



## Prostopadłościan - zadania z kontekstem realistycznym

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Film edukacyjny
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



## Prostopadłościan - zadania z kontekstem realistycznym

Źródło: dostępny w internecie: [Heinz Hummel](#) z [Pixabay](#), domena publiczna.

Prostopadłościan to jedna z brył najczęściej wykorzystywanych w życiu codziennym. Jego kształt ma szafa, pudło dostarczone przez kuriera, a także prawdopodobnie pokój w którym przebywasz. Ile waży szafa, którą właśnie zamówiliśmy? Jakie rozmiary ma kilogramowa sześcienna sztabka złota? Ile waży powietrze w sali lekcyjnej? To tylko niektóre z pytań, na które odpowiedź skrywa ten temat.

### Twoje cele

- Wykorzystasz wiedzę o prostopadłościanach do rozwiązywania zadań z kontekstem realistycznym.
- Przeanalizujesz treść zadania z kontekstem realistycznym i zbudujesz do niego matematyczny model.

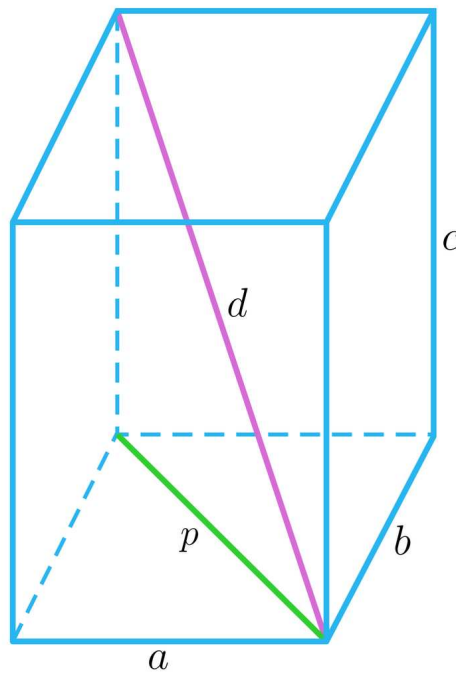
# Przeczytaj

---

Na początku przypomnijmy definicje oraz wzory, które będą przydatne podczas rozwiązywania zadań na tej lekcji.

## Definicja: prostopadłościan

Prostopadłościan to wielościan o trzech parach przeciwległych równoległych ścian, które są prostokątami.



## Własność: własności prostopadłościanu

Prostopadłościan ma sześć ścian, osiem wierzchołków oraz dwanaście krawędzi.

Dla prostopadłościanu o długościach krawędzi podstawy  $a$  i  $b$  oraz wysokości  $c$  prawdziwe są następujące wzory:

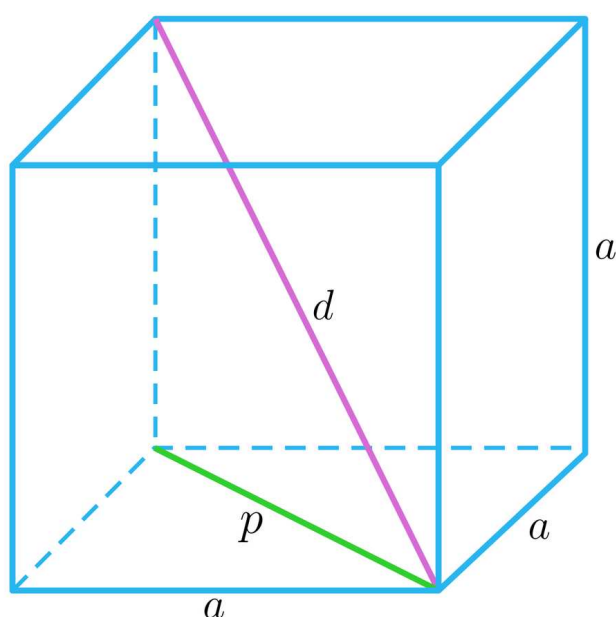
- objętość prostopadłościanu  $V = abc$ ,
- pole powierzchni całkowitej  $P_c = 2(ab + ac + bc)$ ,
- pole powierzchni bocznej  $P_b = 2(ac + bc)$ ,
- długość przekątnej prostopadłościanu  $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ .

