



Objętość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja 3D](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)

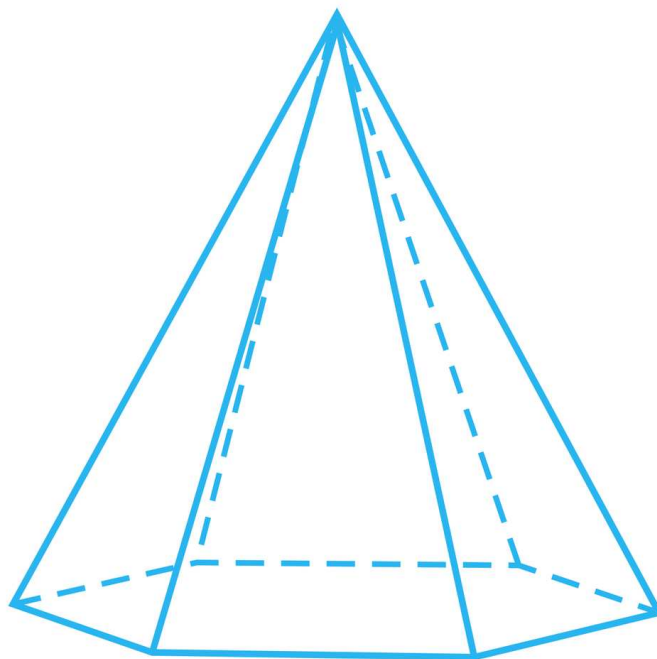


Objętość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

Wyobraźmy sobie, że pewien architekt stworzył plany nowoczesnej budowli znajdującej się w centrum stolicy Polski. Budowla ta ma kształt ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego. Podczas prezentacji swojego pomysłu przed władzami miasta, pewien z pracowników natknął się na niespotykane wcześniej słowo – kubatura budynku. Zaciekawiony, zapytał architekta co ono oznacza. Czy Ty znasz odpowiedź na to pytanie? Aby rozwiązać wszelkie wątpliwości, przytoczmy słowa awangardowego architekta.

„Najprościej rzecz ujmując, kubaturą budynku nazywamy jego objętość. Wyraża się ją w metrach sześciennych. Do obliczenia kubatury rozważanego budynku, należy zmierzyć wielkość podstawy bryły po zewnętrznym obrysie oraz wysokość przestrzeni użytkowej, czyli w tym wypadku wysokość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego”.



Twoje cele

- Wykorzystasz wzór na objętość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego w zadaniach: obliczysz długości odcinków ostrosłupa, znając jego pole, objętość i odwrotnie.

Przeczytaj

Zacznijmy od ogólnego wzoru na objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H,$$

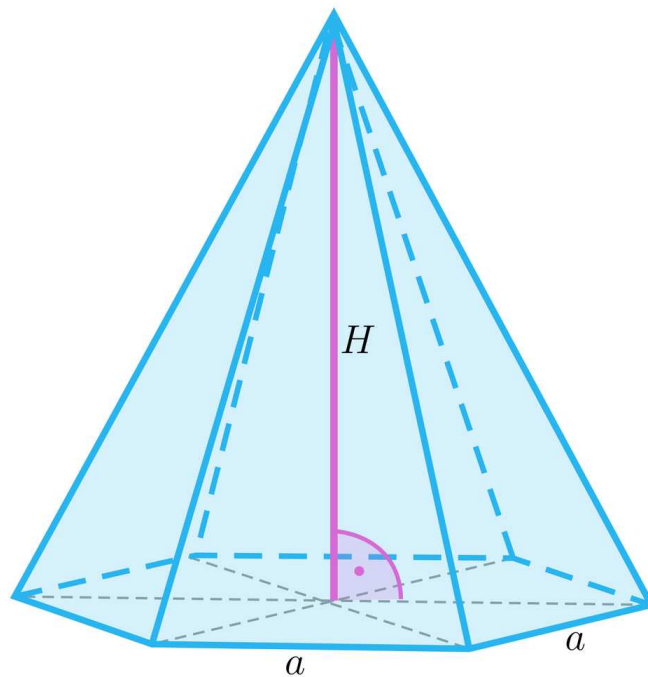
gdzie:

P_p - pole podstawy,

H - wysokość **ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego**.

Podstawą naszego ostrosłupa jest sześciokąt foremny, zatem:

$$P_p = \frac{6a^2\sqrt{3}}{4}.$$



Wzór na objętość możemy więc przedstawić następująco:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{6a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot H.$$

Przykład 1

Objętość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego wynosi V , a jego krawędź podstawy ma długość 12 cm. Wyznacz wysokość ostrosłupa w zależności od V .

