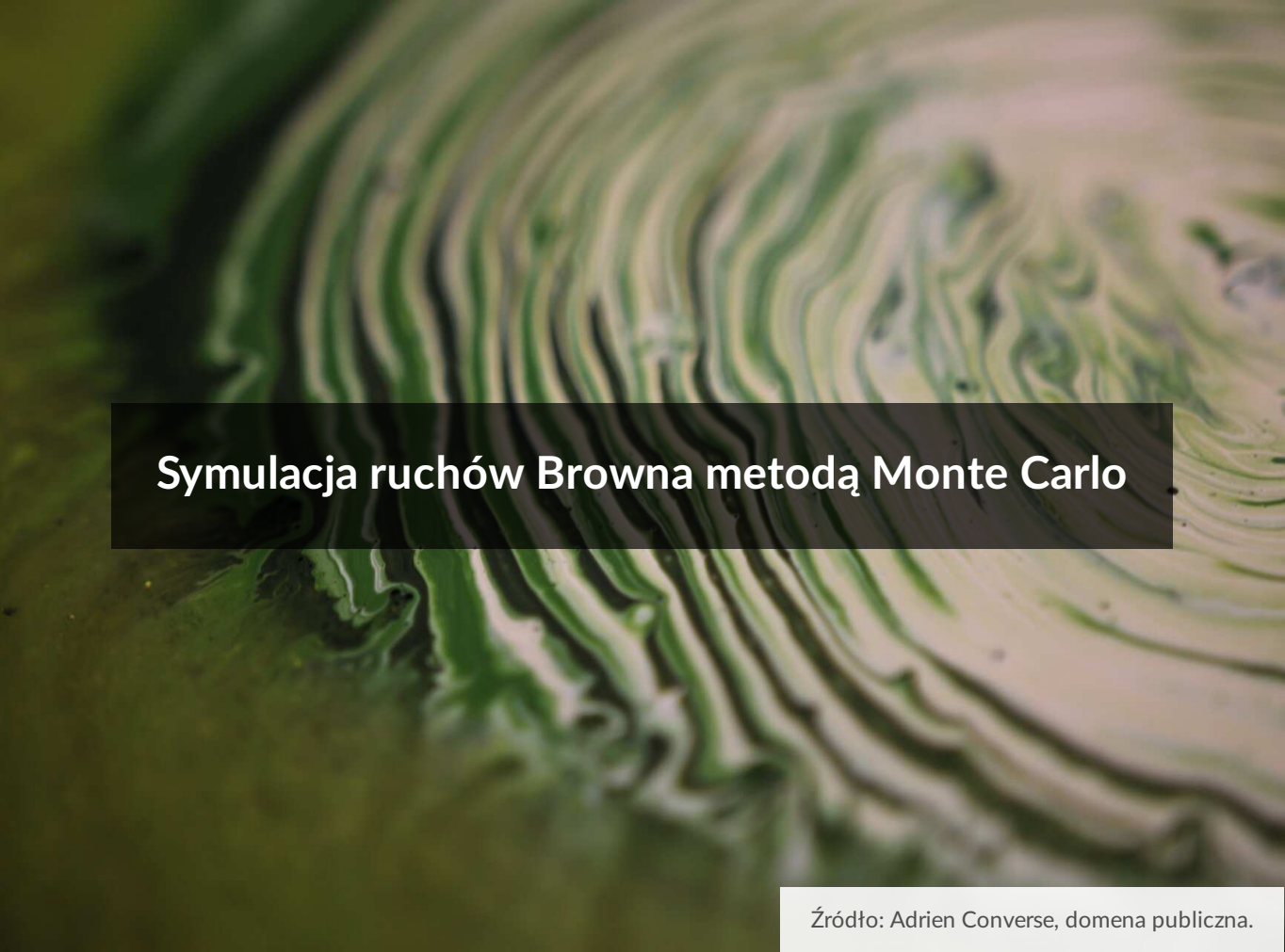




Symulacja ruchów Browna metodą Monte Carlo

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Symulacja ruchów Browna metodą Monte Carlo

Źródło: Adrien Converse, domena publiczna.

Proces modelowania ruchów Browna występuje na poziomie molekularnym, dzięki czemu uznajemy, że jest on losowy. Natomiast metoda Monte Carlo korzysta z losowości, aby uzyskać rezultaty zbliżone do realnych. Z tego e-materiału dowiesz się, w jaki sposób przeprowadzić symulację ruchów Browna metodą Monte Carlo.

Implementację symulacji ruchów Browna za pomocą omawianej metody przedstawiamy w e-materiałach:

- [Symulacja ruchów Browna metodą Monte Carlo w języku C++](#),
- [Symulacja ruchów Browna metodą Monte Carlo w języku Java](#),
- [Symulacja ruchów Browna metodą Monte Carlo w języku Python](#).

