



Problemy prowadzące do rozwiązywania równań dwukwadratowych i kwadratowych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Problemy prowadzące do rozwiązywania równań dwukwadratowych i kwadratowych

Źródło: dostępny w internecie: peakpx.com, domena publiczna.

W tym materiale zajmiemy się rozwiązywaniem równań wyższych stopni oraz równań, w których niewiadoma występuje pod znakiem pierwiastka. Równania te będziemy sprowadzać do równań dwukwadratowych lub kwadratowych.

Równania rozwiążemy poprzez zastosowanie odpowiedniego podstawienia z uwzględnieniem założeń i rozwiązanie równania kwadratowego lub dwukwadratowego.

Twoje cele

- Rozwiążesz równanie wyższego stopnia lub równanie, w którym niewiadoma występuje pod znakiem pierwiastka, które sprowadzisz do równania dwukwadratowego lub równania kwadratowego.
- Rozwiążesz równanie kwadratowe i dwukwadratowe stosując odpowiednie podstawienie.

Przeczytaj

W rozwiązywaniu równania wielomianowego wyższych stopni często możemy wykorzystać metody prowadzące do rozwiązywania równania kwadratowego. Również w równaniach, gdzie niewiadoma znajduje się pod znakiem pierwiastka, poprzez zastosowanie odpowiedniego podstawienia i uwzględnienie założeń, możemy sprowadzić równanie do równania kwadratowego.

Definicja: Równanie kwadratowe

Równanie kwadratowe to równanie postaci $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie a, b i c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi oraz $a \neq 0$.

Definicja: Równanie dwukwadratowe

Równanie dwukwadratowe to równanie postaci $ax^4 + bx^2 + c = 0$, gdzie $a \neq 0$.

Aby rozwiązać równanie wielomianowe $ax^6 + bx^3 + c = 0$, gdzie $a \neq 0$ będziemy stosować podstawienie $x^3 = z$ i następnie rozwiązywać równanie kwadratowe postaci

$$az^2 + bz + c = 0.$$

Do rozwiązywania równania typu $x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$, dla $x \geq 0$ wykorzystamy podstawienie $z = \sqrt{x}$ i $z \geq 0$ i otrzymamy równanie kwadratowe postaci

$$z^2 - 3z + 2 = 0.$$

Przykład 1

Rozwiążemy równanie $\left(\frac{x^2-2}{2}\right)^2 - x^2 + 3 = -\frac{1}{4}$.

$$\frac{x^4-4x^2+4}{4} - x^2 + 3 = -\frac{1}{4}$$

$$x^4 - 4x^2 + 4 - 4x^2 + 12 = -1$$

$$x^4 - 8x^2 + 17 = 0$$

Podstawimy $x^2 = z$ i $z \geq 0$.

$$z^2 - 8z + 17 = 0$$

$$\Delta = 64 - 4 \cdot 17 = 64 - 68 = -4$$

Ponieważ wyróżnik trójmianu kwadratowego jest ujemny, więc równanie $z^2 - 8z + 17 = 0$ nie posiada rozwiązań.

Zatem **równanie dwukwadratowe** $x^4 - 8x^2 + 17 = 0$ również nie posiada rozwiązania.

Przykład 2

Rozwiążemy równanie $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$.

$$x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$$

Zakładamy że $x \geq 0$.

Podstawimy $z = \sqrt{x}$ i $z \geq 0$.

$$z^2 - 5z + 6 = 0$$

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$$

$$\sqrt{\Delta} = 1$$

$$z_1 = \frac{5-1}{2} = 2$$

$$z_2 = \frac{5+1}{2} = 3$$

Wróćmy teraz do niewiadomej x .

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4$$

$$\sqrt{x} = 3$$

$$x = 9$$

Rozwiązaniem równania są liczby $x = 4, x = 9$.

Przykład 3

Rozwiążemy równanie $(x^2 - 4x)^2 + 7 \cdot (x^2 - 4x) + 12 = 0$, stosując odpowiednie podstawienie.

$$(x^2 - 4x)^2 + 7 \cdot (x^2 - 4x) + 12 = 0$$

Postawiamy $t = x^2 - 4x$.

$$t^2 + 7t + 12 = 0$$

$$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 12 = 49 - 48 = 1$$

$$\sqrt{\Delta} = 1$$

$$t_1 = \frac{-7-1}{2} = -4$$

$$t_2 = \frac{-7+1}{2} = -3$$

Dla $t = -4$ otrzymujemy :

$$x^2 - 4x = -4$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x - 2)^2 = 0$$

$$x = 2$$

Dla $t = -3$ otrzymujemy :

$$x^2 - 4x = -3$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$$

$$\sqrt{\Delta} = 2$$

$$x_1 = \frac{4-2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{4+2}{2} = 3$$

Rozwiązaniem równania są liczby $x = 1, x = 2, x = 3$.

Przykład 4

Rozwiążemy równanie $x - 3\sqrt{x+2} = -4$.

