Sposoby opisywania ciągów

Sposoby opisywania ciągów

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

Serie i sekwencje figur geometrycznych, czy liczb można opisać nie tylko graficznie, ale również innymi sposobami. W tym materiale pokażemy różne sposoby opisywania ciągu – za pomocą wzoru, słownie, wykresem, podając kolejne wyrazy.

Będziemy wzorować się na analogicznych sposobach opisu innych funkcji, pamiętając o dziedzinie ciągu. W tym przypadku dziedziną jest zbiór liczb naturalnych lub podzbiór tego zbioru – zatem uwaga! – wykresem ciągu nie będzie krzywa, ale zbiór izolowanych punktów.

Twoje cele

- Opiszesz ciąg różnymi sposobami (słownie, za pomocą wzoru, wykresu, zbioru uporządkowanych par).
- Ciąg określony za pomocą kilku wyrazów opiszesz innymi sposobami.
- Wykorzystasz własności ciągów liczbowych do rozwiązywania zadań z teorii liczb.

Przeczytaj

Przypomnijmy najpierw definicję ciągu.

Definicja: Ciąg nieskończony

Ciągiem nieskończonym nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych dodatnich.

Definicja: Ciąg skończony

Ciągiem skończonym nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór n liczb naturalnych $\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n\}$.

Na podstawie definicji ciągu wiemy, że ciąg jest pewną funkcją. Zatem sposoby opisywania ciągów są analogiczne, jak sposoby opisywania funkcji.

Ciąg często zapisujemy, wypisując jego **kolejne wyrazy**.

W przypadku ciągów nieskończonych wypisujemy kilka początkowych wyrazów ciągu. Na podstawie tych wyrazów orientujemy się, jakie będą wyrazy następne.

Przykład 1

$(-8,\ 4,\ 0,\ 9,\ \ -11)$ – ciąg pięciowyrazowy skończony, którego kolejnymi wyrazami są liczby: $-8,\ 4,\ 0,\ 9,\ \ -11,$

$0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots$ – nieskończony ciąg, którego wyrazami są kolejne liczby naturalne parzyste,

$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \ldots$ – nieskończony ciąg, którego wyrazami są odwrotności kolejnych liczb naturalnych dodatnich.

Wypisywanie wyrazów ciągu i zauważenie regularności, według której są tworzone, nie zawsze jest wygodne i łatwe.

Najczęściej ciągi liczbowe opisywane są więc za pomocą **wzoru**, zwanego wzorem ogólnym ciągu. Znając wzór ogólny ciągu, można obliczyć jego dowolny wyraz.

Przykład 2

Obliczymy pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n) o wzorze ogólnym $a_n = \sqrt{n+1}$.

Do wzoru postawiamy kolejne liczby naturalne.

$a_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},$

$a_2 = \sqrt{2+1} = \sqrt{3},$

$a_3 = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2,$

$a_4 = \sqrt{4+1} = \sqrt{5},$

$a_5 = \sqrt{5+1} = \sqrt{6}.$

W niektórych przypadkach na podstawie kilku początkowych wyrazów ciągu można ustalić regułę, według której one powstają. Pozwala to zapisać wzór ogólny ciągu (z reguły jednak znając początkowe wyrazy ciągu można podać różne wzory opisujące ten ciąg).

Przykład 3

Kolejne wyrazy ciągu	Przykład wzoru ogólnego
$1,\ 5,\ 5,\ 9,\ 9,\ \ldots$	$a_n = (-1)^n + 2n$
$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \ldots$	$b_n = 2^n$
$\frac{1}{5},\ \frac{2}{6},\ \frac{3}{7},\ \frac{4}{8},\ \frac{5}{9},\ \ldots$	$c_n = \frac{n}{n+4}$

Na podstawie wzoru ciągu, można badać niektóre własności ciągu.

Przykład 4

Ciąg (a_n) określony jest wzorem ogólnym $a_n = 2^n + n^2$.

