Kąty między odcinkami w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym

Kąty między odcinkami w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym

Źródło: Rodion Kutsaev, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Znając definicję graniastosłupa prawidłowego trójkątnego i mając podstawowe wiadomości z geometrii, bez problemu powiemy, jakie kąty występują pomiędzy jego krawędziami. Kiedy jednak spojrzymy na pewien odcinek - przekątną ściany bocznej - okaże się, że wyznaczanie miar kątów pomiędzy nim a innymi odcinkami w graniastosłupie przestaje być takie łatwe. W tym materiale dowiesz się, jakie zależności geometryczne i trygonometryczne pomogą w wyznaczaniu miar kątów pomiędzy odcinkami w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym.

Twoje cele

- Wskażesz kąty między odcinkami w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym.
- Wyznaczysz miary kątów między odcinkami w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym.
- Wykorzystasz wiedzę z planimetrii do rozwiązywania zadań ze stereometrii.

Przeczytaj

Definicja: graniastosłup prawidłowy trójkątny

Graniastosłup prawidłowy trójkątny to taki graniastosłup prosty, który ma w podstawie trójkąt równoboczny.

Bryła ta ma pięć ścian: dwie podstawy i trzy ściany boczne. Poniżej prezentujemy tabelę systematyzującą rodzaje odcinków leżących w płaszczyznach tych ścian oraz podającą ich liczbę i długość w zależności od długości krawędzi podstawy a oraz krawędzi bocznej h. Odcinki te zostały zaznaczone w przedstawionym niżej aplecie.

Nazwa odcinka	Oznaczenie	Liczba odcinków w graniastosłupie	Wzór na długość odcinka
Krawędź podstawy	a	6	-
Krawędź boczna	h	3	-
Wysokość podstawy	h_p	6	$h_p = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
Przekątna ściany bocznej	d	6	$d = \sqrt{a^2 + h^2}$

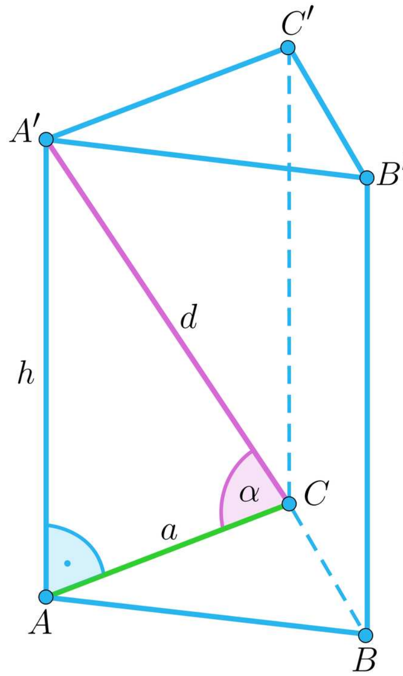
Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DUsectF8p

Pomiędzy przecinającymi się odcinkami w graniastosłupie powstają różne kąty. Miara części z nich jest stała, innych jest zależna od wymiarów graniastosłupa.

- Kąt pomiędzy dwoma krawędziami w podstawie ma miarę 60°, ponieważ figura w podstawie to trójkąt równoboczny.
- Kąt pomiędzy krawędzią boczną a dowolnym odcinkiem leżącym w płaszczyźnie podstawy (w tym krawędzią podstawy czy jej wysokością) ma miarę 90°, ponieważ w graniastosłupie prostym każda krawędź boczna jest prostopadła do płaszczyzny podstawy.

Poniżej zajmiemy się więc bardziej skomplikowanymi przypadkami kątów pomiędzy odcinkami w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym.

Kąt pomiędzy przekątną ściany bocznej a krawędzią podstawy leżącą na tej samej ścianie



Kąt ten można znaleźć w trójkącie prostokątnym ACA' i wyznaczyć z wartości jednej z funkcji trygonometrycznych:

$$\sin\alpha = \frac{h}{d}$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{d}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{a}$$

> **Przykład 1**
>
> Wyznaczymy miarę kąta pomiędzy przekątną ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego a krawędzią podstawy leżącą na tej samej ścianie wiedząc, że obwód podstawy wynosi 15, a obwód ściany bocznej jest równy 28.

Rozwiązanie

Obwód podstawy wynosi 15, zatem $a = \frac{15}{3} = 5$.

Obwód ściany bocznej wynosi 28, zatem $2a + 2h = 28$, stąd $h = \frac{28-2\cdot5}{2} = 9$.

