



Konstrukcje fraktalne

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Audiobook](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Konstrukcje fraktalne

Źródło: Nick Cooper, domena publiczna.

Poznaliśmy już najładniejsze fraktale i zaobserwowaliśmy ich występowanie w przyrodzie. Nauczyliśmy się też tworzenia fraktali – wiemy, jak wyrazić je w formie tekstu lub linii ciągłej. Jednak konstrukcje fraktalne mogą być znacznie bardziej skomplikowane i to właśnie im poświęcimy ten e-materiał.

Implementacje omawianego zagadnienia w poszczególnych językach programowania znajdziesz w e-materiałach:

- [Konstrukcje fraktalne w języku C++](#),
- [Konstrukcje fraktalne w języku Java](#),
- [Konstrukcje fraktalne w języku Python](#).

Więcej zadań? Sięgnij do [Konstrukcje fraktalne – zadania maturalne](#).

Twoje cele

- Stworzysz algorytm służący do generowania pięknych struktur fraktalnych.
- Wymienisz autorów skomplikowanych konstrukcji samopodobnych.
- Wykorzystasz metodę Monte Carlo w celu wyznaczenia punktów należących do fraktali.

Przeczytaj

Choć niektóre fraktale wydają się bardzo skomplikowane, ich konstrukcję można opisać w dość prosty sposób dzięki funkcjom [IFS](#). Przyjrzyjmy się bliżej dwóm przykładom takich fraktali.

Smok Heighwaya

Z historią tego fraktala związanych jest wiele nazwisk. Pracowali nad nim naukowcy z NASA: John Heighway, Bruce Banks i William Harter, a opisany i spopularyzowany został przez Martina Gardniera w roku 1967. Był także przedmiotem badań Chandlera Davisa oraz Donalda Knutha (znanego z algorytmu Knutha-Morrisa-Pratta), którzy odkryli wiele jego cech.

Generowanie tego fraktala opiera się na wykorzystaniu dwóch par funkcji, zgodnie z którymi obliczamy współrzędne kolejnych punktów. Te pary funkcji to:

$$\begin{aligned}f_1(x) &= 0,5x - 0,5y \\f_1(y) &= 0,5x + 0,5y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_2(x) &= -0,5x - 0,5y + 1 \\f_2(y) &= 0,5x - 0,5y\end{aligned}$$

Funkcji tych należy użyć w sposób losowy w równych proporcjach. Jest to metoda [Monte Carlo](#), polegająca na losowaniu dostatecznej liczby danych w taki sposób, że po ich zestawieniu otrzymujemy pewne przybliżenie modelowanego zjawiska. Punktem startowym jest punkt (0, 0).

Każdy wygenerowany w ten sposób punkt rysujemy w układzie współrzędnych – kształt, który otrzymamy, jest nazywany smokiem Heighwaya. Im więcej punktów wygenerujemy, tym dokładniejszy będzie uzyskany kształt.

Wszystkie przedstawione kroki możemy zapisać za pomocą następującego pseudokodu:

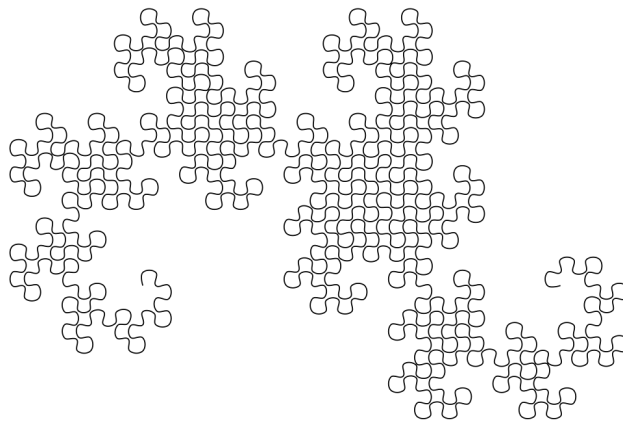
```
1 // punkt startowy
2 x = 0,0
3 y = 0,0
4
5 // liczba generowanych punktów
```

```

6 n = 10000
7
8 dla i = 0, 1, 2 ... n - 1 wykonuj:
9     // kopia zmiennej x
10    x0 = x
11
12    g = losuj liczbę z [0, 1]
13
14    jeżeli g == 0 wykonaj:
15        x = 0,5 * x - 0,5 * y
16        y = 0,5 * x0 + 0,5 * y
17    w przeciwnym razie wykonaj:
18        x = - 0,5 * x - 0,5 * y + 1
19        y = 0,5 * x0 - 0,5 * y
20
21    rysuj punkt (x, y)

