniżej obu tych liczb.

Własność: Własność 5

Jeśli pierwszym elementem wiersza w trójkącie Pascala, różnym od 1, jest liczba pierwsza, to wszystkie pozostałe liczby w tym wierszu (za wyjątkiem 1), będą przez nią podzielne.

Przykład 5

Sprawdźmy, czy liczby w wierszu o numerze 7 spełniają własność 5.

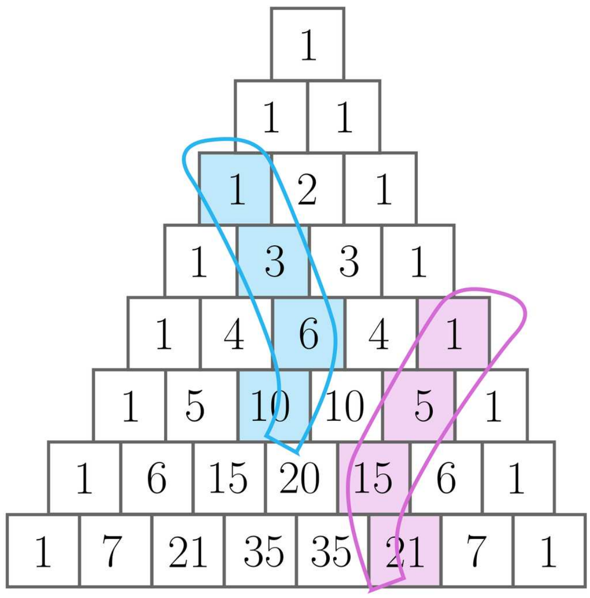


Pierwszym elementem tego wiersza, różnym od 1 jest 7. Pozostałe liczby różne od 1 to: 21 , 35, 35, 21, 7.

Oczywiście każda z nich dzieli się przez 7. Zatem liczby z tego wiersza spełniają własność 5.

Własność: Własność 6 (zwana efektem kija hokejowego)

Suma liczb leżących na przekątnej trójkąta (przy czym nie musi to być cała przekątna) jest równa liczbie, leżącej poniżej na przeciwnej przekątnej.



$1+3+6=10$

$1+5+15=21$

Słownik

trójkąt Pascala

trójkątna tablica liczb; w pierwszym wierszu tej tablicy znajduje się liczba 1, w następnym – dwie jedynki; w kolejnych wierszach jedynki umieszczone są na początku i końcu każdego wiersza; każda liczba „środkowa” jest sumą dwóch liczb bezpośrednio znajdujących się nad nią

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z prezentacją pokazującą niektóre własności trójkąta Pascala. Jeśli zainteresuje cię ta tematyka, poszukaj w Internecie lub w innych dostępnych źródłach informacji, jeszcze innych ciekawych zależności liczbowych, występujących w tym trójkącie.

Polecenie 2

Zapisz liczby znajdujące się w trójkącie Clarka w wierszu numer 7.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Zaznacz zdanie prawdziwe.

- Wiersze w trójkącie Pascala numerujemy kolejnymi liczbami naturalnymi, począwszy od liczby 1.
- Sumy liczb stojących w kolejnych wierszach trójkąta Pascala tworzą kolejne potęgi liczby 2.
- Każda liczba „środkowa” w trójkącie Pascala jest sumą dwóch liczb bezpośrednio znajdujących się pod nią.
- Na drugiej „przekątnej” trójkąta Pascala znajdują się kwadraty kolejnych liczb naturalnych.

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Korzystając z trójkąta Pascala, przeciągnij liczby w odpowiednie pola.

Liczby trójkątne

Liczby czworościenne

Inne liczby

10 84 3 56 45 35

8 21 2 5 9 10

4 28 15 20 7 24

6

Ćwiczenie 4

Połącz w pary numery wierszy trójkąta Pascala i sumy liczb stojących w tych wierszach.