Rozwiązanie

Ułóżmy równanie:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot 12^2 \sqrt{3}}{4} \cdot H,$$

$$V = 72\sqrt{3}H.$$

Ostatecznie wyznaczamy H .

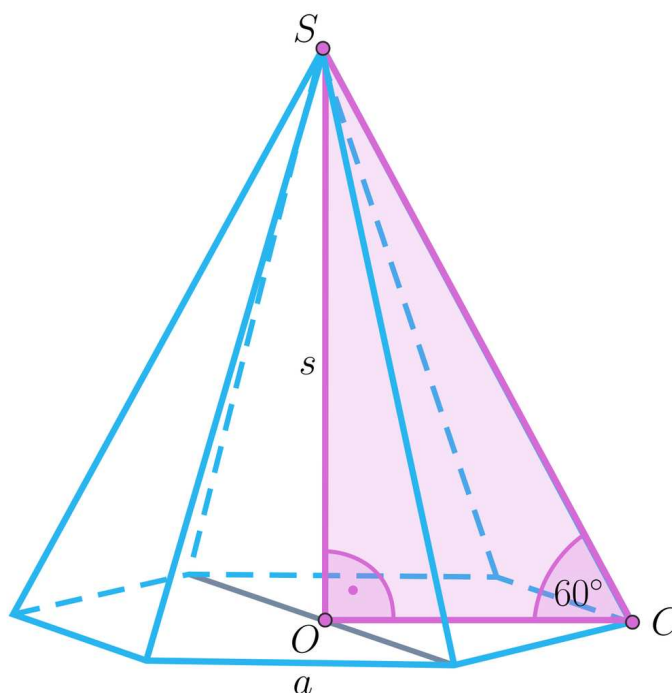
$$H = \frac{V}{72\sqrt{3}} = \frac{V\sqrt{3}}{216}$$

Przykład 2

Krawędź boczna **ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego** jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Oblicz objętość ostrosłupa, wiedząc, że jego wysokość wynosi s .

Rozwiązanie

Przeanalizujmy rysunek przedstawiający opisaną sytuację.



Niech a – długość krawędzi podstawy. Wówczas $a = \frac{s\sqrt{3}}{3}$.

$$P_p = \frac{6 \cdot \left(\frac{s\sqrt{3}}{3}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{6 \cdot 3s^2 \sqrt{3}}{9 \cdot 4} = \frac{s^2 \sqrt{3}}{2}$$

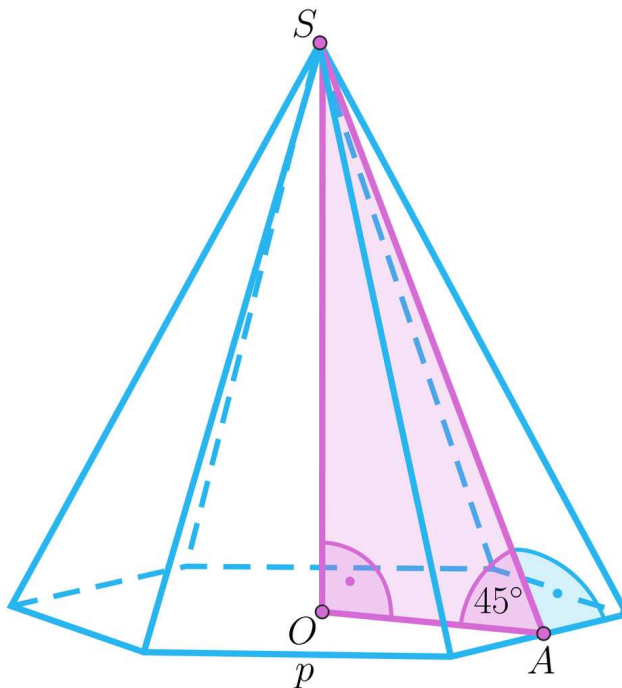
$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{s^2 \sqrt{3}}{2} \cdot s = \frac{s^3 \sqrt{3}}{6}$$

Przykład 3

Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45° . Oblicz objętość ostrosłupa, jeśli jego krawędź podstawy ma długość p .

Rozwiązanie

Przeanalizujmy rysunek przedstawiający opisaną sytuację.



Niech H – wysokość ostrosłupa.