Więcej zadań? Sięgnij do: [Symulacja ruchów Browna metodą Monte Carlo – zadania naturalne](#)

Twoje cele

- Przeanalizujesz sposób poruszania się cząsteczki pod wpływem ruchów Browna.
- Zaimplementujesz algorytm generowania liczb pseudolosowych do odtworzenia chaotycznych zjawisk występujących w przyrodzie.
- Scharakteryzujesz algorytm przeprowadzania prostej symulacji ruchów Browna.

Przeczytaj

Modelowanie ruchów Browna

Ruchy Browna (o których możesz przeczytać m.in. w e-materiale [Modelowanie ruchów Browna](#)) zostały opisane — niezależnie — przez Alberta Einsteina, w 1905 roku oraz przez polskiego fizyka Mariana Smoluchowskiego, w 1906 roku. Ich nazwa pochodzi od botanika Roberta Browna, który pod mikroskopem zaobserwował chaotyczne ruchy pyłku kwiatowego. Ruchy Browna powodowane są nieustannym zderzaniem się cząsteczek płynu w danym ośrodku. Przykładowy model takiego procesu może polegać na umieszczeniu wirtualnej cząsteczki w wirtualnym płynie, w którym — co pewien określony czas — cząsteczka zostaje przemieszczona w losowym kierunku, w wyniku wirtualnej kolizji.

Cały proces ma charakter uśredniony. Dzięki temu każda kolizja powoduje przesunięcie cząsteczki o określoną z góry odległość.

Metoda Monte Carlo

Metoda Monte Carlo została opracowana między innymi przez polskiego naukowca Stanisława Ulama oraz węgiersko — amerykańskiego naukowca Johna von Neumanna. Wykorzystano ją podczas prac nad bombą jądrową w celu symulacji procesu rozpadu jąder cząsteczek. Proces był na tyle skomplikowany, że zastosowanie klasycznych modeli obliczeniowych nie zdawało egzaminu.

Metoda polega na przeprowadzeniu procesu w losowy sposób, zakładając, że po wystarczająco dużej liczbie prób otrzymamy wynik zbliżony do rzeczywistego.

Przykład 1

Metodę Monte Carlo można zastosować, aby obliczyć prawdopodobieństwo wyrzucenia orła podczas rzutu dwustronną monetą. W tym celu przeprowadzamy dużo prób, a następnie zestawiamy liczbę wyrzuconych orłów z liczbą wszystkich rzutów. Po odpowiednio dużej liczbie prób liczba wyrzuconych orłów podzielona przez liczbę rzutów zbliży się do rzeczywistej wartości 0,5.

Symulacja ruchów Browna metodą Monte Carlo

Symulacja ruchów Browna metodą Monte Carlo wykorzystywana jest zazwyczaj w celu poznania możliwej trasy, zgodnie z którą będzie poruszać się cząsteczka. Tego rodzaju symulacje mogą generować sztuczne wykresy giełdowe, dźwięki (np. [szum czerwony](#)), trasy losowego błędzenia oraz różnego rodzaju kształty (np. płatki śniegu).

W celu utworzenia szkicu trasy, którą poruszała się cząsteczka, możemy wykorzystać graficzne możliwości języków programowania. W tej części lekcji omówimy jednak najważniejsze aspekty symulacji ruchów Browna metodą Monte Carlo.

Aby zwizualizować proces losowego poruszania się cząsteczki w płynie, zakładamy, że każda kolizja powoduje przemieszczenie się cząsteczki o określoną długość w dowolnym kierunku. W tym celu wybieramy losowy kąt z zakresu $\langle 0, 2\pi \rangle$, a następnie dokonujemy jej przesunięcia o wybraną długość pod wylosowanym kątem.

W poprzednich e—materiałach dotyczących modelowania ruchów Browna posługiwaliśmy się algorytmem, w którym cząsteczka reprezentowana była przez dwie zmienne zmiennoprzecinkowe. W każdej kolizji przesuwalismy cząsteczkę o wektor długości r pod losowo wybranym kątem. Pozycję po każdym przesunięciu zapisywaliśmy w tablicy. Po zakończeniu algorytmu wypisywaliśmy ostatni punkt.

Jeżeli chcemy utworzyć regularniejsze trasy, to możemy pozwolić sobie na odstępstwo od wyboru każdego losowego kąta z przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$. Możemy na przykład postanowić, że losujemy tylko spośród wielokrotności wybranego kąta. W tym celu należy wylosować liczbę całkowitą z przedziału od 0 (włącznie) do wybranej liczby k (nie włączając k). Wówczas, po podzieleniu kąta 2π przez k , a następnie pomnożeniu przez wylosowaną liczbę, uzyskamy losową wielokrotność kąta $\frac{2\pi}{k}$.