Wzór na długość przekątnej prostopadłościanu wyprowadzamy korzystając dwukrotnie z Twierdzenia Pitagorasa:

1. wyznaczając kwadrat długości przekątnej podstawy:  $p^2 = a^2 + b^2$ ,
2. wyznaczając kwadrat długości przekątnej prostopadłościanu:  $d^2 = p^2 + c^2$ , stąd  $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$  i dalej  $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ .

### Definicja: sześcian

Sześcian to prostopadłościan, którego wszystkie ściany są przystającymi kwadratami.



Objętość sześcianu  $V = a^3$ .

Pole powierzchni całkowitej  $P_c = 6a^2$ .

Pole powierzchni bocznej  $P_b = 4a^2$ .

Długość przekątnej sześcianu  $d = a\sqrt{3}$ .

W zadaniach z kontekstem praktycznym mamy często do czynienia z takimi wielkościami jak **gęstość** materiału, **gramatura papieru** czy wydajność urządzenia. Niezawodnym sposobem na wydedukowanie tego, jakim wzorem obliczana jest dana wielkość, jest zwrócenie uwagi na jednostkę, w jakiej jest wyrażana. I tak, jeżeli wydajność wentylatora podana jest w  $\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$  oznacza to, że aby ją wyliczyć, należy podzielić objętość pomieszczenia (w metrach sześciennych) przez czas, w którym zostanie wymienione całe powietrze z tego pomieszczenia (w godzinach).

### Przykład 1

Czy wentylator o wydajności  $300 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$  wymieni w ciągu 10 minut całe powietrze z pomieszczenia o wymiarach  $5 \text{ m} \times 4 \text{ m} \times 3 \text{ m}$ ?

**Rozwiązanie:**

Objętość tego pomieszczenia wynosi  $V = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{ m}^3$ .

Obliczamy, ile powietrza wymienia ten wentylator w ciągu 10 minut, czyli w ciągu  $\frac{1}{6}$  h:

$$300 = \frac{x}{\frac{1}{6}}$$

$$x = 50 \text{ m}^3$$

Wentylator w ciągu 10 minut wymieni  $50 \text{ m}^3$  powietrza.

Odp. Danemu wentylatorowi nie wystarczy 10 minut na wymianę całego powietrza w tym pomieszczeniu.

**Przykład 2**

Jakie wymiary ma jednokilogramowa sześcienna sztabka czystego złota? Wykonaj obliczenia wiedząc, że gęstość złota wynosi  $19300 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ .

**Rozwiązanie:**

Z gęstości złota dowiadujemy się, że  $1 \text{ m}^3$  tego kruszcu waży ponad 19 ton. Chcąc obliczyć wymiary jednokilogramowej sztabki, zamieniamy jednostkę na kilogram na centymetr sześcienny.

$$\rho = 19300 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 19,3 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 0,0193 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$$

Z definicji gęstości wynika, że:  $V = \frac{m}{\rho}$ .

Obliczamy objętość jednokilogramowej sztabki złota.

$$V = \frac{1}{0,0193} \approx 52 \text{ cm}^3$$

Objętość **sześcianu** o krawędzi  $a$  wyraża się wzorem  $a^3$ , zatem:

$$a^3 = 52$$

$$a \approx 3,7$$

Odp. Jednokilogramowa sześcienna sztabka czystego złota ma krawędź długości ok. 3,7 cm.

**Przykład 3**

Ile waży puste prostopadłościenne pudło o wymiarach  $65 \text{ cm} \times 25 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$  zbudowane z papieru o gramaturze  $300 \frac{\text{g}}{\text{m}^2}$ ?