Obliczamy tangens szukanego kąta

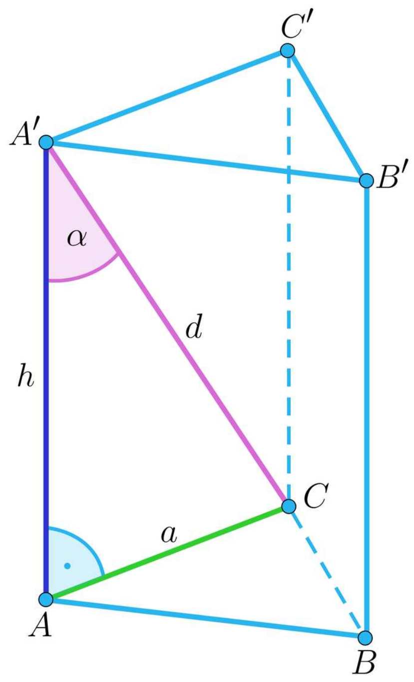
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{9}{5} = 1,8$.

Szukamy odpowiedniej wartości w tablicy wartości funkcji trygonometrycznych.

$\alpha[^\circ]$	$\sin\alpha$ $\cos\beta$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\beta[^\circ]$
57	$0,8387$	$1,5399$	33
58	$0,8480$	$1,6003$	32
59	$0,8572$	$1,6643$	31
60	$0,8660$	$1,7321$	30
61	$0,8746$	$1,8040$	29
62	$0,8829$	$1,8807$	28
63	$0,8910$	$1,9626$	27

i podajemy odpowiedź: $\alpha \approx 61^\circ$.

Kąt pomiędzy przekątną ściany bocznej a krawędzią boczną



Kąt ten można znaleźć w trójkącie prostokątnym ACA' i wyznaczyć z wartości jednej z funkcji trygonometrycznych:

$$\sin\alpha = \frac{a}{d}$$

$$\cos\alpha = \frac{h}{d}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{h}$$

Warto zauważyć, że suma miar kątów pomiędzy przekątną ściany bocznej a krawędziami odpowiednio podstawy i boczną wynosi 90°:

$$|\sphericalangle AA'C| + |\sphericalangle A'CA| = 90^\circ$$

Przykład 2

W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym kąt pomiędzy przekątną ściany bocznej a krawędzią boczną ma miarę 30°. Przekątna ściany bocznej jest o 4 dłuższa od krawędzi podstawy. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego graniastosłupa.

Rozwiązanie

$d = a + 4$

$\sin 30^\circ = \frac{a}{a+4}$

$\frac{1}{2} = \frac{a}{a+4}$

$a + 4 = 2a$

$a = 4$

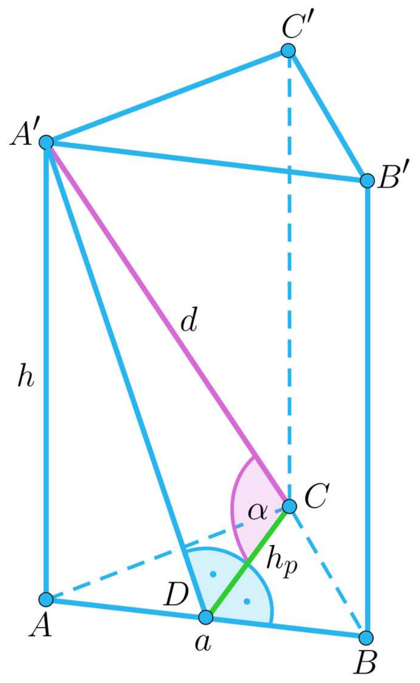
$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{4}{h}$

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4}{h}$

$h = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$

Suma długości wszystkich krawędzi tego graniastosłupa wynosi $6 \cdot 4 + 3 \cdot 4\sqrt{3} = 24 + 12\sqrt{3}$.

Kąt pomiędzy przekątną ściany bocznej a wysokością podstawy



Kąt pomiędzy przekątną ściany bocznej a wysokością podstawy można znaleźć w trójkącie DCA'. Trójkąt ten jest prostokątny, ponieważ wysokość CD jest prostopadła do ściany $ABB'A$, a więc jest prostopadła do każdej prostej leżącej w płaszczyźnie ściany, w tym do $A'D$.