Przykładem pseudokodu uwzględniającego powyższą zmianę (`random_int(k)`) jest funkcja generująca losową liczbę całkowitą od 0 (włącznie) do k (włącznie):

```
1 // liczba kolizji
2 n = 10000
3
4 // obrót nastąpi o wielokrotność kąt 360/k stopni
5 k = 3
6
7 // długość wektora
8 r = 0.1
9
10 // początkowe położenie cząsteczki
11 x = 0.0
12 y = 0.0
13
14 // tablice przechowujące kolejne pozycje cząsteczki
15 deklaracja tablicy ruchy_x o wielkości n+1
16 deklaracja tablicy ruchy_y o wielkości n+1
17
```

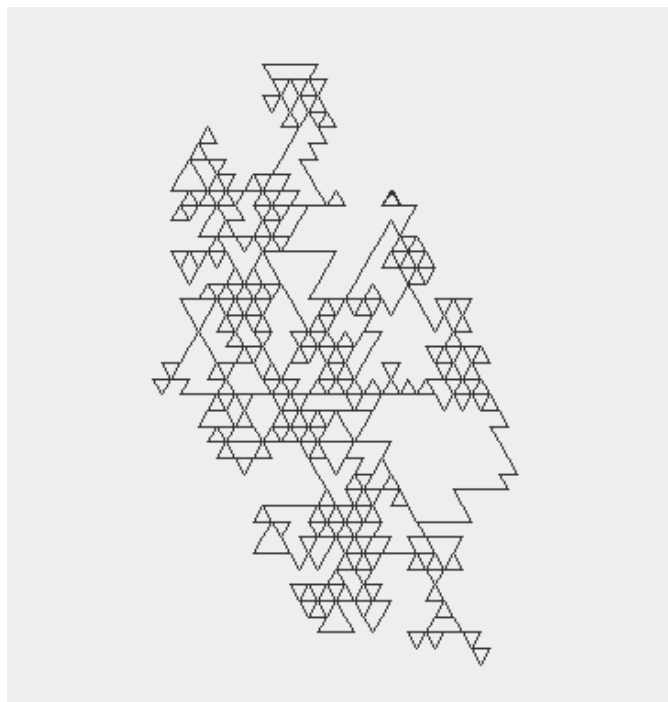
```

18 // zapisz w tablicach początkowe położenie cząsteczki
19 ruchy_x[0] = x
20 ruchy_y[0] = y
21
22 // dla każdej kolizji
23 dla i = 1, 2, ..., n wykonuj
24     // losowa wielokrotność kąta 360/k kąt
25     fi = random_int(k - 1) * 2 * PI / k;
26
27     // zamień postać wektora (długość, kąt) na współrzędne
28     dx = r * cosinus(fi)
29     dy = r * sinus(fi)
30
31     // przesun cząsteczkę o wektor [dx, dy]
32     x = x + dx
33     y = y + dy
34
35     // zapisz w tablicach obecne położenie cząsteczki
36     ruchy_x[i] = x
37     ruchy_y[i] = y
38
39 // wypisz końcową pozycję
40 wypisz x
41 wypisz y

```

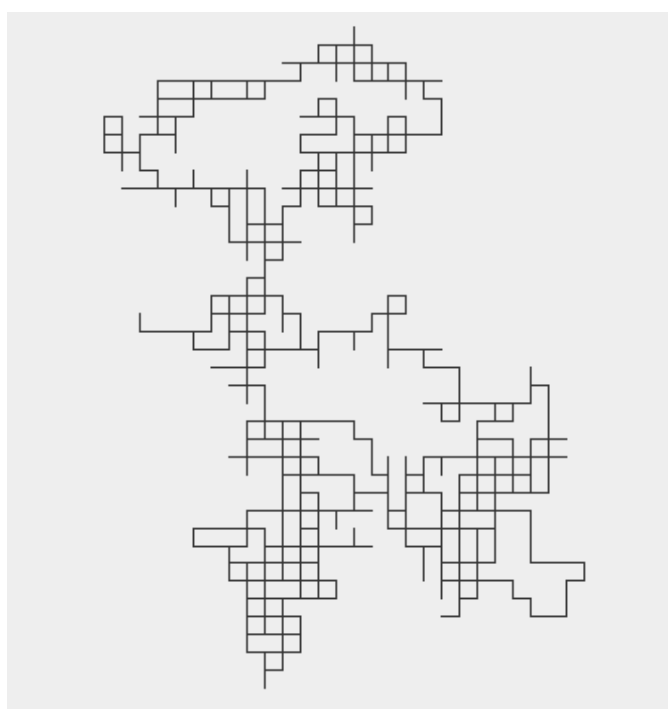
Utworzone w ten sposób trasy mogą wyglądać następująco:

$k = 3$



Źródło: tylko do użytku edukacyjnego.

$k = 4$



Źródło: tylko do użytku edukacyjnego.