**Rozwiązanie:**

Zauważmy, że w definicji gramatury papieru nie ma znaczenia jego grubość, a jedynie pole powierzchni arkusza (jest wyrażana w gramach na metr kwadratowy). W związku z tym, aby obliczyć masę papieru potrzebnego do zbudowania pudła, potrzebujemy pola powierzchni całkowitej prostopadłościanu.

$$P_c = 2(0,65 \cdot 0,25 + 0,65 \cdot 0,3 + 0,25 \cdot 0,3) = 0,865 \text{ m}^2$$

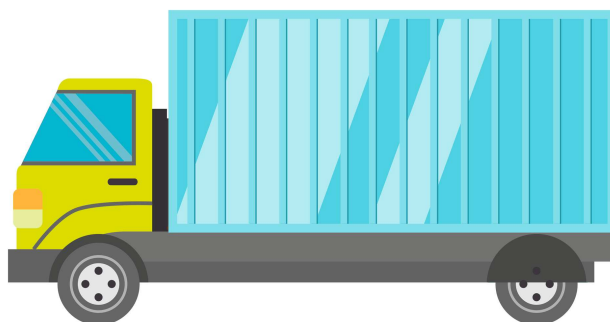
Masę wyrażoną w gramach obliczamy następująco:

$$m = 0,865 \cdot 300 = 259,5 \text{ g}$$

Odp. Pudło waży 259,5 g.

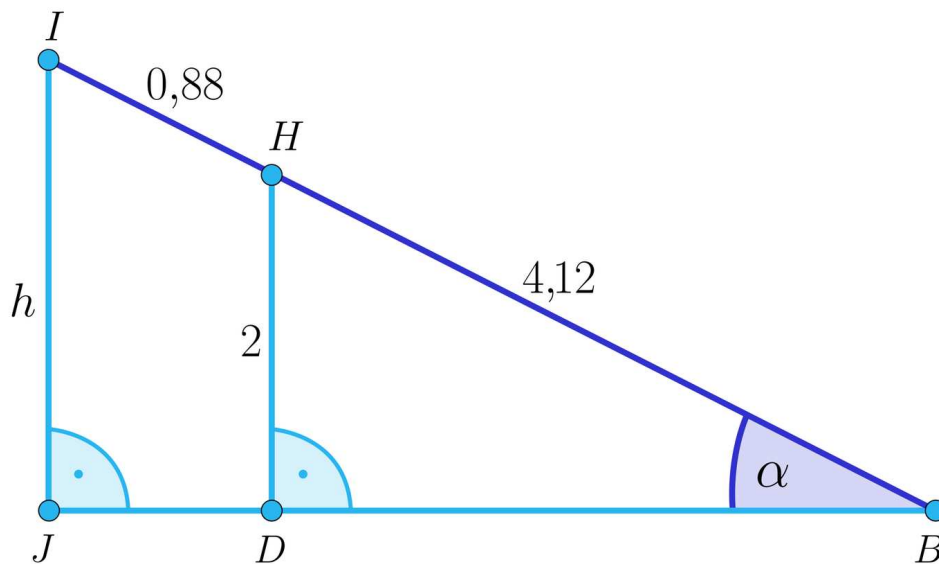
**Przykład 4**

Pan Adam dysponuje samochodem dostawczym o przestrzeni bagażowej będącej prostopadłościanem o wewnętrznych wymiarach (długość  $\times$  szerokość  $\times$  wysokość)  $3 \text{ m} \times 2 \text{ m} \times 2 \text{ m}$ , spód bagażnika jest zawieszony  $50 \text{ cm}$  nad ziemią. Pan Adam chce przewieźć tym autem pręt o długości  $5 \text{ m}$ , mocując go po przekątnej całej przestrzeni, jednak pręt wystaje. Okazuje się, że trasa przejazdu przebiega pod wiaduktem o wysokości  $3 \text{ m}$ . Czy panu Adamowi uda się w ten sposób przetransportować załadunek? Grubość pręta uważamy za pomijalną.