```

Zwróćmy uwagę na fakt, że potrzebna jest nam kopia zmiennych x , aby podczas generowania zmiennej y (w linii 19.) nie użyć nowej wartości nadanej zmiennej x .



Smok Heighwaya

Źródło: William Sikkema, licencja: CC BY-SA 4.0.

Paproć Barnsleya

Odkrywcą tego fraktala jest Michael Barnsley, który opisał go w książce *Fractals Everywhere*. Publikacja ta stanowi obszerne kompendium wiedzy na temat fraktali,

szczególnie jednak traktuje o generowaniu fraktali z wykorzystaniem funkcji IFS. Autor przedstawił w niej też smoka Heighwaya.

Stworzona przez Barnsleya definicja paproci opiera się na czterech przekształceniach afinicznych. Ponieważ jednak posługiwał się on skomplikowaną terminologią matematyczną (związaną z rachunkiem macierzy, funkcjami wielu zmiennych, liczbami zespolonymi oraz krzywymi hiperbolicznymi), przedstawiony przez nas sposób generowania paproci Barnsleya nie jest oryginalnym zapisem stosowanym przez autora.

Podobnie jak miało to miejsce w przypadku smoka Heighwaya, generowanie tego fraktala opiera się na wykorzystaniu pewnej liczby par funkcji, które należy stosować losowo w określonych proporcjach. W tym wypadku mamy cztery pary funkcji:

$$\begin{aligned}f_1(x) &= 0,85x + 0,04y \\f_1(y) &= -0,04x + 0,85y + 1,6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_2(x) &= -0,15x + 0,28y \\f_2(y) &= 0,26x + 0,24y + 0,44\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_3(x) &= 0,20x - 0,26y \\f_3(y) &= 0,23x + 0,22y + 1,6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_4(x) &= 0 \\f_4(y) &= 0,16y\end{aligned}$$

Funkcji tych należy użyć losowo według następujących proporcji:

$$85 : 7 : 7 : 1$$

Punktem startowym jest punkt (0, 0).

Pseudokod, którym posłużymy się podczas pisania programu generującego paproć Barnsleya, może wyglądać następująco:

```
1 // punkt startowy
2 x = 0.0
3 y = 0.0
4
```

```

5 // liczba generowanych punktów
6 n = 10000
7
8 dla i = 0, 1, 2 ... n-1 wykonuj:
9     // kopia zmiennej x
10    x0 = x
11
12    g = losuj liczbę z [0, 1, ..., 99]
13
14    jeżeli q < 1 wykonaj:
15        x = 0;
16        y = 0.16 * y;
17    w przeciwnym razie jeżeli q < 86 wykonaj:
18        x = 0.85 * x + 0.04 * y;
19        y = -0.04 * x0 + 0.85 * y + 1.6;
20    w przeciwnym razie jeżeli q < 93 wykonaj:
21        x = 0.2 * x - 0.26 * y;
22        y = 0.23 * x0 + 0.22 * y + 1.6;
23    w przeciwnym razie wykonaj:
24        x = -0.15 * x + 0.28 * y;
25        y = 0.26 * x + 0.24 * y + 0.44;
26
27    rysuj punkt (x, y)

```

W wyniku tworzenia paproci Barnsleya według pseudokodu możemy uzyskać na przykład taki kształt:



Słownik

IFS

(z ang. *iterated function system* – system funkcji iterowanych) funkcje, które pozwalają generować konstrukcje samopodobne

metoda Monte Carlo

metoda modelowania zjawisk fizycznych lub matematycznych za pomocą losowania danych w określony sposób tak, aby ich zestawienie produkowało przybliżenie oczekiwanego rezultatu

Audiobook

Polecenie 1

Zapoznaj się z audiobookiem i wykonaj ćwiczenie.