$n = 5$



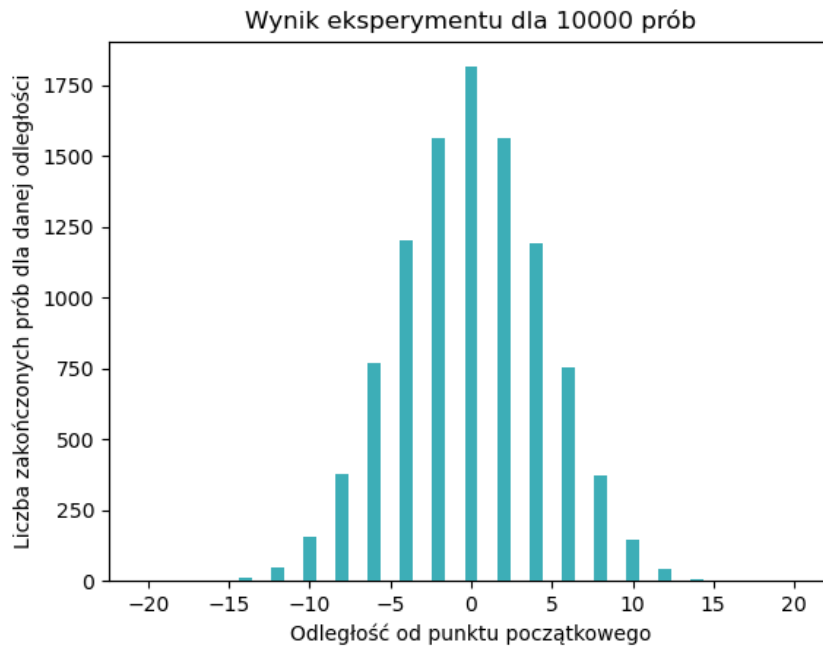
Źródło: tylko do użytku edukacyjnego.

Opisane powyżej zagadnienie znane jest także jako **błądzenie losowe**. Spróbujmy przeprowadzić prosty eksperyment za pomocą metody Monte Carlo. Umieścimy cząsteczkę na osi liczbowej w punkcie 0. W każdej kolejnej iteracji niech cząsteczką porusza się losowo w prawo lub lewo o 1. Po k (np. 20) iteracjach zapiszmy pozycję cząsteczki. Eksperyment powtórzmy n (np. 10 000) razy. Na koniec stwórzmy wykres słupkowy, w którym na osi poziomej znajdzie się odległość cząstki od położenia początkowego, a na osi pionowej liczba prób, które zakończyły się na tej pozycji.

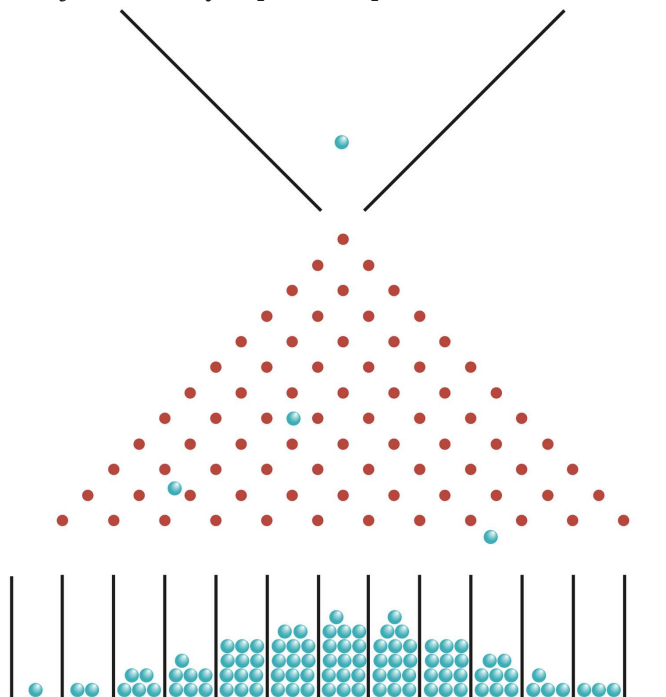
Eksperyment możemy zrealizować zgodnie z poniższym pseudokodem:

```
1 wynik[0..2 * k] - tablica wypełniona zerami
2
3 // liczba prób
4 n = 10000
5 // liczba ruchów
6 k = 20
7
8 dla i = 0, 1, ..., n - 1 wykonuj
9     // pozycja na środku
10    pozycja = k
11
12    dla j = 0, 1, ..., k - 1 wykonuj
13        pozycja += random_int(1) * 2 - 1
14        wynik[pozycja] += 1
15
16 rysuj wykres tablicy wynik
```

Wynik przykładowego eksperymentu:



Przeprowadzony eksperyment to nic innego jak puszczone kulki na [desce Galtona](#). Kulka zaczyna swoją wędrówkę od góry, a następnie natrafia na przeszkodę, która powoduje jej ruch w lewo lub w prawo z jednakowym prawdopodobieństwem.