Warto zauważyć, że korzystając z twierdzenia Pitagorasa możemy wyznaczyć długość odcinka $A'D$ w zależności od długości krawędzi graniastosłupa

$$|A'D| = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

Dane są następujące wartości funkcji trygonometrycznych omawianego kąta:

$$\sin \alpha = \frac{|A'D|}{d}$$

$$\cos \alpha = \frac{h_p}{d}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|A'D|}{h_p}$$

Przykład 3

Wyznaczymy miarę kąta pomiędzy przekątną ściany bocznej a wysokością podstawy graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, w którym krawędź podstawy jest 2 razy krótsza od krawędzi bocznej.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez a długość krawędzi podstawy. Wtedy długość krawędzi bocznej $h = 2a$.

Wysokość w podstawie ma długość $h_p = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Długość przekątnej ściany bocznej $d = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{5a^2} = a\sqrt{5}$.

Obliczamy cosinus szukanego kąta:

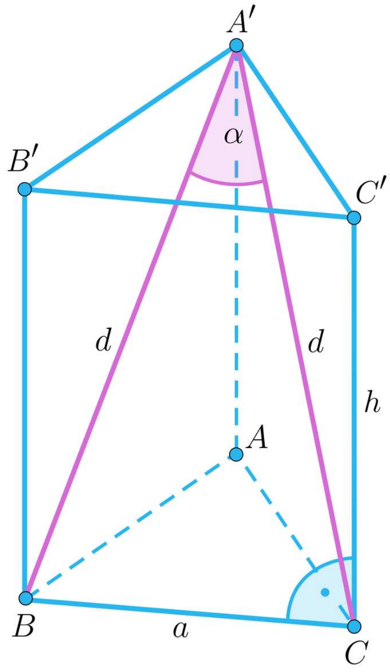
$$\cos\alpha = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{10} \approx 0,3873$$

i odczytujemy jego przybliżoną miarę

$\alpha[^\circ]$	$\sin\alpha$ $\cos\beta$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\beta[^\circ]$
17	0,2924	0,3057	73
18	0,3090	0,3249	72
19	0,3256	0,3443	71
20	0,3420	0,3640	70
21	0,3584	0,3839	69
22	0,3746	0,4040	68
23	0,3907	0,4245	67
24	0,4067	0,4452	66
25	0,4226	0,4663	65

$\alpha \approx 67^\circ$

Kąt pomiędzy przekątnymi ścian bocznych o wspólnym wierzchołku



Kąt pomiędzy przekątnymi ścian bocznych o wspólnym wierzchołku leży w trójkącie równoramiennym BCA' pomiędzy ramionami o długości d, na przeciwko podstawy a. Cosinus tego kąta możemy wyznaczyć powołując się na twierdzenie cosinusów:

$$|BC|^2 = |BA'|^2 + |CA'|^2 - 2 \cdot |BA'| \cdot |CA'| \cdot \cos\alpha$$

$$a^2 = d^2 + d^2 - 2d^2 \cos\alpha$$

$$2d^2 \cos\alpha = 2d^2 - a^2$$

$$\cos\alpha = \frac{2d^2 - a^2}{2d^2} = 1 - \frac{a^2}{2d^2}$$

Z powyższych wyliczeń wynika, że $\cos\alpha < 1$, ponieważ powstaje jako różnica liczby 1 i liczby dodatniej.

Co więcej, z geometrii graniastosłupa prawidłowego trójkątnego wynika, że krawędź podstawy jest krótsza od przekątnej ściany bocznej (ponieważ, przekątna jest przeciwprostokątną w trójkącie o przyprostokątnej a). Zatem możemy oszacować $\frac{a^2}{2d^2} < \frac{d^2}{2d^2} = \frac{1}{2}$.

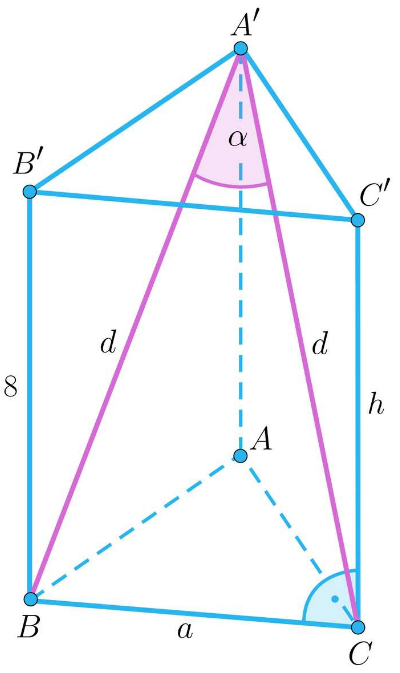
Uwzględniając szacowanie w wyznaczonym wzorze na cosinus otrzymujemy informację, że $\cos\alpha > \frac{1}{2}$ ponieważ cosinus obliczymy jako różnicę liczby 1 i liczby mniejszej niż $\frac{1}{2}$.

