



Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Źródło: Ben Elwood, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Włoski matematyk, filozof, mnich
Luigi Guido Grandi opisał w 1703 roku
dziwny ciąg geometryczny, który nazywany
jest dzisiaj szeregiem Grandiego.

Pierwszy wyraz ciągu to 1, a iloraz to (-1) .

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Postawił on pytanie – ile wynosi suma
wyrazów tego ciągu.

Okazuje się, że można pogrupować wyrazy
ciągu po dwa i wtedy suma będzie równa
0.



Luigi Guido Grandi (1671 - 1742)

Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org,
domena publiczna.

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$$

Można też pogrupować nieco inaczej i wtedy suma będzie równa 1.

$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1 + 0 + 0 + 0 + \dots = 1$$

Stosując jeszcze inne przekształcenia można uzasadnić, że suma ta wynosi $\frac{1}{2}$.

Jak myślisz – dlaczego otrzymujemy tak różne wyniki?

W tym materiale też będziemy obliczać sumy wyrazów ciągów geometrycznych. Jednak będą to tylko sumy skończonej liczby wyrazów. Zatem sposoby obliczania tych sum nie będą nastroczały takich problemów, z jakimi zmagał się Grandi. Sumy dadzą się określić jednoznacznie, co więcej poznamy wzór na ich wyznaczanie.

Twoje cele

- Wyprowadzisz wzór na sumę n kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego.
- Obliczysz sumę n kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego.
- Wyznaczysz wielkości związane z ciągiem geometrycznym o znanej sumie częściowej.

Przeczytaj

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) o ilorazie q . Chcemy znaleźć wzór na sumę S_n kolejnych n początkowych wyrazów tego ciągu.

W tym celu najpierw przypomnimy sobie wzór na wyraz ogólny ciągu geometrycznego.

Twierdzenie: Wzór ogólny ciągu geometrycznego

Wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) o wyrazie pierwszym a_1 i ilorazie q ma postać

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Wyprowadzając wzór na sumę początkowych wyrazów ciągu, rozpatrzmy dwa przypadki.

• 1 przypadek: $q = 1$.

Jeśli iloraz ciągu jest równy 1, to ciąg jest stały. Każdy jego wyraz jest równy wyrazowi pierwszemu. Zatem:

$$S_n = n \cdot a_1$$

• 2 przypadek: $q \neq 1$

Wypiszemy kilka kolejnych sum początkowych wyrazów ciągu, korzystając z przypominanego wyżej wzoru na n -ty wyraz ciągu (inaczej wzór ogólny ciągu geometrycznego).

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_1q$$

$$S_3 = a_1 + a_1q + a_1q^2$$

$$S_4 = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3$$

.....

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}$$

Mnożymy teraz obie strony ostatniej z zapisanych równości przez $(-q)$.

$$-qS_n = -a_1q - a_1q^2 - a_1q^3 - a_1q^4 - \dots - a_1q^{n-1} - a_1q^n$$

Dodajemy stronami dwie ostatnie zapisane równości.

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} + \quad -qS_n = -a_1q - a_1q^2 - a_1q^3 - a_1q^4 - \dots - a_1q^{n-1} - a_1q^n$$

.....

$$S_n(1 - q) = a_1(1 - q^n)$$

Wiemy, że $q \neq 1$, więc można obie strony równości podzielić przez $1 - q$.

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Ujmijmy teraz powyższe rozważania w postaci odpowiedniego twierdzenia.

Twierdzenie: Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q wyraża się wzorem:

- $S_n = n \cdot a_1$, gdy $q = 1$,
- $S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$, gdy $q \neq 1$.

Przykład 1

Obliczymy sumę czterech kolejnych początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) , w którym $a_1 = -9$ i $q = \frac{2}{3}$.

Stosujemy wzór na sumę kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego, gdy $q \neq 1$.

$$S_4 = a_1 \cdot \frac{1 - q^4}{1 - q}$$

$$S_4 = (-9) \cdot \frac{1 - (\frac{2}{3})^4}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$S_4 = (-9) \cdot \frac{1 - \frac{16}{81}}{\frac{1}{3}}$$

$$S_4 = -\frac{65}{3} = -21\frac{2}{3}$$

Jeżeli iloraz ciągu geometrycznego jest większy od 1, to warto korzystać z podanego wzoru na sumę n początkowych wyrazów tego ciągu, w zmodyfikowanej, równoważnej postaci.

Mianowicie, gdy pomnożymy licznik i mianownik ułamka występującego we wzorze przez (-1) , otrzymamy:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Przykład 2

Obliczymy sumę pięciu kolejnych początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) , w którym $a_1 = 4$ i $q = 2$.

Korzystamy ze zmodyfikowanego wzoru na sumę wyrazów ciągu geometrycznego.

$$S_5 = 4 \cdot \frac{2^5 - 1}{2 - 1}$$

$$S_5 = 124.$$

Nie zawsze ciąg geometryczny jest bezpośrednio opisany za pomocą pierwszego wyrazu i ilorazu. W niektórych przypadkach, trzeba te wielkości najpierw określić, aby następnie obliczyć sumę jego początkowych wyrazów.

