



Szeregi zbieżne i ich sumy

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Źródło: Ben Harritt, dostępny w internecie: unsplash.com, domena publiczna.

Na tej lekcji poznamy szeregi, które są zbieżne i są szczególnie użyteczne do badania zbieżności powiązanych z nimi innych szeregów. Do tego będzie służyć twierdzenie o nazwie kryterium porównawcze zbieżności szeregów. Poznamy sposoby rozponawania, czy szereg może być zbieżny, czy też na pewno jest rozbieżny.

Twoje cele

- Poznasz kilka ważnych szeregów zbieżnych.
- Nauczysz się badać zbieżność szeregów za pomocą innych szeregów.

Przeczytaj

Na tej lekcji zapoznamy się z typowymi metodami sprawdzania, czy szereg jest zbieżny oraz sprawdzania, jaka jest suma szeregu zbieżnego.

Zacniemy od następującego przykładu.

Przykład 1

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest **zbieżny** i jego sumą jest liczba s . Uzasadnimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (k \cdot a_n)$ jest także zbieżny, a jego suma jest równa $k \cdot s$.

Rozwiązanie

Ciąg sum częściowych szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest następującej postaci:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n.$$

Ciąg sum częściowych szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (k \cdot a_n)$ jest następującej postaci:

$$\begin{aligned} t_n &= k \cdot a_1 + k \cdot a_2 + k \cdot a_3 + \dots + k \cdot a_n = \\ &= k(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) = k \cdot s_n. \end{aligned}$$

Ponieważ ciąg (s_n) jest zbieżny do s , zatem ciąg $(t_n) = (k \cdot s_n)$ jest zbieżny do $k \cdot s$.

Zatem udowodniliśmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (k \cdot a_n)$ jest także zbieżny, a jego suma jest równa $k \cdot s$.

Sformułujmy zatem twierdzenie:

Twierdzenie: O mnożeniu szeregu zbieżnego przez liczbę.

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny i jego sumą jest liczba s , to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (k \cdot a_n)$ jest także zbieżny, a jego suma jest równa $k \cdot s$.

Sformułujemy teraz twierdzenie, które pozwala stwierdzić, że szereg nie jest zbieżny.

Twierdzenie: Warunek konieczny zbieżności szeregu

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Dowód

Pamiętamy z poprzedniej lekcji, że dla liczb naturalnych $n > 1$ zachodzi równość: $a_n = s_n - s_{n-1}$, gdzie (s_n) jest ciągiem sum częściowych.

Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1},$$

$$\text{zatem } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = 0.$$

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, czyli z faktu, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ nie musi wynikać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Poniżej podamy przykład ilustrujący ten problem.

Przykład 2

Sprawdźmy, czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ spełnia warunek konieczny zbieżności szeregu.

Rozwiązanie

Obliczymy granicę

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = 0. \end{aligned}$$

Zatem ciąg $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ jest zbieżny do zera.

Ciąg sum częściowych

$$s_n = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n+1} - 1$$

jest jednak rozbieżny do $+\infty$, a zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ jest rozbieżny, mimo, że warunek konieczny zbieżności szeregu był spełniony.

Zapoznamy się teraz z twierdzeniem, które umożliwia stwierdzenie zbieżności szeregu, który można porównać z szeregiem, którego zbieżność jest znana.

Twierdzenie: Kryterium porównawcze

Zakładamy, że nierówność $0 \leq a_n \leq b_n$ zachodzi dla prawie wszystkich dodatnich liczb naturalnych n .

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ jest zbieżny, to również szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny.

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest rozbieżny, to również szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ jest rozbieżny.

Przykład 3

Zbadamy teraz zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Rozwiązanie

Wykażemy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny i że jego suma jest nie większa niż 2.

Zauważmy, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ zachodzi nierówność:

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} &< \\ < 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2 \end{aligned}$$

Stąd wynika, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) \leq 2$.

Ale tę zbieżność możemy też uzasadnić korzystając z kryterium porównawczego.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ możemy zapisać następująco:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Zauważmy, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n zachodzi nierówność:

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{(n+1)n}.$$

Wiemy także, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n}$ jest zbieżny do 1.

Korzystając z kryterium porównawczego otrzymujemy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny i jego suma jest mniejsza niż $1 + 1 = 2$.

Ważne!

W powyższym przykładzie pokazaliśmy tylko, że sumą szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest liczba mniejsza niż 2. Pytanie o dokładną sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ zostało sformułowane w 1644 roku przez włoskiego matematyka Piotra Mengolego. Sumę wraz z dowodem podał dopiero w 1735 roku Leonard Euler:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Przykład 4

Zbadamy zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!+3}{(n+2)!+1}$.

Rozwiązanie

Skorzystamy z kryterium porównawczego.