Pamiętając o tym, że dla kątów ostrych funkcja cosinus jest malejąca wnioskujemy, że kąt α ma miarę mniejszą niż 60°.

Przykład 4

Obliczymy długość krawędzi podstawy graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, w którym długość krawędzi bocznej wynosi 8, a miara kąta pomiędzy przekątnymi ścian bocznych o wspólnym wierzchołku jest jest równa α, przy czym $\cos \alpha = 0,82$.

Rozwiązanie



Korzystając z tw. cosinusów w trójkącie BCA' zapisujemy:

$a^2 = d^2 + d^2 - 2 \cdot d \cdot d \cdot 0,82$

$a^2 = 2d^2 - 1,64d^2$

$a^2 = 0,36d^2$

uwzględniając fakt, że $a > 0$ oraz $d > 0$ otrzymujemy

$a = 0,6d$

Zapisujemy tw. Pitagorasa w trójkącie prostokątnym $BB'A'$:

$8^2 + a^2 = d^2$

$64 + (0,6d)^2 = d^2$

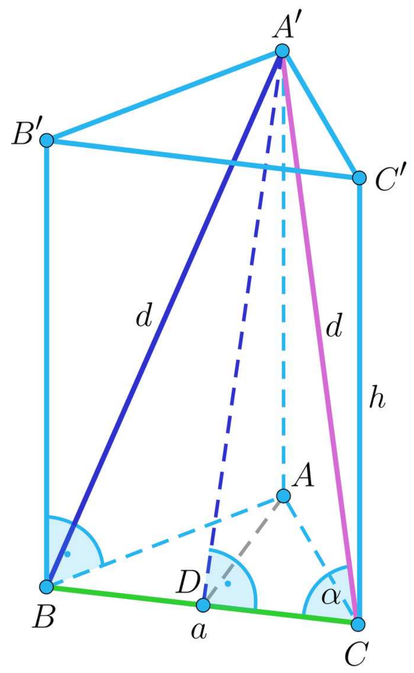
$d^2 - 0,36d^2 = 64$

$0,64d^2 = 64$

$d^2 = 100$

> $d = 10$.
>
> Szukana wielkość $a = 0,6 \cdot 10 = 6$.

Kąt pomiędzy przekątną ściany bocznej a krawędzią podstawy leżącą na sąsiedniej ścianie bocznej



Z jednej strony miarę tego kąta możemy wyznaczyć, podobnie jak w poprzednim przypadku, zapisując twierdzenie cosinusów dla trójkąta równoramiennego BCA'.

$$d^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{a^2}{2ad}$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{2d}$$

Podobnie jak poprzednio, $a < d$, zatem $\cos\alpha < \frac{d}{2d} = \frac{1}{2}$, a więc $\alpha > 60^\circ$.

Z drugiej strony, kąt α występuje w trójkącie prostokątnym CDA', gdzie D jest środkiem krawędzi BC i jednocześnie spodkiem wysokości AD w postawie. Jego miarę możemy wyznaczyć korzystając z wartości funkcji trygonometrycznych

$$\sin\alpha = \frac{|DA'|}{d}$$

$$\cos\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{d} = \frac{a}{2d}$$

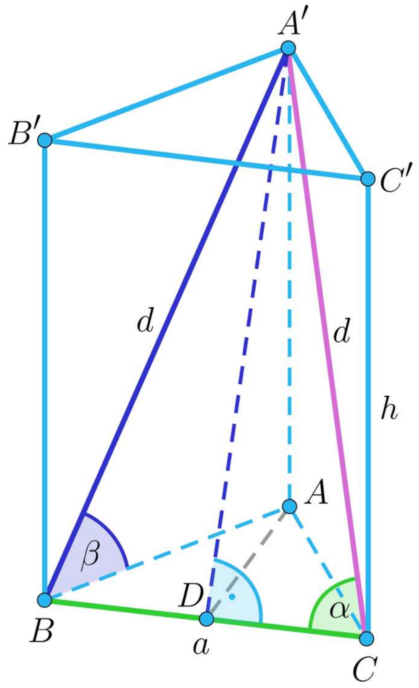
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|DA'|}{\frac{a}{2}} = \frac{2|DA'|}{a}$$

Przykład 5

W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym tangens kąta pomiędzy przekątną ściany bocznej, a krawędzią podstawy leżącą na tej samej ścianie jest równy $\frac{4}{3}$. Wyznaczymy sinus kąta pomiędzy przekątną ściany bocznej, a krawędzią podstawy leżącą na sąsiedniej ścianie bocznej.