Aby istniał $\sqrt{x+2}$ założymy, że $x+2 \geq 0, x \geq -2$.

Zapiszemy równanie w postaci $x+2 - 3\sqrt{x+2} = -4+2$.

$$x+2 - 3\sqrt{x+2} + 2 = 0$$

Podstawimy $\sqrt{x+2} = t, t \geq 0$.

Otrzymamy równanie $t^2 - 3t + 2 = 0$.

$$\Delta = 9 - 4 \cdot 2 = 1$$

$$\sqrt{\Delta} = 1$$

$$t_1 = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$t_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

Wracamy do podstawienia $\sqrt{x+2} = t$.

$$\sqrt{x+2} = 1$$

$$x+2 = 1$$

$$x = -1 \in \langle -2, \infty \rangle$$

$$\sqrt{x+2} = 2$$

$$x+2 = 4$$

$$x = 2 \in \langle -2, \infty \rangle$$

Rozwiązaniem równania są liczby $x = -1, x = 2$.

Słownik

równanie dwukwadratowe

równanie postaci $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z infografiką przedstawiającą rozwiązanie równania szóstego stopnia.

Polecenie 2

Rozwiąż równanie:

a) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$,

b) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Rozwiąż równanie $(x^2 + 2x)(x^2 + 2x + 2) = 24$, stosując odpowiednie podstawienie.
Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Suma rozwiązań równania jest liczbą wymierną.

☐ ma dwa rozwiązania niewymierne.

☐ Suma rozwiązań równania jest równa 0.

☐ Równanie ma cztery rozwiązania.

☐ Równanie nie posiada rzeczywistych rozwiązań.

Ćwiczenie 2



Zaznacz poprawną odpowiedź. Równanie $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$:

☐ ma jedno rozwiązanie.

☐ nie posiada rozwiązań.

☐ ma cztery rozwiązania.

☐ ma dwa rozwiązania różnych znaków.

Ćwiczenie 3



Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{1}{x^4 - 2\sqrt{2}x^2 + 2}$.

☐ $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}\}$

☐ $x \in \mathbb{R}$

☐ $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

☐ $x \in \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{2}\}$

Ćwiczenie 4



Rozwiąż równanie $\sqrt[3]{x^2} - 3 = 2\sqrt[3]{x}$.

Wpisz w wyznaczone miejsce odpowiednią liczbę, będącą rozwiązaniem równania.

$x = -1$ lub $x =$

Ćwiczenie 5



Dane jest równanie $(x^2 + 2)^2 - 2x^2 = 6$.

Przenieś do pierwszego obszaru równania kwadratowe, które powstały z tego równania w wyniku zastosowania podstawienia $x^2 = t$ ($t \geq 0$), a do drugiego obszaru równania kwadratowe, które powstały w wyniku zastosowania podstawienia $x^2 + 2 = t$.

Równania kwadratowe, które powstały w wyniku zastosowania podstawienia $x^2 = t$ ($t \geq 0$)

$$t^2 + 2t + 2 = 4t + 4$$

$$(t + 2)^2 - 2t = 6$$

$$t^2 + 2t - 2 = 0$$

Równania kwadratowe, które powstały w wyniku zastosowania podstawienia $x^2 + 2 = t$

$$t^2 - 2t + 2 = 4$$

Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Wybierz liczbę rozwiązań równania $-(x^2 + 1)^2 + 7 \cdot (x^2 + 1) - 12 = 0$.

☐ 4

☐ 2

☐ 0

☐ 1

Ćwiczenie 8



Sprawdź czy liczba $\sqrt{4 - \sqrt{2}}$ jest rozwiązaniem równania $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$?

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Problemy prowadzące do rozwiązywania równań dwukwadratowych i kwadratowych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

5) rozwiązuje równania wielomianowe, które dają się doprowadzić do równania kwadratowego, w szczególności równania dwukwadratowe.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje równanie kwadratowe i dwukwadratowe stosując odpowiednie podstawienie
- rozwiązuje równanie wyższego stopnia lub równanie, w którym niewiadoma występuje pod znakiem pierwiastka, które sprowadza do równania dwukwadratowego lub równania kwadratowego

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- śnieżna kula
- burza mózgów
- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają metody rozwiązywania równań dwukwadratowych.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą śnieżnej kuli. Najpierw wymieniają się między sobą wiadomościami dotyczącymi rozwiązywania równań dwukwadratowych i kwadratowych przez odpowiednie podstawienie, które przypomnieli w domu.
2. Uczniowie podzieleni na grupy 4 osobowe omawiają przykłady z sekcji „Przeczytaj”.
3. Uczniowie oglądają infografikę i analizują zawarty w niej przykład.
4. Uczniowie w parach wykonują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące rozwiązywania równań dwukwadratowych i kwadratowych różnymi metodami.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie polecenia 2.

Materiały pomocnicze:

Równanie kwadratowe

Wskazówki metodyczne:

Infografika może być wykorzystana przez chętnych uczniów jako materiał powtórzeniowy przed sprawdzianem.