Stefan Banach

Audiobook można wysłuchać pod adresem: <https://zpe.gov.pl/b/POhPPFmYa>

Jak wiemy, informatyka jest odpowiedzią na odkrycia matematyki. Wiele wzorów oraz metod matematycznych powstało przed odkryciem ich praktycznego zastosowania. Wciąż istnieją całe działy matematyki, których zastosowania jeszcze nie znamy. Takim przykładem są między innymi metody, których zastosowanie odkrywane jest w technologii kwantowej.

Podobnie było z pewnym twierdzeniem, które wpłynęło na oblicze technologii cyfrowej.

Jego autorem jest Stefan Banach – jeden z najwybitniejszych polskich matematyków. Urodził się w 1892 roku w Krakowie. Matematyką interesował się od dziecka, a z powodu trudnej sytuacji finansowej udzielał korepetycji jeszcze jako uczeń gimnazjum. O jego bystrości może świadczyć choćby pytanie, jakie zadał wówczas katechecie na lekcji religii: „Czy Pan Bóg wszechmogący, mógłby stworzyć taki kamień, którego sam nie mógłby unieść?”.

Matematykę Banach studiował jako samouk. Był jednak przekonany, że nie ma w niej już nic nowego do odkrycia, dlatego po maturze rozpoczął studia na Wydziale Inżynierii Lądowej na Politechnice Lwowskiej. Dwa lata później przerwał je wybuch I wojny światowej. Banach powrócił do Krakowa, nie zaprzestając samorozwoju w dziedzinie matematyki.

W 1916 roku nieoczekiwanym zbiegiem okoliczności doszło do niezwykłego spotkania. Matematyk i doktor filozofii Hugo Steinhaus podczas przechadzki po krakowskich Plantach usłyszał przypadkiem rozmowę dwóch młodych ludzi, w której padły świeże wówczas w dziedzinie matematyki słowa – całka Lebesgue'a. Byli to Stefan Banach i Otton Nikodym, którzy siedząc na ławce w parku prowadzili pasjonującą dyskusję. Spotkanie matematyków przyniosło niemal natychmiastowe efekty naukowe, Banach

rozwiązał bowiem problemy, nad którymi głowił się Hugo Steinhaus. Tak powstała ich pierwsza wspólna publikacja oraz rozpoczęła się kariera naukowa Stefana Banacha.

Dzięki wstawiennictwu Steinhaus w 1920 roku Banach otrzymał stanowisko w Katedrze Matematyki na Politechnice Lwowskiej. Pomimo braku dyplomu ukończenia studiów został przyjęty na studia doktoranckie na Uniwersytecie Jana Kazimierza we Lwowie. Również pracę doktorską obronił w nietypowy sposób. Banach nie kwapił się bowiem do opisanie swoich teorii, twierdząc, że do czasu obrony doktoratu może wymyślić coś lepszego. Któryś ze współpracowników spisał więc dokładnie jego osiągnięcia matematyczne, co miało stanowić pracę doktorską Banacha. Przepisy wymagały jednak egzaminu, który też odbył się podstępem. Otóż pewnego dnia poproszono Banacha do dziekanatu, by pomógł pewnym panom w rozwiązaniu problemów matematycznych. W ten sposób młody naukowiec odpowiedział na wszystkie zadane mu pytania, nieświadomy, że właśnie zdaje egzamin doktorski przed komisją. Dwa lata później, w 1922 roku, został profesorem.