Rozwiązanie

Zaznaczmy na rysunku dwa kąty przedstawione w treści zadania.



Wiemy, że $\operatorname{tg}\beta = \frac{4}{3}$, zatem $\frac{h}{a} = \frac{4}{3}$, czyli $h = \frac{4}{3}a$.

Z tw. Pitagorasa w trójkącie BAA' otrzymujemy

$$d^2 = a^2 + h^2$$

$$d = \sqrt{a^2 + \left(\frac{4}{3}a\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{16}{9}a^2} = \sqrt{\frac{25}{9}a^2} = \frac{5}{3}a$$

Możemy obliczyć cosinus kąta α korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych w trójkącie CDA':

$$\cos\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{d} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{5}{3}a} = \frac{a}{2} \cdot \frac{3}{5a} = \frac{3}{10}$$

Wstawiając wartość cosinusa do jedynki trygonometrycznej i pamiętając, że α ma miarę mniejszą niż 180°, otrzymujemy:

$\sin^2 \alpha + \left(\frac{3}{10}\right)^2 = 1$

$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{100}} = \frac{\sqrt{91}}{10}.$

Słownik

graniastosłup prosty

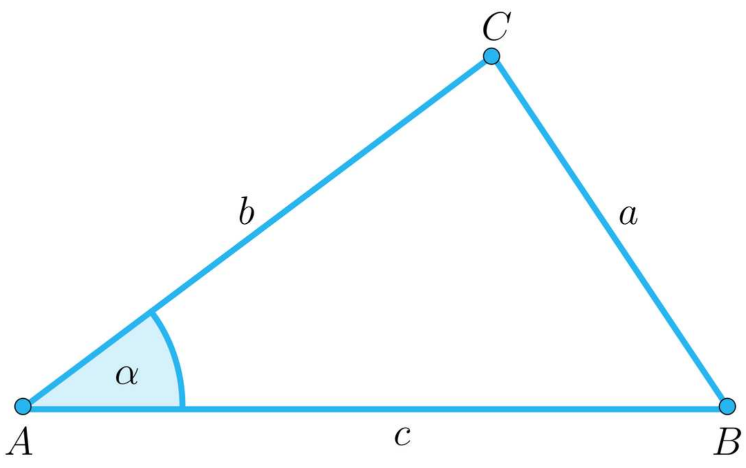
to graniastosłup, w którym wszystkie krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw, a więc wszystkie ściany boczne są prostokątami

twierdzenie Pitagorasa

jeżeli trójkąt jest prostokątny, to suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej

twierdzenie cosinusów

w dowolnym trójkącie kwadrat długości dowolnego boku jest równy sumie kwadratów długości dwóch pozostałych boków pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta zawartego między nimi.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

jedynka trygonometryczna

to tożsamość trygonometryczna mówiąca, że suma kwadratów sinusa i cosinusa tego samego kąta jest zawsze równa 1.

Dla dowolnego kąta α zachodzi:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Animacja 3D

Polecenie 1

Obejrzyj animację 3D, a następnie rozwiąż zadania umieszczone w poleceniach 2 i 3.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DwjsEEdNU

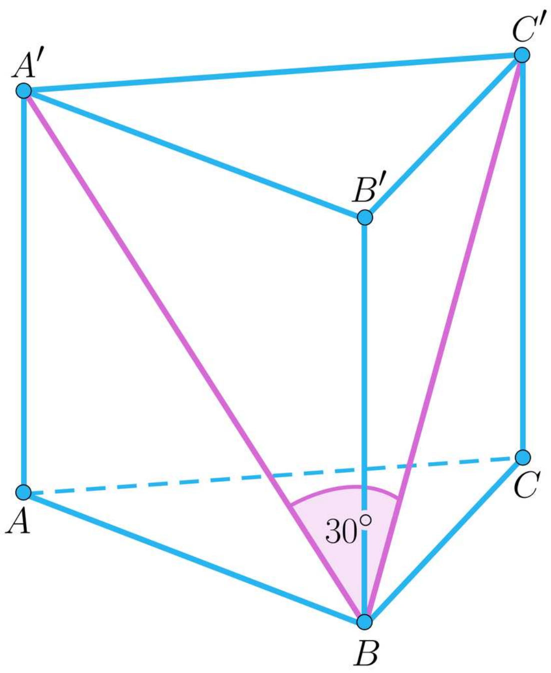
Film nawiązujący do treści materiału dotyczący kątów między odcinkami w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym.