Eksperyment wizualizuje [rozkład dwumianowy](#) (w Polsce zwany także rozkładem Bernoulliego), który w nieskończoności dąży do [rozkładu normalnego](#), znanego jako **rozkład Gaussa**.

Proces Wienera

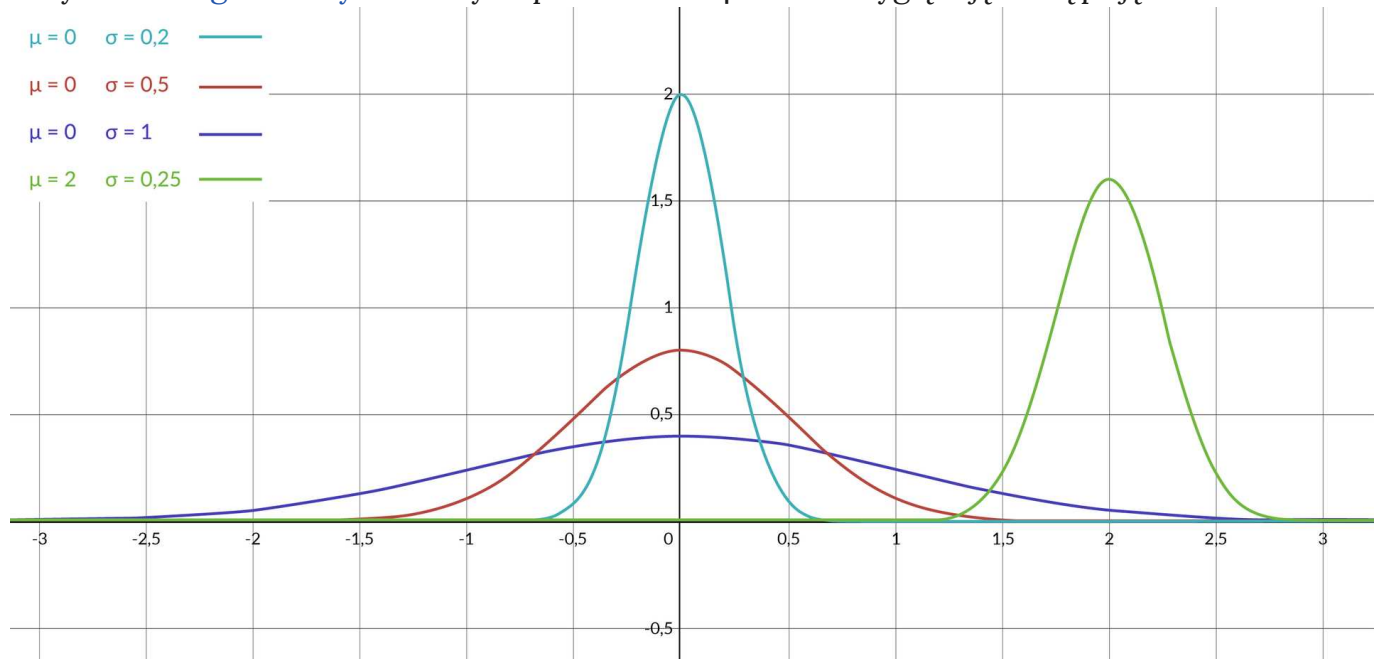
Przeprowadzony eksperyment doprowadza nas do **procesu Wienera**, który w gruncie rzeczy jest dokładnie tym samym, co ruchy Browna, czyli matematycznym opisem chaotycznego ruchu cząsteczki w płynie. Za pomocą tego procesu oraz metody Monte Carlo możemy przeprowadzić symulację ruchów Browna, która dużo lepiej odzwierciedla poruszanie się cząsteczki w naturze. Proces ten w celu wyznaczenia następnego położenia cząsteczki wykorzystuje funkcję rozkładu prawdopodobieństwa Gaussa, który określamy wzorem:

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

gdzie μ oznacza wartość oczekiwaną (średnią), a σ to odchylenie standardowe.

W powyższym równaniu $\exp(x) = e^x$, przy czym e to liczba Eulera, równa w przybliżeniu 2,71828.

Przykładowe **gaussiany** dla danych parametrów μ oraz σ wyglądają następująco:



Zwróćmy uwagę na podobieństwo rozkładów prawdopodobieństwa do poprzednio utworzonego wykresu.

