Funkcje trygonometryczne cosinusa podwojonego kąta – zastosowania do obliczeń

Funkcje trygonometryczne cosinusa podwojonego kąta – zastosowania do obliczeń

Źródło: Kelly Lacy, dostępny w internecie: www.pexels.com.

Na poprzednich lekcjach poznałeś wzory na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów oraz wzory na funkcje trygonometryczne podwojonego kąta. Na tej lekcji skupimy się na wzorze na cosinus podwojonego kąta. Za pomocą tego wzoru będziemy mogli dowodzić tożsamości, obliczać wartości cosinusa podwojonego kąta, gdy znane są funkcje trygonometrycznego pojedynczego kąta.

Twoje cele

- Nauczysz się stosować wzór na cosinus podwojonego kąta do obliczania wartości innych kątów.
- Nauczysz się stosować wzór na cosinus podwojonego kąta do dowodzenia tożsamości.

Przeczytaj

Na poprzednich zajęciach wyprowadziliśmy wzory, które będą miały zastosowanie w bieżącej lekcji. Przypomnijmy je:

> **Twierdzenie: o funkcjach trygonometrycznych podwojonego kąta**
>
> 1. Dla dowolnych kątów α zachodzą wzory:
> $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$,
> $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.
> 2. Dla takich kątów α, że $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ i $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, zachodzi wzór:
> $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

W wielu zadaniach, zamiast poznanych wzorów, wykorzystuje się wzory na funkcje trygonometryczne podwojonego kąta uzależnionego od tangensa tego kąta. Teraz przedstawimy taką zależność dla $\cos 2\alpha$.

We wzorze na cosinus podwojonego kąta lewą stronę podzielmy przez jedynkę trygonometryczną.

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}$.

Podzielmy licznik i mianownik przez $\cos^2\alpha$:

$\frac{\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$.

Ponieważ dzieliliśmy przez $\cos^2\alpha$, musimy założyć, że:

$\cos\alpha \neq 0$ czyli $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Zatem sformułujmy twierdzenie:

> **Twierdzenie: o cosinusie podwojonego kąta**
>
> Jeżeli $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, to zachodzi wzór:
>
> $\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$.

A teraz zaprezentujemy kilka przykładów wykorzystania poznanych wzorów.

> **Przykład 1**
>
> Obliczymy wartość wyrażenia $\frac{1+\cos 62^\circ - \cos^2 31^\circ}{\cos^2 31^\circ} - 1$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że $62^\circ = 2 \cdot 31^\circ$, a zatem możemy wykorzystać wzór na cosinus podwjonego kąta 31°:

$\frac{1+\cos 62^\circ - \cos^2 31^\circ}{\cos^2 31^\circ} - 1 =$

$= \frac{1+2\cos^2 31^\circ - 1 - \cos^2 31^\circ}{\cos^2 31^\circ} - 1 =$

$= \frac{\cos^2 31^\circ}{\cos^2 31^\circ} - 1 = 0.$

Zatem $\frac{1+\cos 62^\circ - \cos^2 31^\circ}{\cos^2 31^\circ} - 1 = 0.$

Przykład 2

Obliczymy $\sin\frac{\alpha}{2}$, jeżeli wiadomo, że $\cos\alpha = -\frac{161}{289}$ i $180^\circ < \alpha < 360^\circ$.

Rozwiązanie

Ponieważ $180^\circ < \alpha < 360^\circ$, więc $90^\circ < \frac{\alpha}{2} < 180^\circ$, czyli $\sin\frac{\alpha}{2} > 0$.

Wykorzystamy wzór na cosinus podwojonego kąta w następującej postaci:
$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

Przekształćmy wzór do postaci:

$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$

Ponieważ $\sin\frac{\alpha}{2} > 0$, więc wzór przyjmuje postać:

$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$.

Wobec tego możemy obliczyć wartość $\sin\frac{\alpha}{2}$:

$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{161}{289}}{2}} = \sqrt{\frac{225}{289}} = \frac{15}{17}$.

Wniosek

Wiedząc, jaką miarę ma $\cos 2\alpha$ ze wzorów na cosinus podwojonego kąta, łatwo obliczymy wartości $\cos\alpha$ i $\sin\alpha$.