Uzasadnimy, że dla dowolnej dodatniej liczby naturalnej n zachodzi nierówność:

$$\frac{n!+3}{(n+2)!+1} < \frac{4}{(n+1)(n+2)}.$$

Przekształcamy kolejno nierówność:

$$(n! + 3)(n + 1)(n + 2) < 4(n + 2)! + 4$$

$$(n + 2)! + 3(n + 1)(n + 2) < 4(n + 2)! + 4$$

$$3(n + 1)(n + 2) < 3(n + 2)! + 4$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa dla dowolnej liczby naturalnej n . Wszystkie przejścia były równoważne, zatem nierówność $\frac{n!+3}{(n+2)!+1} < \frac{4}{(n+1)(n+2)}$ jest prawdziwa dla dowolnej liczby naturalnej n .

Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(n+1)(n+2)}$ jest zbieżny, zatem na podstawie kryterium porównawczego zbieżny jest także szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!+3}{(n+2)!+1}$.

Najtrudniejsze w ostatnim przykładzie było wskazanie szeregu zbieżnego, z którym można porównać analizowany szereg. Jak to zrobić?

Zauważmy, że dla bardzo dużych liczb naturalnych wyrażenie $\frac{n!+3}{(n+2)!+1}$ ma wartość niemal taką samą jak $\frac{n!}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Zatem trzeba poszukać dobrej liczby k , aby zachodziła nierówność $\frac{n!+3}{(n+2)!+1} < \frac{k}{(n+1)(n+2)}$.

Słownik

szereg liczbowy

szeregiem liczbowym o wyrazach $a_1, a_2, a_3, \dots$ nazywamy ciąg, którego kolejnymi wyrazami są sumy początkowych wyrazów ciągu (a_n) :

$$s_1 = a_1,$$

$$s_2 = a_1 + a_2,$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

...

jeżeli ciąg sum częściowych szeregu ma granicę, to nazywamy ją sumą szeregu; jeżeli suma szeregu jest skończona, to szereg nazywamy zbieżnym, jeżeli suma szeregu jest nieskończona lub jeżeli ciąg sum częściowych szeregu nie ma granicy, to szereg nazywamy rozbieżnym

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z infografiką, a następnie wykonaj polecenie 2.

Polecenie 2

Uzasadnij, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n}{n^4-n^2+1}$ jest zbieżny.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Podaj sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$.

☐ $\frac{\pi}{6}$

☐ $\frac{\pi}{3}$

☐ $\frac{\pi^2}{6}$

☐ $\frac{\pi^2}{3}$

Ćwiczenie 2



Podaj sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^2}$.

☐ $\frac{\pi^2}{12}$

☐ $\frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}$

☐ $\frac{\pi^2}{24}$

☐ $\frac{\pi^2}{6} - 1$

Ćwiczenie 3



Uporządkuj szeregi od największej do najmniejszej sumy.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$



$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$



$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$



$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$



Ćwiczenie 4



Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$ jest zbieżny, gdyż możemy skorzystać z kryterium porównawczego i porównać go z szeregiem , gdyż dla każdej dodatniej liczby naturalnej n zachodzi nierówność .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$$

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$$

$$\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} > \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{2}{n} > \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$$

Ćwiczenie 5



Wiedząc, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = e$ (liczba e to liczba Eulera) połącz w pary szereg i jego sumę.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n-1)!}$$

$$e - \frac{5}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!}$$

$$2e$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)!}$$

$$e - 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$2(e - 2)$$

Ćwiczenie 6



Sprawdź, które szeregi nie spełniają warunku koniecznego zbieżności.

☐ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{10}}{n^2}$

☐ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + 1} \right)$

☐ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 100}{100n^3 + 123456}$

☐ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2 + 4} - n \right)$

Ćwiczenie 7



Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n)}{n^4}$.

Ćwiczenie 8



Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{n^4 + 3}$.

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Szeregi zbieżne i ich sumy

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

2) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykorzystuje warunek konieczny zbieżności szeregu oraz kryterium porównawcze do badania zbieżności szeregów,
- bada zbieżność szeregów za pomocą innych szeregów.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda kota i myszy;

- metoda tekstu przewodniego.

Formy pracy:

- praca w parach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Przybliżenie przez nauczyciela tematu: „Szeregi zbieżne i ich sumy” i celów lekcji.
Określenie wiążących dla uczniów kryteriów sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w parach zapoznają się z treścią sekcji „Przeczytaj”, a następnie metodą kot i mysz rozwiązują ćwiczenia interaktywne w sekcji „Sprawdź się”. Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po dwóch nieudanych próbach kot „łapie mysz”, która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej – role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem – procedura się powtarza.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.
3. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

1. Uczniowie zapoznają się z medium w sekcji „Infografika” i rozwiązują polecenia z nim związane.

Materiały pomocnicze:

- [Suma wyrazów ciągu geometrycznego](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Infografika” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Szeregi zbieżne i ich sumy”.