**Rozwiązanie:**





Trójkąty  $IJB$  oraz  $HDB$  są podobne z cechy kąt, kąt, kąt, ponieważ oba są prostokątne i mają wspólny kąt o mierze  $\alpha$  (zatem  $|\sphericalangle JIB| = |\sphericalangle DHB| = 90^\circ - \alpha$ ). Z tego faktu wynika, że:

$$\frac{|BH|}{|BI|} = \frac{|HD|}{|IJ|}$$

$$\frac{4,12}{5} = \frac{2}{h}$$

$$h \approx 2,427$$

$$h < 2,43$$

Spód bagażnika jest umieszczony 0,5 m nad ziemią, zatem górny koniec pręta znajduje się niżej niż 2,93 m.

Odp. Pan Adam może przetransportować pręt w zaplanowany sposób.

## Słownik

### prostopadłościan

to wielościan o trzech parach przeciwległych równoległych ścian, które są prostokątami

### sześcian

to prostopadłościan, którego wszystkie ściany są przystającymi kwadratami

### gęstość

stosunek masy pewnej ilości substancji do zajmowanej przez nią objętości:  $\rho = \frac{m}{V}$

## gramatura papieru

masa wyrobu papierniczego wyrażona w gramach podana na metr kwadratowy

# Film edukacyjny

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem edukacyjnym, a następnie rozwiąż poniższe zadania.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D6VWoeW9f>

Film nawiązujący do treści materiału. Prostopadłościan myślnik zadania z kontekstem realistycznym.

---

## Polecenie 2

Podłoga w kuchni jest prostokątem o wymiarach  $2,5 \text{ m} \times 4 \text{ m}$ , a wysokość pomieszczenia wynosi  $2,6 \text{ m}$ . Ile minut potrzebuje wyciąg o wydajności  $40 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$ , aby wymienić całe powietrze w tym pomieszczeniu?

## Polecenie 3

Janek zamówił do swojego pokoju szafę w kształcie prostopadłościanu o głębokości  $60 \text{ cm}$ , szerokości  $80 \text{ cm}$  i wysokości  $120 \text{ cm}$ . Do zbudowania korpusu (korpus to pięć z sześciu ścian, nie licząc drzwi frontowych) tej szafy użyto płyty wiórowej o grubości  $2 \text{ cm}$  i gęstości  $650 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ . Oblicz wagę paczki, w której zostanie przywieziony korpus tej szafy. Wynik w kilogramach zaokrąglaj do całości.

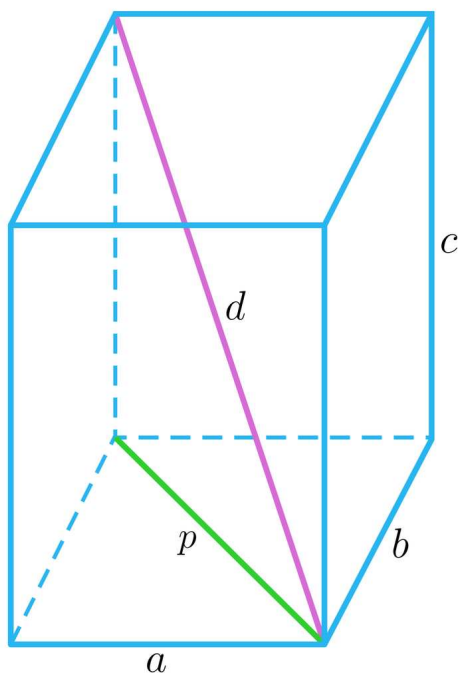
# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



Zapoznaj się z rysunkiem prostopadłościanu i rozwiąż poniższe zadanie.



Dopasuj w pary wielkość związaną z prostopadłościanem, której użyjesz rozwiązując zadanie do podanego kontekstu praktycznego.