10	32
11	256
8	1024
7	2048
5	128

Ćwiczenie 5

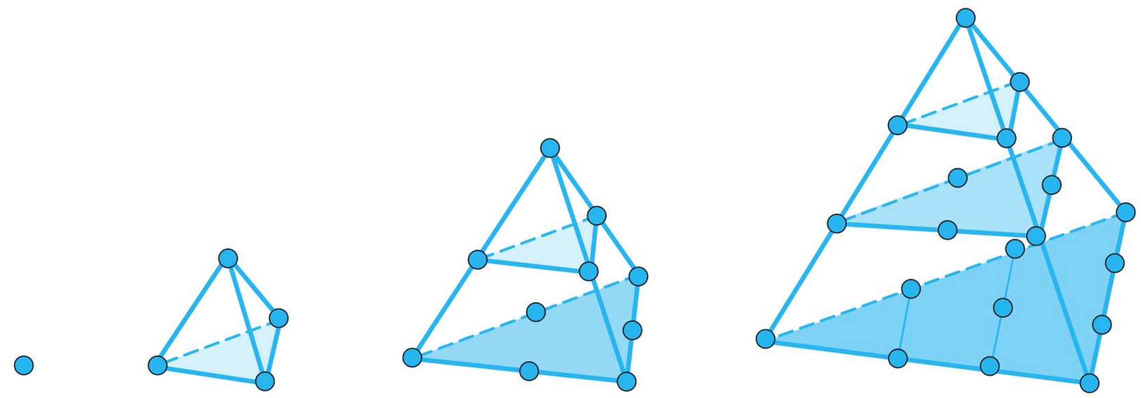
Korzystając z trójkąta Pascala, uzupełnij ciąg kolejnych liczb ciągu Fibonacciego. Przeciągnij poprawne liczby w odpowiednie miejsca.

$5, 8, 13,$ ____ , ____ $, 55,$ ____ , ____

15 35 144 90 54 102 89 21 34 88 86

Ćwiczenie 6

Rysunek przedstawia ilustrację graficzną 4 liczb czworościennych.



Na której „przekątnej” znajdują się te liczby w trójkącie Pascala? Zaznacz poprawną odpowiedź.

- 5
- 2
- 3
- 4

Ćwiczenie 7

Zaznacz poprawną odpowiedź. Korzystając z trójkąta harmonicznego, można stwierdzić, że:

- $\frac{1}{4} = \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} + \ldots$
- $\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{30} + \frac{1}{105} + \ldots$
- $\frac{1}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \ldots$
- $\frac{1}{4} = \frac{1}{20} + \frac{1}{60} + \frac{1}{140} + \ldots$

Ćwiczenie 8

n–tą liczbę trójkątną można wyznaczyć ze wzoru $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

n–tą liczbę czworościenną można wyznaczyć ze wzoru $C_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

Wyznacz dwie najmniejsze liczby (różne od 1), które są zarazem trójkątne i czworościenne.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Trójkąt Pascala

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres rozszerzony.

Uczeń:

2) stosuje podstawowe własności trójkąta Pascala oraz następujące własności współczynnika dwumianowego (symbolu Newtona): $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n-1} = n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- konstruuje trójkąt Pascala
- rozpoznaje określony rodzaj liczb zawartych w trójkącie Pascala
- poszukuje analogii między trójkątem Pascala, a innymi trójkątami podobnego typu
- tworzy własne tablice liczbowe

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- siła tworzenia
- błądzenie losowe

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- kartony, mazaki

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie podają przykłady znanych im tablic liczbowych (np. kwadratów magicznych), określają ich własności i zastosowania.
2. Wspólnie zastanawiają się nad sensem tworzenia takich tablic. Nauczyciel nawiązuje do odkryć matematycznych prowadzących do tworzenia różnego typu tablic liczbowych, wynikających z rozwoju innych dziedzin wiedzy. Przytacza przykłady holistycznego podejścia do naukowych problemów. Opowiada o pasjach Pascala i historii odkrycia trójkąta Pascala (nie nazywając go wprost). Celem tej pogadanki jest zaciekawienie uczniów tematem.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach wykonują ćwiczenia, których produktem finalnym powinno być utworzenie trójkąta Pascala.
2. Teraz metodą błądzenia losowego poszukują własności trójkąta. Prezentują swoje dokonania, a następnie zapoznają się z materiałem w sekcji „Przeczytaj” i z prezentacją. Porównują swoje wnioski z prezentowanymi w materiałach.
3. Następnie metodą „siła tworzenia” budują swoje tablice trójkątne.
4. Grupy wymieniają się między sobą wytworami swojej pracy. Ich zadaniem jest znalezienie co najmniej jednej ciekawej własności w otrzymanym trójkącie.
5. Prezentacja prac grup, wyodrębnienie najciekawszych własności zbudowanych trójkątów.

Faza podsumowująca:

1. Dyskusja – w rozwiązywaniu jakich problemów można wykorzystać własności trójkąta Pascala i ewentualnie trójkątów zbudowanych przez grupy.

Wybrani uczniowie krótko dokonują rekapitulacji zdobytych wiadomości i umiejętności, oceniają swoją pracę i pracę grup, w których uczestniczyli.
2. Nauczyciel przedstawia swoje spostrzeżenia, wyjaśnia wątpliwości.

Praca domowa:

Uczniowie mają wykonać ćwiczenia interaktywne zamieszczone w materiałach.

Materiały pomocnicze:

Trójkąt Pascala

Wskazówki metodyczne:

Prezentację można wykorzystać na zajęciach poświęconych dokonaniom Blaise Pascala lub pokazujących ciekawe zależności w zbiorach liczbowych.