Banach jest autorem twierdzenia o punkcie stałym, które stanowi podstawę konstrukcji fraktalnych. Bez tego twierdzenia nie powstałyby konstrukcje takie jak paproć Barnsleya czy smok Heighwaya, a Waław Sierpiński najprawdopodobniej nie zostałby ujęty w słynnej nazwie „trójkąt Sierpińskiego”, gdyż nie podałby definicji tego znanego już wiele lat wcześniej fraktala. Pewnym żartobliwym zastosowaniem twierdzenia Banacha jest obserwacja, „gdy położymy mapę Polski na ziemi gdzieś w Polsce, to dokładnie jeden punkt na mapie pokrywa się z odpowiadającym mu punktem na ziemi”. Zastosowań jest wiele i ciągle odkrywane są nowe. Banach jednak na pewno nie spodziewał się, że twierdzeniem tym da początek wielu działom informatyki, gdyż ta wówczas nie istniała.

Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Ważne!

Ważną inicjatywą związaną z postacią Banacha była tzw. lwowska szkoła matematyczna. Poza Stanisławem Banachem oraz Hugo Steinhaus w jej czołowych przedstawicielami byli także Stanisław Mazur – twórca podwalin ogólnej teorii przestrzeni liniowo – topologicznych oraz Stanisław Ulam – współtwórca amerykańskiej bomby termojądrowej, a także metody Monte Carlo. Członkowie lwowskiej szkoły matematycznej często spotykali się w położonej w centrum miasta Kawiarni Szkockiej, gdzie często rozwiązywali problemy matematyczne, pisząc ołówkiem po blatach stołów. W 1935 roku żona Banacha kupiła duży zeszyt w twardej oprawie, aby matematycy mogli w nim umieszczać problemy wymagające rozwiązania. Tak powstała Księga Szkocka. Wraz z opisem problemów, często pojawiały się również oferty nagród za ich rozwiązanie.

Łącznie w księdze zapisano 193 problemy, spośród których wiele nie posiada rozwiązania do dzisiaj.

Polecenie 2

Poszukaj informacji na temat innych Polek i Polaków ważnych dla rozwoju matematyki oraz informatyki.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Wskaż, w jakich proporcjach należy wykorzystać funkcje IFS w przypadku generowania smoka Heighwaya.

☐ 85:7:7:1

☐ 50:49

☐ 1:1

☐ 1:1:1:1

Ćwiczenie 2



Wskaż poprawną odpowiedź.

W książce *Fractals Everywhere* Michael Barnsley opisał między innymi smoka Heighwaya.

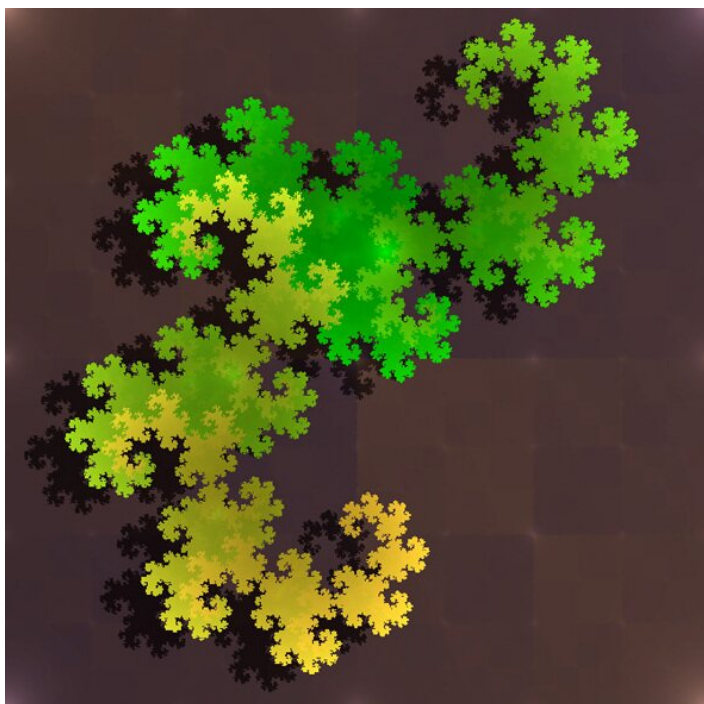
☐ fałsz

☐ prawda

Ćwiczenie 3



Zaznacz poprawną odpowiedź. Jak nazywa się przedstawiony na obrazku fraktal?