Najdłuższy kij włożony do pudła

Objętość  $V = abc$

Ilość powietrza w pomieszczeniu

Długość przekątnej graniastostupa  
 $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Ilość papieru ozdobnego potrzebnego do opakowania pudełka z prezentem

Pole powierzchni całkowitej  
 $P = 2(ab + ac + bc)$

Ilość farby potrzebnej do pomalowania ścian w pokoju

Długość przekątnej podstawy graniastostupa  
 $p = \sqrt{a^2 + b^2}$

Najdłuższy pręt leżący na podłodze

Pole powierzchni bocznej  
 $P = 2(ac + bc)$

## Ćwiczenie 2



Janek planuje zbudować prostokątny karmnik dla ptaków o wymiarach  $30\text{ cm} \times 25\text{ cm} \times 20\text{ cm}$ . Zaczyna od zbudowania stelaża z listewek - wszystkich dwunastu krawędzi bryły, które w następnej kolejności od góry i od dołu obje deskami. Ile metrów bieżących listewki potrzebuje Janek do tej konstrukcji? Zaznacz poprawną odpowiedź.

0,75 mb

1,5 mb

3 mb

2 mb

## Ćwiczenie 3



Ile w przybliżeniu waży powietrze znajdujące się w sali lekcyjnej o wymiarach  $8\text{ m} \times 14\text{ m} \times 4\text{ m}$ ? Przyjmijmy, że powietrze w sali ma gęstość około  $1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ . Zaznacz poprawną odpowiedź.

268,8 kg

240 kg

537,6 kg

480 kg

#### Ćwiczenie 4



Ania planuje pomalować ściany w swoim pokoju w kształcie prostopadłościanu. Podłoga ma wymiary  $4\text{ m} \times 5\text{ m}$ , wysokość pokoju to  $3\text{ m}$ . Wydajność farby wynosi  $15 \frac{\text{m}^2}{\text{l}}$ . Ile litrów farby potrzebuje Ania? Zaznacz poprawną odpowiedź.

1,8 l

3,1 l

3,5 l

6,3 l

3,6 l

#### Ćwiczenie 5



Jakiej długości pręt zmieści się do sześciennego pudełka o polu powierzchni całkowitej równej  $54\text{ m}^2$ ? Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi.

5,24 m

3 m

5,13 m

5,2 m

4,78 m

3,54 m

#### Ćwiczenie 6



Chcemy zapakować ołówek długości  $30\text{ cm}$  do możliwie najmniejszego prostopadłościennego pudełka, którego wysokość to  $10\text{ cm}$ , a głębokość to  $4\text{ cm}$ . Ile wynosi długość tego pudełka?

## Ćwiczenie 7

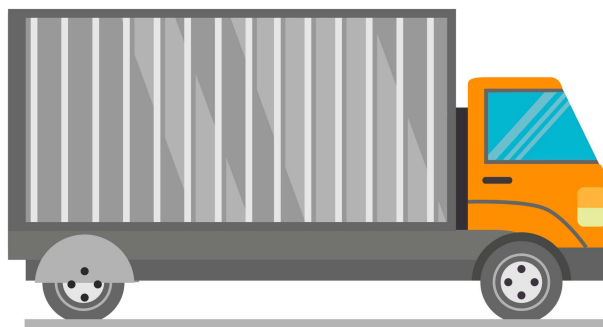


Największa na świecie wytopiona sztaba złota ma po uśrednieniu do prostopadłościanu wymiary ok.  $20 \text{ cm} \times 40,5 \text{ cm} \times 16 \text{ cm}$ . Pamiętając, że gęstość złota wynosi  $19300 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ , oblicz wagę tej sztaby. Wynik zaokrąglij do pełnych kilogramów.