Znajdziemy wszystkie takie wyrazy ciągu a_k, że k jest liczbą pierwszą i $2^k + k^2$ jest też liczbą pierwszą.

Liczba $2^k + k^2$ jest liczbą większą od 2. Jako liczba pierwsza jest więc liczbą nieparzystą.

Zatem k jest liczbą nieparzystą.

Wówczas 2^k w dzieleniu przez 3 daje resztę 2.

Natomiast k^2 w dzieleniu przez 3 daje resztę 0 lub 1.

Aby suma $2^k + k^2$ nie była podzielna przez 3, to k musi być liczbą podzielną przez 3.

Ponieważ k jest liczbą pierwszą, zatem $k = 3$.

Wtedy $2^3 + 3^2 = 17$.

Odpowiedź:

W ciągu (a_n) istnieje tylko jeden wyraz o szukanej własności, jest to wyraz a_3.

Przykład 5

Ciąg (a_n) określony jest wzorem ogólnym: $a_n = n$. Znajdziemy w tym ciągu cztery kolejne wyrazy, których iloczyn powiększony o 4^5 jest kwadratem liczby naturalnej. Zauważmy, że kolejne wyrazy ciągu różnią się o 1.

Oznaczmy:
$a, a+1, a+2, a+3$ – kolejne wyrazy ciągu,
x – liczba będąca kwadratem liczby naturalnej.

Na podstawie treści zadania zapisujemy równanie, którego rozwiązania będziemy poszukiwać.

$$a(a+1)(a+2)(a+3)+4^5=x^2$$

Przekształcamy otrzymane równanie.

$$a(a+1)(a+2)(a+3)+1024=x^2$$

$$a(a+1)(a+2)(a+3)=x^2-1024$$

$$a^4+6a^3+11a^2+6a=x^2-1024$$

$$\left(a^2+3a+1\right)^2-1=x^2-1024$$

Oznaczmy:
$a^2+3a+1=y$.

$$y^2-1=x^2-1024$$

Rozwiązujemy równanie

$$x^2-y^2=1023$$

Ponieważ $1023=3\cdot 11\cdot 31$, stąd

$$x^2-y^2=3\cdot 11\cdot 31$$

$$(x-y)(x+y)=3\cdot 11\cdot 31$$

Prawa strona zapisanej równości jest dodatnia, zatem lewa też musi być dodatnia.

Zatem

$$(x-y)(x+y)=1\cdot 1023 \Rightarrow y=511$$

lub

> $(x-y)(x+y) = 3 \cdot 341 \Rightarrow y = 169$
>
> lub
>
> $(x-y)(x+y) = 11 \cdot 93 \Rightarrow y = 41$
>
> lub
>
> $(x-y)(x+y) = 31 \cdot 33 \Rightarrow y = 1$
>
> Jedynie $y = 41$ jest wartością trójmianu $a^2 + 3a + 1$ dla liczby naturalnej, $a = 5$.
>
> Zatem
>
> $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 + 1024 = 52^2$
>
> Odpowiedź:
>
> Kolejne szukane wyrazy ciągu to a_5, a_6, a_7, a_8.

Nie zawsze łatwo jest podać wzór ogólny ciągu.

Na przykład wyrazy ciągu:

$1,73; 1,732; 1,7320; 1,73205; \ldots$

to kolejne przybliżenia liczby $\sqrt{3}$. W takim przypadku sposób tworzenia wyrazów ciągu możemy podać **słownie**.

> **Przykład 6**
>
> - Ciągiem skończonym jest lista lekcji, które odbywają się w środy w klasie IIc.
>
>   Kolejnym liczbom naturalnym przyporządkowane są nazwy odpowiednich przedmiotów szkolnych.
>
> $1 \rightarrow$ geografia
>
> $2 \rightarrow$ j. polski
>
> $3 \rightarrow$ matematyka
>
> $4 \rightarrow$ historia
>
> $5 \rightarrow$ fizyka
>
> - Każdej liczbie naturalnej mniejszej od 6 przyporządkowujemy sumę cyfr iloczynu tej liczby i liczby 104.