Przykład 3

Dany jest ciąg geometryczny nieskończony (c_n) taki, że $c_n = \frac{1}{4} \cdot 5^{n-1}$ dla $n \geq 1$. Wyznamy sumę czterech kolejnych początkowych wyrazów tego ciągu.

• 1 sposób:

Wypisujemy cztery początkowe wyrazy ciągu.

$$c_1 = \frac{1}{4}$$

$$c_2 = \frac{1}{4} \cdot 5 = \frac{5}{4}$$

$$c_3 = \frac{1}{4} \cdot 5^2 = \frac{25}{4}$$

$$c_4 = \frac{1}{4} \cdot 5^3 = \frac{125}{4}$$

Dodajemy otrzymane liczby.

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = \frac{1+5+25+125}{4} = \frac{156}{4} = 39$$

• 2 sposób:

Wyznamy pierwszy i drugi wyraz ciągu i określamy iloraz ciągu.

$$c_1 = \frac{1}{4}$$

$$c_2 = \frac{1}{4} \cdot 5 = \frac{5}{4}$$

$$q = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{4}} = 5$$

Korzystamy ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

$$S_4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{5^4 - 1}{5 - 1}$$

$$S_4 = \frac{624}{16} = 39$$

W obu przypadkach otrzymaliśmy te same wyniki. Jeśli do dodania jest mała liczba wyrazów ciągu, można stosować oba sposoby. Natomiast, gdy ich liczba jest duża, znacznie wygodniej posłużyć się wzorem.

Przykład 4

Obliczymy sumę 10 początkowych, kolejnych wyrazów ciągu 1, 3, 9, 27, 81, ...

Tym razem ciąg określony jest za pomocą jego wyrazów.

Ustalamy pierwszy wyraz i iloraz ciągu.

$$a_1 = 1$$

$$q = 3$$

Korzystamy ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

$$S_{10} = 1 \cdot \frac{3^{10}-1}{3-1}$$

$$S_{10} = \frac{59049-1}{2} = 29524.$$

W następnych przykładach pokażemy, jak znając sumę kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego wyznaczyć niektóre z wielkości związanych z danym ciągiem.

Przykład 5

Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 5, a iloraz ciągu 2. Ustalimy, ile początkowych kolejnych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby otrzymać 20475.

Oznaczmy przez n szukaną liczbę wyrazów.

Liczba 20475 to suma n kolejnych wyrazów ciągu, zatem

$$5 \cdot \frac{2^n-1}{2-1} = 20475 \quad | : 5$$

$$2^n - 1 = 4095$$

$$2^n = 4096$$

$$n = 12$$

Odpowiedź:

Należy dodać 12 wyrazów tego ciągu.

Przykład 6

Suma sześciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) jest równa $\frac{63}{80}$. Znajdziemy wzór ogólny tego ciągu, jeżeli iloraz ciągu jest równy $\frac{1}{2}$.

Podstawiamy dane do wzoru na sumę początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

$$a_1 \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^6}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{63}{80}$$

Wykonujemy wskazane działania.

$$a_1 \cdot \frac{\frac{63}{64}}{\frac{1}{2}} = \frac{63}{80}$$

$$a_1 \cdot \frac{126}{64} = \frac{63}{80} \quad | : \frac{126}{64}$$

$$a_1 = \frac{2}{5}$$

Zapisujemy wzór ogólny ciągu.

$$a_n = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Przykład 7

Suma n początkowych wyrazów pewnego ciągu geometrycznego (b_n) wyraża się wzorem $S_n = 3^n - 1$. Obliczymy $b_3 - b_1$.

Pierwszy wyraz ciągu jest równy S_1 . Zatem:

$$b_1 = S_1 = 3 - 1 = 2$$

Zauważmy, że

$$S_3 = b_1 + b_2 + b_3 = S_2 + b_3$$

Wynika z tego, że

$$b_3 = S_3 - S_2$$

$$b_3 = 3^3 - 1 - (3^2 - 1) = 18$$

Wyznaczamy szukaną różnicę.

$$b_3 - b_1 = 18 - 2 = 16$$

Odpowiedź:

Różnica $b_3 - b_1$ jest równa 16.

Słownik

suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q wyraża się wzorem:

- $S_n = n \cdot a_1$, gdy $q = 1$,
- $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$, gdy $q \neq 1$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją. Rozwiąż najpierw samodzielnie podane przykłady, a następnie porównaj z prezentowanymi rozwiązaniami.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DQEhbUcSR>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej sumy n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

Polecenie 2

Znajdź sumę pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) wiedząc, że $a_1 = 64$ i $q = \frac{1}{4}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Suma liczb $8 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{16}$ jest równa:

☐ $15\frac{15}{16}$

☐ 15

☐ 16

☐ $15\frac{1}{16}$

Ćwiczenie 2



Zaznacz poprawną odpowiedź. Suma sześciu kolejnych początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, w którym $a_1 = -3$ i $q = \frac{1}{3}$ jest równa:

☐ $-4\frac{1}{4}$

☐ $-\frac{81}{364}$

☐ $-4\frac{40}{81}$

☐ $-1\frac{121}{243}$

Ćwiczenie 3



W ciągu geometrycznym (a_n) pierwszy wyraz jest równy a_1 , natomiast iloraz jest równy q . Połącz w pary wielkości określające ciąg i sumę S_{11} początkowych kolejnych jedenastu wyrazów ciągu.

$$a_1 = 1, q = 1$$

$$S_{11} = -1$$

$$a_1 = -1, q = -1$$

$$S_{11} = 1$$

$$a_1 = 1, q = -1$$

$$S_{11} = 11$$

$$a_1 = -1, q = 1$$

$$S_{11} = -11$$

Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐

W pewnym ciągu geometrycznym czterowyrazowym suma dwóch pierwszych wyrazów jest równa sumie trzeciego i czwartego wyrazu. Jeśli pierwszy wyraz tego ciągu jest różny od zera, to iloraz tego ciągu może być równy (-1) .

☐

W ciągu geometrycznym pierwszy wyraz jest równy $\frac{1}{21}$, iloraz ciągu jest równy (-2) oraz $S_n = -1$. Zatem n jest liczbą parzystą.

☐

Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 1, iloraz ciągu jest równy 2 i $S_n > 1000$. Wówczas $n > 10$.

☐

W pewnym ciągu geometrycznym siedmiowyrazowym pierwszy wyraz jest równy ostatniemu wyrazowi, który jest równy 2, zatem suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest na pewno równa 14.

Ćwiczenie 6



W ciągu geometrycznym pierwszy wyraz jest równy 4, iloraz $\frac{1}{5}$, a suma n początkowych wyrazów wynosi $4\frac{124}{125}$. Uzupełnij obliczenia liczby n dodanych wyrazów. Przeciągnij odpowiednie liczby naturalne lub ułamki zwykłe nieskracalne.

Korzystając ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego zapisujemy:

$$4 \cdot \left[\left(\boxed{} - \left(\frac{1}{5} \right)^n \right) : \left(1 - \boxed{} \right) \right] = 4\frac{124}{125}$$

Wykonujemy obliczenia w mianowniku ułamka.

$$4 \cdot \left[\left(\boxed{} - \left(\frac{1}{5} \right)^n \right) : \left(\boxed{} \right) \right] = 4\frac{124}{125}$$

Po lewej stronie równania wykonujemy dzielenie.

$$\left[1 - \left(\frac{1}{5} \right)^n \right] \cdot \boxed{} = 4\frac{124}{125}$$

Dzielimy obie strony równania przez 5.

$$1 - \left(\frac{1}{5} \right)^n = \boxed{}$$

Od obu stron równania odejmujemy 1.

$$\left(\frac{1}{5} \right)^n = \boxed{}$$

Wyznaczamy n .

$$n = \boxed{}$$

5

1

$\frac{4}{5}$

$\frac{1}{625}$

4

1

$\frac{1}{5}$

$\frac{624}{625}$

Ćwiczenie 7



Wyznacz sumę wszystkich potęg liczby 4 o wykładnikach całkowitych większych niż -4 , ale mniejszych niż 5.

Ćwiczenie 8



Oblicz, ile wyrazów ma suma $27 + 81 + 243 + \dots + 3^{20}$ kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, klasa II lub III, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi. Zakres podstawowy.

Uczeń:

6) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego;

7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyprowadza wzór na sumę n kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego
- oblicza sumę n kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego
- wyznacza wielkości związane z ciągiem geometrycznym o znanej sumie częściowej

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- 1-2-3

- CPM

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą 1–2–3 powtarzają w grupach 3-osobowych wiadomości na temat ciągu geometrycznego (uczeń nr 1 zadaje pytanie, uczeń nr 2 odpowiada, uczeń nr 3 weryfikuje odpowiedź i tak na przemian, aż do wyczerpania wiadomości – przy czym „weryfikator” może korzystać z dostępnych źródeł wiedzy lub pomocy nauczyciela).
2. Po kilku minutach, ochotnik przedstawia wszystkie uzyskane wiadomości, inni ewentualnie uzupełniają wypowiedź.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, zwracając przy tym uwagę, że umiejętność obliczania sumy wyrazów ciągu geometrycznego przyda się w czasie zajęć ukazujących zastosowanie ciągów w innych dziedzinach wiedzy.
4. Uczniowie wspólnie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w małych grupach techniką CPM. Ich zadaniem jest zaplanowanie poszczególnych etapów wyznaczania sumy ciągu geometrycznego.
2. Powinni przy tym określić przybliżony czas wykonywania każdej z zaplanowanych czynności, ustalić związki przyczynowo skutkowe między czynnościami, wyznaczyć sposób sprawdzenia poprawności uzyskanego wyniku.
3. Kolejnym krokiem jest zapoznanie się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj” oraz w animacji i zmiana, modyfikacja lub uzupełnienie wcześniejszych zapisów.
4. Przedstawiciele grup prezentują wyniki pracy grupy.
5. Finalnym produktem powinien być wspólnie ustalony algorytmiczny model obliczania sumy kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.

2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Ciąg geometryczny](#)

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać jako samouczek przed mini-kartkówką.