- ☐ Puzzle Knutha
- ☐ Krzywa Sierpińskiego
- ☐ Smok Heighwaya
- ☐ Złoty smok

Źródło: domena publiczna.

Ćwiczenie 4



Wpisz proporcje, których użyjesz, aby wygenerować paproć Barnsleya (od największej do najmniejszej).

----------------------	----------------------	----------------------	----------------------

Ćwiczenie 5



Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi. Wskaż, ile przekształceń afinicznych nie wykorzystuje konstrukcja paproci Barnsleya.

☐ 4

☐ 2

☐ 10

☐ 3

Ćwiczenie 6



Wskaż poprawną odpowiedź.

Punktem startowym do tworzenia smoka Heighwaya jest punkt (1,0).

☐ fałsz

☐ prawda

Ćwiczenie 7



Wskaż, co po polsku oznacza skrót IFS.

☐ międzynarodowe społeczeństwo fraktali (od ang. *international fractals society*)

☐ system funkcji iterowanych (od ang. *iterated function system*)

☐ interesujące kształty fraktalne (od ang. *interesting fractal shapes*)

Ćwiczenie 8



Napisz, kto opisał fraktal przypominający paproć.

Dla nauczyciela

Autor: Maurycy Gast

Przedmiot: Informatyka

Temat: Konstrukcje fraktalne

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres podstawowy i rozszerzony

Podstawa programowa:

Cele kształcenia – wymagania ogólne

I. Rozumienie, analizowanie i rozwiązywanie problemów na bazie logicznego i abstrakcyjnego myślenia, myślenia algorytmicznego i sposobów reprezentowania informacji.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

I. Rozumienie, analizowanie i rozwiązywanie problemów.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) planuje kolejne kroki rozwiązywania problemu, z uwzględnieniem podstawowych etapów myślenia komputacyjnego (określenie problemu, definicja modeli i pojęć, znalezienie rozwiązania, zaprogramowanie i testowanie rozwiązania).

5) sprawdza poprawność działania algorytmów dla przykładowych danych.

III. Posługiwanie się komputerem, urządzeniami cyfrowymi i sieciami komputerowymi.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

2) dokonuje kompresji informacji, objaśnia różnice między kompresją stratną i bezstratną tekstów, obrazów, dźwięków, filmów;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;

- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne (językiem ucznia):

- Stworzysz algorytm służący do generowania pięknych struktur fraktalnych.
- Wymienisz autorów skomplikowanych konstrukcji samopodobnych.
- Wykorzystasz metodę Monte Carlo w celu wyznaczenia punktów należących do fraktali.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem multimediu i ćwiczeń interaktywnych;
- metody aktywizujące.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. **Przygotowanie do zajęć.** Nauczyciel loguje się na platformie i udostępnia e-materiał: „Konstrukcje fraktalne”. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Ustalenie celu lekcji i kryteriów sukcesu.
2. **Rozpoznanie wiedzy uczniów.** Uczniowie tworzą pytania dotyczące tematu zajęć, na które odpowiedzą w trakcie lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie analizują przykład z sekcji „Przeczytaj” i powtarzają zaprezentowane rozwiązanie na swoim komputerze.
2. **Praca z multimediami.** Nauczyciel odtwarza zawartość sekcji „Audiobook”. Uczniowie wspólnie zapoznają się z jego treścią.
3. **Ćwiczenie umiejętności.** Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1–8 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Na koniec zajęć nauczyciel raz jeszcze wyświetla na tablicy temat lekcji i cele zawarte w sekcji „Wprowadzenie”. W odniesieniu do ich realizacji dokonuje szczegółowej oceny rozwiązania zastosowanego przez wybranego ucznia.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: „Na dzisiejszych zajęciach nauczyłam/łem się jak...”.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenie 1 z sekcji „Audiobook”.

Wskazówki metodyczne:

- Treści w sekcji „Przeczytaj” można wykorzystać jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy uczniów.