Proces Wienera, oznaczony symbolem W , zdefiniowany jest następująco:

1. Proces W jest krzywą ciągłą o punkcie początkowym równym 0.

$$W(0) = 0$$

2. Proces W ma niezależne od siebie przyrosty (lub spadki).

3. Rozkład prawdopodobieństwa przyrostów w czasie o długości dt jest rozkładem normalnym Gaussa o wartości średniej 0 z wariancją równą dt .

$$W(t + dt) - W(t) \sim N(0, dt)$$

Definicję tę można zatem przedstawić w uproszczeniu jako funkcję błędzenia losowego, w zależności od czasu, w następujący sposób:

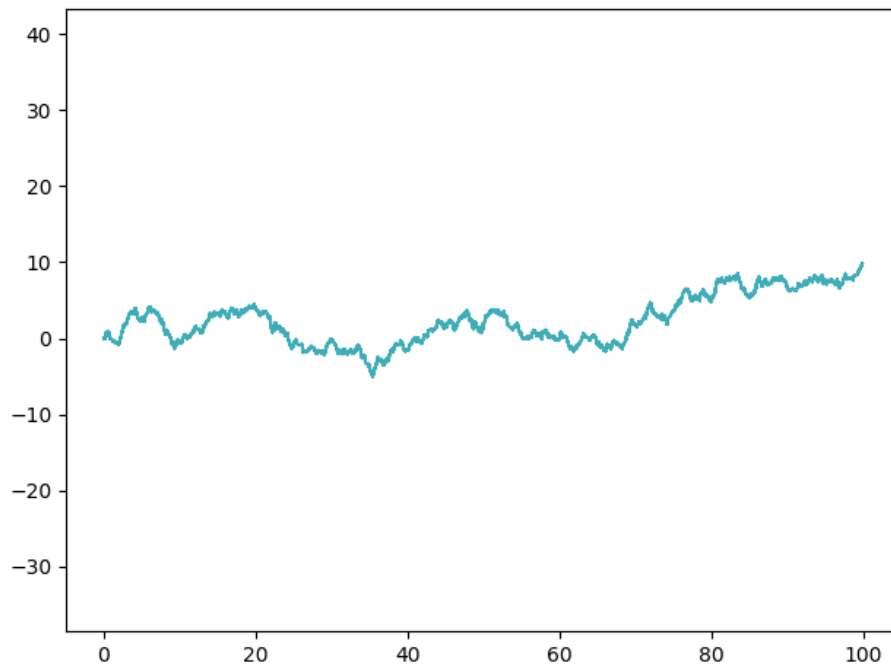
$$W(t + dt) = W(t) + k \cdot N(0, dt)$$

gdzie $N(\mu, \sigma^2)$ jest zmienną losową zgodną z rozkładem normalnym Gaussa z parametrami μ oraz σ . Przy czym k jest współczynnikiem długości wykonywanych kroków.

Realizacja wyznaczania powyższego procesu powinna być zgodna z następującym pseudokodem (`sqrt(d)` to funkcja obliczająca pierwiastek danej liczby d):

```
1 // liczba kolizji
2 n = 100
3
4 // współczynnik długości kroku
5 k = 1
6
7 // przyrost czasu
8 dt = 0.1
9
10 // tablica przechowujące kolejne pozycje cząsteczki
11 deklaracja tablicy w o wielkości n+1
12
13 // początkowe położenie cząsteczki
14 w[0] = 0.0
15
16 dla i = 1, 2, ..., n wykonuj
17     w[i] = w[i - 1] + k * random_n(0, sqrt(dt))
18
19 wykreśl trasę x, y
```

Wykres przykładowej trasy W utworzonej tą metodą w zależności od czasu ($n = 1000$, $k = 1$, $dt = 0.1$):

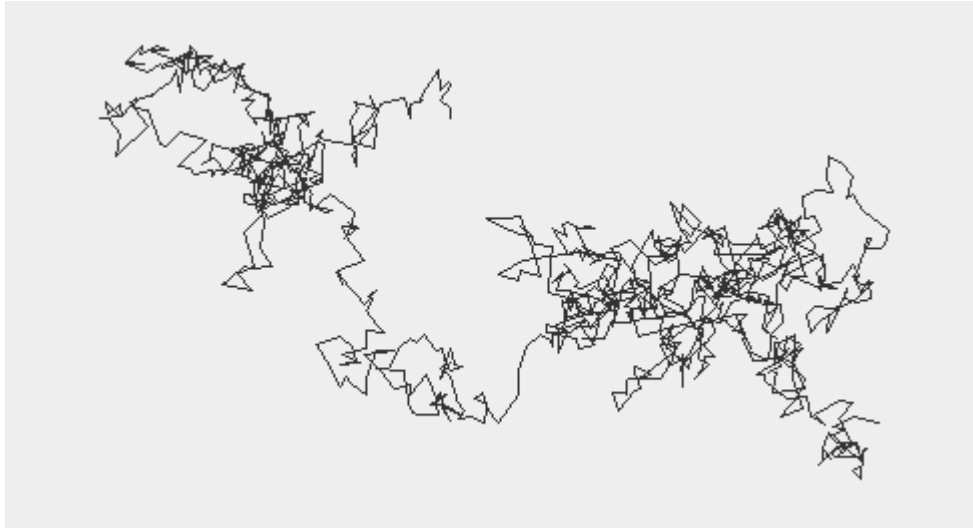


Powyższy kształt można zastosować jako losowo wygenerowany [profil hipsometryczny](#) lub wykres giełdowy.