Przykład 3

Obliczymy $\operatorname{tg}\alpha$, jeżeli wiadomo, że $\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$.

Rozwiązanie

Wykorzystamy wzór na cosinus podwojonego kąta: $\cos 2\alpha = \frac{1-\text{tg}^2\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha}$.

Zapiszmy zatem zależność:

$\frac{1}{3} = \frac{1-\text{tg}^2\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha}$

i przekształćmy do równania:

$1+\text{ tg}^2\ \alpha = 3\left(1-\text{ tg}^2\ \alpha\right)$.

Wówczas:

$\text{tg}^2\ \alpha = \frac{1}{2}$.

Zatem poszukiwana wartość to:

$\text{tg}\ \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $\text{tg}\ \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Przykład 4

Udowodnimy, że równość $\frac{1-2\cos\frac{x}{2}+\cos x}{1+2\cos\frac{x}{2}+\cos x} = -\text{tg}^2\frac{x}{4}$ jest tożsamością.

Rozwiązanie

Zapiszmy założenia:

$1+2\cos\frac{x}{2}+\cos x \neq 0$,

$\cos\frac{x}{2} \neq 0$.

Na początek po lewej stronie podstawimy $\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$:

$L = \frac{1-2\cos\frac{x}{2}+\cos x}{1+2\cos\frac{x}{2}+\cos x} = \frac{1-2\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}-1}{1+2\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}-1} =$

$= \frac{2\cos^2\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}}{2\cos x^2\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}} = \frac{2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-1\right)}{2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+1\right)} =$

Po skróceniu przez $\cos\frac{x}{2}$, korzystamy dwukrotnie ze wzoru cosinus podwojonego kąta:

$= \frac{\cos\frac{x}{2}-1}{1+\cos\frac{x}{2}} = \frac{1-2\sin^2\frac{x}{4}-1}{2\cos^2\frac{x}{4}-1+1} = -\frac{2\sin^2\frac{x}{4}}{2\cos^2\frac{x}{4}} = -\text{tg}^2\frac{x}{4} = P$.

Słownik

cosinus podwojonego kąta

Jeżeli $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, to zachodzi wzór:

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem, a następnie wykonaj kolejne polecenia.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/Doz2j3uJH

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego funkcji trygonometrycznych cosinusa podwojonego kąta.

Polecenie 2

Oblicz $\cos 22,5^\circ$.

Polecenie 3

Oblicz $\sin 82,5^\circ$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Udowodnij, że równość $\frac{1-8\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha}=1$ jest tożsamością.

Ćwiczenie 8

Udowodnij, że równość: $\frac{\cos^2 2\alpha-4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\frac{1}{\operatorname{tg}2\alpha}-\sin 4\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$ jest tożsamością.

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Funkcje trygonometryczne cosinusa podwojonego kąta – zastosowania do obliczeń

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
VII. Trygonometria. Zakres podstawowy. Uczeń:
1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od $0°$ do $180°$,
w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów $30°$, $45°$, $60°$;
Zakres rozszerzony 5) korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje wzór na cosinus podwojonego kąta do obliczania wartości innych kątów,
- dowodzi tożsamość korzystając ze wzoru na cosinus podwojonego kąta.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- eksperyment myślowy;

- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel zadaje uczniom pytanie dotyczące ich aktualnego stanu wiedzy w zakresie poruszanej tematyki. Prosi wybranego ucznia lub uczennicę o zapisywanie propozycji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Film samouczek”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
2. Nauczyciel przechodzi do sekcji „Sprawdź się”. Zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2, i będą to robić wspólnie. Wybrana osoba czyta po kolei polecenia. Po każdym przeczytanym poleceniu ochotnik udziela odpowiedzi. Reszta uczniów ustosunkowuje się do niej, proponując swoje pomysły. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po zakończeniu każdego ćwiczenia wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują kolejne ćwiczenia nr 6 i 7 z sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, które nie zostały dokończone na zajęciach.

Materiały pomocnicze:

- Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Film samouczek” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania w temacie „Funkcje trygonometryczne cosinusa podwojonego kąta – zastosowania do obliczeń”.