## Ćwiczenie 8



Pan Adam dysponuje samochodem dostawczym o przestrzeni bagażowej będącej prostopadłościanem o wewnętrznych wymiarach (długość  $\times$  szerokość  $\times$  wysokość)  $3 \text{ m} \times 2 \text{ m} \times 2 \text{ m}$ . Chce przewieźć nim pręt o długości  $5 \text{ m}$ , mocując go po przekątnej całej przestrzeni, jednak pręt wystaje. Zgodnie z przepisami ruchu drogowego, szerokość pojazdu wraz z prętem nie może przekroczyć  $2,55 \text{ m}$ . Grubość ściany auta wynosi  $10 \text{ cm}$ , a bagażnik jest najszerszą częścią pojazdu. Czy panu Adamowi uda się w ten sposób przetransportować załadunek?



# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Bartłomiej Cymbalista

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat: Prostopadłościan - zadania z kontekstem realistycznym**

**Grupa docelowa:** III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum

**Podstawa programowa:**

Cele nauczania - wymagania ogólne:

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.

Cele nauczania - wymagania szczegółowe:

X. Stereometria. Zakres podstawowy.

Uczeń:

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- wykorzystuje wiedzę o prostopadłościanach do rozwiązywania zadań z kontekstem realistycznym,
- analizuje treść zadania z kontekstem realistycznym i buduje do niego matematyczny model.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm,
- konektywizm.

### **Metody i techniki nauczania:**

- odwrócona klasa,
- rozmowa nauczająca,
- dyskusja.

### **Formy pracy:**

- praca indywidualna,
- praca w parach,
- praca w grupach,
- praca całego zespołu klasowego.

### **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu,
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale,
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

### **Przebieg lekcji**

#### **Przed lekcją:**

1. Uczniowie przed lekcją przypominają sobie wiadomości o prostopadłościanie, definicję oraz wzór na objętość, pole powierzchni całkowitej i długość przekątnej prostopadłościanu. Zapoznają się z sekcją „Przeczytaj”.

#### **Faza wstępna:**

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat - „Prostopadłościan - zadania z kontekstem realistycznym”, wskazuje cele zajęć.
2. Nauczyciel prosi uczniów o podanie przykładów problemów realistycznych, w rozwiązaniu których przydatne są wiadomości o objętości, polu powierzchni, długości odcinków w prostopadłościanie.
3. Uczniowie rozwiązują indywidualnie ćwiczenie 1 z sekcji „Sprawdź się”, nauczyciel pyta poszczególnych uczniów o poprawne odpowiedzi, a pozostali uczniowie je weryfikują.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie oglądają film edukacyjny. Indywidualnie rozwiązują polecenia 2-3 znajdujące się pod filmem, następnie zostają podzieleni na 4-osobowe grupy. W obrębie grupy

sprawdzają wzajemnie rozwiązania i dyskutują nad wyborem ich zdaniem poprawnego sposobu. Jeden z uczniów przedstawia poprawne rozwiązania na tablicy.

2. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 2-5, a następnie przedstawiają rozwiązania na tablicy, argumentując wybór poprawnych odpowiedzi.
3. Uczniowie, korzystając z wiedzy uzyskanej z sekcji „Przeczytaj”, rozwiązują w parach ćwiczenia 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel omawia najlepsze rozwiązania na tablicy.

#### **Faza podsumowująca:**

1. Nauczyciel omawia ewentualne problemy z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o podanie zastosowań wielkości związanych z prostopadłościanami w sytuacjach praktycznych.

#### **Praca domowa:**

1. Uczniowie wykonują ćwiczenie nr 6 z sekcji „Sprawdź się”.

#### **Materiały pomocnicze:**

[Prostopadłościan](#)

[Zadania tekstowe - prostopadłościan](#)

#### **Wskazówki metodyczne:**

Materiał można wykorzystać w lekcjach o objętości lub polu powierzchni równoległoboku. Nauczyciel może wykorzystać film edukacyjny do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania znajdujące się pod filmem.