Jeżeli chcemy wygenerować trasę dwuwymiarową, musimy jednocześnie utworzyć 2 trasy, które traktujemy osobno jako współrzędną poziomą oraz pionową.

```
1 // liczba kolizji
2 n = 100
3
4 // współczynnik długości kroku
5 k = 1
6
7 // przyrost czasu
8 dt = 0.1
9
10 // tablice przechowujące kolejne pozycje cząsteczki
11 deklaracja tablicy x o wielkości n+1
12 deklaracja tablicy y o wielkości n+1
13
14 // początkowe położenie cząsteczki
15 x[0] = 0.0
16 y[0] = 0.0
17
18 dla i = 1, 2, ..., n wykonuj
19     x[i] = x[i - 1] + k * random_n(0, sqrt(dt))
20     y[i] = y[i - 1] + k * random_n(0, sqrt(dt))
```

Wygenerowane w ten sposób trasy mogą wyglądać następująco:



Źródło: tylko do użytku edukacyjnego.

Zwróćmy uwagę na różnorodne długości, o które przemieszcza się cząsteczka. Symulacja wykorzystująca proces Wienera ma wyjątkowo przydatną własność. Aby poznać wynik symulacji, nie musimy jej przeprowadzać w całości. W momencie, gdy interesuje nas tylko wynik symulacji, wystarczy, że przeprowadzimy jej pierwszy krok z parametrem dt , który ustawimy na długość całej symulacji.

Słownik

szum czerwony

dźwięk szumu powstały w wyniku ruchów Browna występujących w przyrodzie

deska Galtona

deska z gwoździami rozmieszczonymi na kształt trójkąta. Kulka spadająca na gwóźdź spadnie z jego lewej lub prawej strony. Eksperyment pozwala zwizualizować dwumianowy rozkład prawdopodobieństwa

rozkład dwumianowy

dyskretny rozkład prawdopodobieństwa opisujący liczbę sukcesów w ciągu niezależnych prób (zwanych próbami Bernoulliego), z których każda ma jednakowe prawdopodobieństwo sukcesu

rozkład normalny

jeden z najważniejszych w statystyce rozkładów prawdopodobieństwa. Definicja jego funkcji gęstości jest następująca:

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

gaussian

funkcje zgodne z następującą formą:

$$f(x) = a \cdot \exp\left(-\frac{(x-b)^2}{2c^2}\right)$$

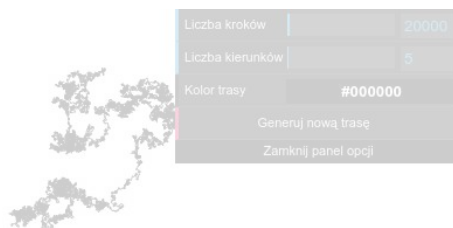
profil hipsometryczny

pionowy przekrój lądu przedstawiający rozkład wysokości

Aplet

Polecenie 1

Uruchom Aplet prezentujący tworzenie trasy dla ruchów Browna jednej cząsteczki. Sprawdź działanie dla różnych wartości danych wejściowych.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DOKghbIDR>

Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dopasuj postaci do odkryć.

Ruchy Browna

Robert Brown

Marian Smoluchowski

Stanisław Ulam

Albert Einstein

John von Neumann

Metoda Monte Carlo

Ćwiczenie 2



Wskaż, jaka jest najmniejsza liczba iteracji, którą musimy wykonać, aby określić położenie cząsteczki poruszającej się, zgodnie z ruchami Browna, z wykorzystaniem procesu Wienera po czasie $t = 50s$.

☐ 5000

☐ 500

☐ 1

☐ 50

Ćwiczenie 3



Wskaż, które z poniższych mogą być sztucznie wygenerowane za pomocą symulacji ruchów Browna.

☐ krajobrazu górski

☐ wykres giełdowy

☐ PESEL

☐ profil wysokościowy trasy wyścigu kolarskiego

Ćwiczenie 4



Wskaż poprawną odpowiedź. Ruchy Browna to szczególny przypadek błędzenia losowego.

☐ fałsz

☐ prawda

Ćwiczenie 5



Uzupełnij definicję procesu Wienera. Elementy do uzupełnienia są do wyboru.

1. Proces W jest krzywą ciągłą o punkcie początkowym równym .
2. Proces W ma niezależne od siebie .
3. Rozkład prawdopodobieństwa przyrostów w czasie o długości dt jest rozkładem o wartości średniej 0 z wariancją równą .

normalnym Gaussa

dt

przyrosty

0

Ćwiczenie 6



Wskaż, w jaki sposób możemy przeprowadzić dwuwymiarowy proces Wienera.