Trójkąt SOA jest równoramienny, zatem $H = \frac{p\sqrt{3}}{2}$. Stąd:

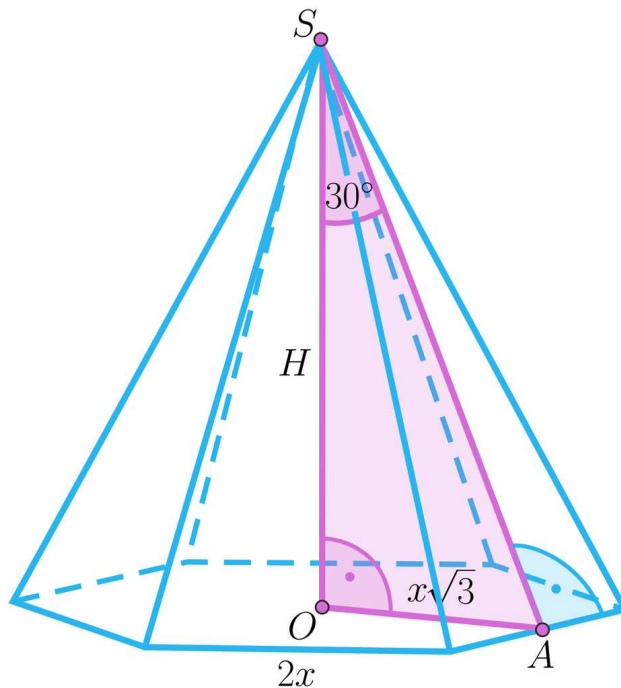
$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{6p^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{p\sqrt{3}}{2} = \frac{3p^3}{4}.$$

Przykład 4

Kąt pomiędzy wysokością ostrosłupa a wysokością jego ściany bocznej wynosi 30° . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa, wiedząc, że krawędź podstawy ma długość $2x$.

Rozwiązanie

Zapoznajmy się z rysunkiem przedstawiającym opisaną sytuację.



Niech H – wysokość ostrosłupa.

$$H = 3x$$

Stąd:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot (2x)^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 3x = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot 4x^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 3x = 6x^3 \sqrt{3}.$$

Zauważmy, że wysokość ściany bocznej:

$$h = 2x\sqrt{3}.$$

Stąd:

$$P_c = 6 \cdot \frac{(2x)^2 \sqrt{3}}{4} + 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 2x\sqrt{3} = 6x^2 \sqrt{3} + 12x^2 \sqrt{3} = 18x^2 \sqrt{3}.$$

Słownik

ostrosłup prawidłowy

ostrosłup prosty, w którym podstawa jest wielokątem foremnym

ostrosłup prawidłowy sześciokątny

ostrosłup prosty, w którego podstawie jest sześciokąt foremny

Animacja 3D

Polecenie 1

Zapoznaj się z treścią animacji 3D. Zwróć uwagę na sposób obliczania objętości ostrosłupów prawidłowych sześciokątnych.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D7KQGmXHn>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej objętości ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego.

Polecenie 2

Ostrosłup prawidłowy sześciokątny ma krawędź podstawy długości 4 cm i pole powierzchni bocznej 4 razy większe od pola jego podstawy. Oblicz objętość ostrosłupa.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Objętość ostrosłupa wynosi V . Jaką miarę ma krawędź podstawy? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $\frac{3}{2}V$

☐ $\sqrt{\frac{2V}{3}}$

☐ $\sqrt[3]{\frac{2V}{3}}$

Ćwiczenie 2



Sinus kąta nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego do płaszczyzny podstawy wynosi $\frac{1}{4}$. Długość krawędzi podstawy jest równa pierwszemu wyrazowi szeregu zbieżnego o ilorazie $\frac{1}{2}$, którego suma wynosi 10. Ile wynosi objętość ostrosłupa? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $\frac{75\sqrt{3}}{2}$

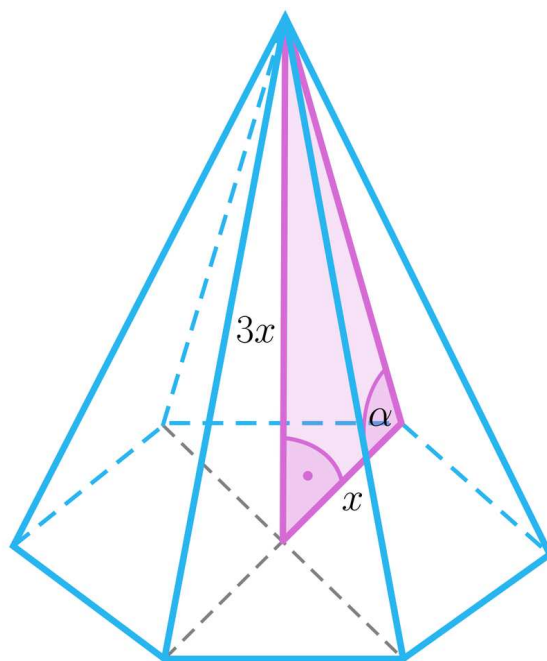
☐ $\frac{25\sqrt{5}}{2}$

☐ $\frac{\sqrt{15}}{3}$

Ćwiczenie 3



Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego przedstawionego na rysunku ma miarę $2\sqrt{10}$. Wysokość ostrosłupa ma długość $3x$.