Polecenie 2

W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym długość krawędzi bocznej jest równa wysokości trójkąta w podstawie. Oblicz tangens kąta pomiędzy przekątną ściany bocznej, a krawędzią podstawy leżącą na sąsiedniej ścianie.

Polecenie 3

Kąt pomiędzy przekątnymi BA' i BC' ścian bocznych graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o wysokości 1 ma miarę 30° (patrz rysunek). Wyznacz przybliżoną miarę kąta między odcinkiem BA' a krawędzią BA.



Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Kąt pomiędzy przekątnymi ścian bocznych o wspólnym wierzchołku w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym ma miarę 30°, a długość krawędzi podstawy wynosi 1. Oblicz długość krawędzi bocznej tego graniastosłupa.

Ćwiczenie 6

W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym kąt pomiędzy przekątną ściany bocznej a wysokością podstawy wychodzącymi z tego samego wierzchołka ma miarę 60°. Oblicz tangens kąta pomiędzy przekątną ściany bocznej a krawędzią podstawy leżącą na tej samej ścianie.

Ćwiczenie 7

Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego tworzy z krawędzią podstawy leżącą na sąsiedniej ścianie bocznej kąt, którego sinus jest równy $\frac{\sqrt{95}}{10}$. Suma długości wszystkich krawędzi tego graniastosłupa wynosi $54\ \mathrm{cm}$. Oblicz długość krawędzi podstawy.

Ćwiczenie 8

W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym dana jest miara kąta α pomiędzy przekątnymi ścian bocznych wychodzącymi z tego samego wierzchołka. Wyznacz cosinus kąta β pomiędzy przekątną ściany bocznej a krawędzią podstawy leżącą na sąsiedniej ścianie bocznej.

Dla nauczyciela

Autor: Bartłomiej Cymbalista

Przedmiot: Matematyka

Temat: Kąty między odcinkami w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum - poziom rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

3) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wskazuje kąty między odcinkami w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym,
- wyznacza miarę kąta między odcinkami w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym,
- wykorzystuje wiedzę z planimetrii i trygonometrii do rozwiązywania zadań ze stereometrii.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja w oparciu o zagadnienia z sekcji „Przeczytaj”,

- dyskusja,
- praca z medium bazowym,
- pokaz.

Formy pracy:

- praca indywidualna,
- praca w parach,
- praca całą klasą.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu,
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale,
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda,
- model szkieletowy graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, włóczka.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat - „Kąty między odcinkami w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym”, wskazuje cele zajęć.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel omawia kąty między różnymi odcinkami w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym w oparciu o sekcję „Przeczytaj”, wraz z przykładami. Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie omawianych kątów przy pomocy modelu szkieletowego i włóczki.
2. Uczniowie rozwiązują indywidualnie ćwiczenie 1 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel moderuje dyskusję nad poprawnymi odpowiedziami otrzymując informację zwrotną od uczniów, czy dobrze zrozumieli przekazany wcześniej materiał. W razie potrzeby, jeszcze raz pokazuje na modelu przestrzennym omawiane kąty.
3. Uczniowie rozwiązują indywidualnie ćwiczenia 2-4 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel prosi wybranych uczniów o podanie poprawnych odpowiedzi, a w przypadku wątpliwości, przedstawienie rozwiązań na tablicy.
4. Uczniowie, w parach, rozwiązują ćwiczenia 7-8 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie wybrane osoby omawiają rozwiązanie na tablicy. Nauczyciel może nagrodzić poprawne rozwiązanie oceną.
5. Uczniowie w parach zapoznają się z animacją 3D oraz rozwiązują polecenia 2-3 znajdujące się w tej sekcji. Wybrani uczniowie przedstawiają poprawne rozwiązania na tablicy.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel omawia ewentualne problemy z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się” oraz „Animacja 3D”.

Zadanie domowe

Ćwiczenia 5-6 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- Przekrój bryły – graniastosłup prawidłowy trójkątny

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel może przedstawić animację 3D na dużym ekranie dla całej klasy, a następnie dać czas uczniom na indywidualne (lub w parach) rozwiązanie zadań z tej sekcji. Może także ocenić rozwiązania tych zadań.

Animację 3D można również wykorzystać podczas realizacji lekcji „Kąty między odcinkami w graniastosłupie”.