- ☐ Losowo traktujemy 1-wymiarowy proces Wienera – raz jako współrzędną x , raz jako y .
- ☐ Przeprowadzamy 2 procesy Wienera – jeden traktujemy jako współrzędną x , drugi jako y .
- ☐ Przekształcamy 1 proces za pomocą funkcji matematycznej na drugi, otrzymując 2 procesy – jeden traktujemy jako współrzędną x , drugi jako y .
- ☐ Wybieramy losowy kąt, pod którym przemieszczamy cząsteczkę o wyliczony przyrost.

Ćwiczenie 7



Wskaż poprawną odpowiedź.

Przyrosty czasu w procesie Wienera muszą być równomierne.

- ☐ fałsz
- ☐ prawda

Ćwiczenie 8



Wskaż, ile procesów Wienera przeprowadzisz, aby zasymulować poruszanie się cząsteczki zgodnie z ruchami Browna w trójwymiarowej przestrzeni.

☐ 2

☐ 1

☐ 4

☐ 3

Dla nauczyciela

Autor: Maurycy Gast

Przedmiot: Informatyka

Temat: Symulacja ruchów Browna metodą Monte Carlo

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Cele kształcenia – wymagania ogólne

I. Rozumienie, analizowanie i rozwiązywanie problemów na bazie logicznego i abstrakcyjnego myślenia, myślenia algorytmicznego i sposobów reprezentowania informacji.

II. Programowanie i rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem komputera oraz innych urządzeń cyfrowych: układanie i programowanie algorytmów, organizowanie, wyszukiwanie i udostępnianie informacji, posługiwanie się aplikacjami komputerowymi.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

I. Rozumienie, analizowanie i rozwiązywanie problemów.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

3) objaśnia dobrany algorytm, uzasadnia poprawność rozwiązania na wybranych przykładach danych i ocenia jego efektywność;

II. Programowanie i rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem komputera i innych urządzeń cyfrowych.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

3) sprawnie posługuje się zintegrowanym środowiskiem programistycznym przy pisaniu, uruchamianiu i testowaniu programów;

I + II. Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

3) objaśnia, a także porównuje podstawowe metody i techniki algorytmiczne oraz struktury danych, wykorzystując przy tym przykłady problemów i algorytmów, w szczególności:

h) metodę Monte Carlo (obliczanie przybliżonej wartości liczby π , symulacja ruchów Browna),

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne (językiem ucznia):

- Przeanalizujesz sposób poruszania się cząsteczki pod wpływem ruchów Browna.
- Zaimplementujesz algorytm generowania liczb pseudolosowych do odtworzenia chaotycznych zjawisk występujących w przyrodzie.
- Scharakteryzujesz algorytm przeprowadzania prostej symulacji ruchów Browna.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem multimediu i ćwiczeń interaktywnych;
- ćwiczenia praktyczne;
- mapa myśli.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- telefony z dostępem do internetu.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. **Przygotowanie do zajęć.** Nauczyciel loguje się na platformie i udostępnia e-materiał: „Symulacja ruchów Browna metodą Monte Carlo”. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia temat i cele lekcji zawarte w sekcji „Wprowadzenie”.
2. Nauczyciel wyświetla temat oraz cele zajęć, omawiając lub ustalając razem z uczniami kryteria sukcesu.
3. **Rozpoznanie wiedzy uczniów.** Nauczyciel prosi wybranego ucznia lub uczniów o przedstawienie sytuacji problemowej związanej z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. **Praca z tekstem.** Uczniowie analizują treści z sekcji „Przeczytaj” wyświetlone na tablicy. Chętna lub wybrana osoba przypomina najważniejsze informacje dotyczące ruchów Browna. Inna osoba zapisuje je na tablicy w formie mapy myśli.
2. **Praca z multimedium.** Nauczyciel wyświetla zawartość sekcji „Aplet”. Uczniowie wspólnie zapoznają się z treścią zawartego w niej multimedium. Zapisują ewentualne problemy i pytania. Po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe treści.
3. **Ćwiczenie umiejętności.** Liga zadaniowa - uczniowie wykonują indywidualnie na czas ćwiczenia nr 1-8 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają zadania na forum.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel zadaje pytania podsumowujące, np.
 - na czym polega metoda Monte Carlo?
 - jak poruszają się cząsteczki pod wpływem ruchów Browna?
 - co to jest profil hipsometryczny?
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

1. Napisz notatkę, w której wyjaśnisz, jakie przykłady ruchów Browna potrafisz wskazać w otaczającym cię świecie.

Wskazówki metodyczne:

- Uczniowie mogą wykorzystać treści w sekcjach: „Przeczytaj”, „Aplet”, „Sprawdź się” jako materiał do lekcji powtórkowej.