Uzupełnij zdanie, przeciągając odpowiednią liczbę w puste pole.

Objętość ostrosłupa wynosi .

☐ $2\sqrt{3}$

☐ $24\sqrt{3}$

☐ $12\sqrt{3}$

Ćwiczenie 4



Wysokość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość $6\sqrt{3}$. Pole przekroju ostrosłupa przechodzącego przez przeciwległe krawędzie boczne, połączone krótszą przekątną podstawy ostrosłupa, wynosi $12m\sqrt{3}$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Przy każdym zdaniu w tabeli zaznacz „Prawda” albo „Fałsz”.

	Prawda	Fałsz
Dla $m = 3$ przekrój będzie trójkątem równobocznym.	☐	☐
Dla $3 < m < 3\sqrt{3}$ przekrój będzie trójkątem rozwartokątnym.	☐	☐
Dla $m = 5$ objętość ostrosłupa wynosi 900.	☐	☐

Ćwiczenie 5



Drut o długości L podzielono w stosunku 3 : 5 i stworzono ostrosłup prawidłowy sześciokątny. Krótsza część drutu stanowi obwód podstawy. Uzupełnij zdania, przeciągając odpowiednie liczby w puste pola.

- Objętość ostrosłupa wynosi .
- Sinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy wynosi .

Ćwiczenie 6



Suma krawędzi sześcianu o objętości S wynosi tyle samo, co suma krawędzi ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego, w którym krawędzie boczne są 3 razy dłuższe od krawędzi podstawy. Ile wynosi objętość tego ostrosłupa? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $\frac{S\sqrt{6}}{8}$

☐ $\frac{\sqrt[3]{S}}{2}$

☐ $\frac{S\sqrt{3}}{8}$

Ćwiczenie 7



Tangens kąta nachylenia ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego do płaszczyzny podstawy wynosi 3. Wysokość ściany bocznej ma długość h . Wykaż, że objętość ostrosłupa wynosi $\frac{h\sqrt[3]{30}}{50}$.

Ćwiczenie 8



Ostrosłup prawidłowy sześciokątny o krawędzi podstawy a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez wysokości dwóch sąsiednich ścian bocznych i wierzchołek ostrosłupa. Pole przekroju wynosi S . Oblicz objętość ostrosłupa.

Dla nauczyciela

Autor: Grażyna Kielczykowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Objętość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

X. Stereometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza objętość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego,
- wykorzystuje trygonometrię w zadaniach.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- pogadanka,
- burza mózgów,
- ćwiczenia przedmiotowe.

Formy pracy:

- praca indywidualna,
- praca w grupach,
- praca całego zespołu.

Środki dydaktyczne:

- przykład bryły w kształcie ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego,
- komputery z dostępem do Internetu,
- projektor multimedialny,
- e-podręcznik,
- arkusze papieru, pisaki.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

- Nauczyciel przedstawia temat lekcji i formułuje kryteria sukcesu.
- Uczniowie przypominają wzór na objętość ostrosłupa.

Faza realizacyjna:

- Uczniowie podzieleni na 3 grupy analizują treść w sekcji Przeczytaj. Każda z grup przygotowuje 6 pytań. Następnie wybrany przedstawiciel grupy bierze udział w quizie, w którym odpowiada na pytania wcześniej przez siebie przygotowane. Grupa, której przedstawiciel zwycięża, otrzymuje ocenę bardzo dobrą za pracę na lekcji.
- Uczniowie w parach oglądają animację, analizują przykłady tam zawarte i rozwiązują zadania. Następnie wspólnie z nauczycielem omawiają napotkane trudności.
- Uczniowie zastanawiają się, jak zmienić wymiary odcinków w ostrosłupach z przykładów, aby objętość zwiększyła się dwukrotnie, zmniejszyła dwukrotnie, zwiększyła o 200%, itd.
- Uczniowie w parach rozwiązują zadania 7,8 ze Sprawdź się.

Faza podsumowująca:

Uczniowie indywidualnie rozwiązują zadania 4-6 ze Sprawdź się.

Praca domowa:

Uczniowie rozwiązują zadania 1-3 ze Sprawdź się.

Materiały pomocnicze:

[Ostrosłup i jego własności](#)

Wskazówki metodyczne:

Uczniowie mogą wykorzystać animację 2D jako materiał powtórzeniowy przed sprawdzianem.