Wyrazy tego ciągu:

$a_1 = 1 + 4 = 5$

$a_2 = 2 + 8 = 10$

$a_3 = 3 + 1 + 2 = 6$

$a_4 = 4 + 1 + 6 = 11$

$a_5 = 5 + 2 = 7$

- Ciąg (d_n) określony jest następująco: d_n oznacza liczbę dzielników naturalnych liczby naturalnej dodatniej n.

  Kilka początkowych wyrazów ciągu:

  $d_1 = 1$

  $d_2 = 2$

  $d_3 = 2$

  $d_4 = 3$

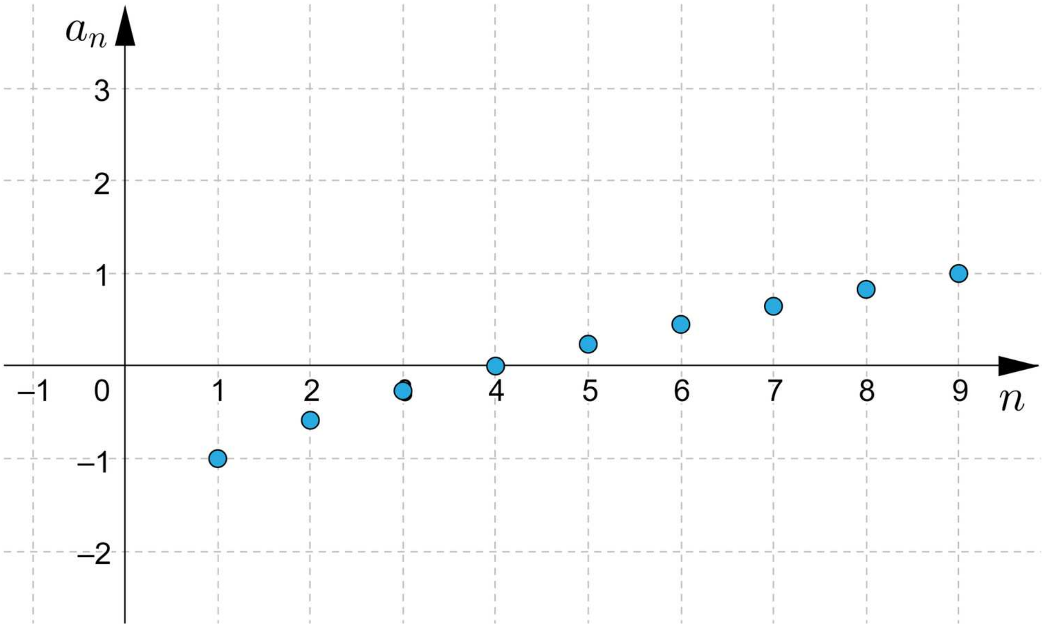
  $d_5 = 2$

Ciągi można też przedstawiać **graficznie**.

Jeśli ciąg liczbowy (a_n) określony jest wzorem $a_n = f(n)$ to jego wykres w układzie współrzędnych jest zbiorem punktów $(n,\ f(n))$, gdzie n należy do dziedziny funkcji.

Przykład 7

Rysunek przedstawia wykres ciągu $a_n = \sqrt{n} - 2$ dla $1 \leq n \leq 9$ i $n \in \mathbb{N}$.



Z wykresu możemy odczytać na przykład, że:

$a_1 = -1,$

$a_4 = 0,$

$a_9 = 1.$

Przykład 8

Sporządzimy wykres ciągu (a_n) określonego wzorem $a_n = -n + 4$ dla $n \in \{1,\ 2,\ 3, 4,\ 5, 6\}$.

Wyznaczamy kolejne wyrazy ciągu.

$a_1 = -1 + 4 = 3$

$a_2 = -2 + 4 = 2$

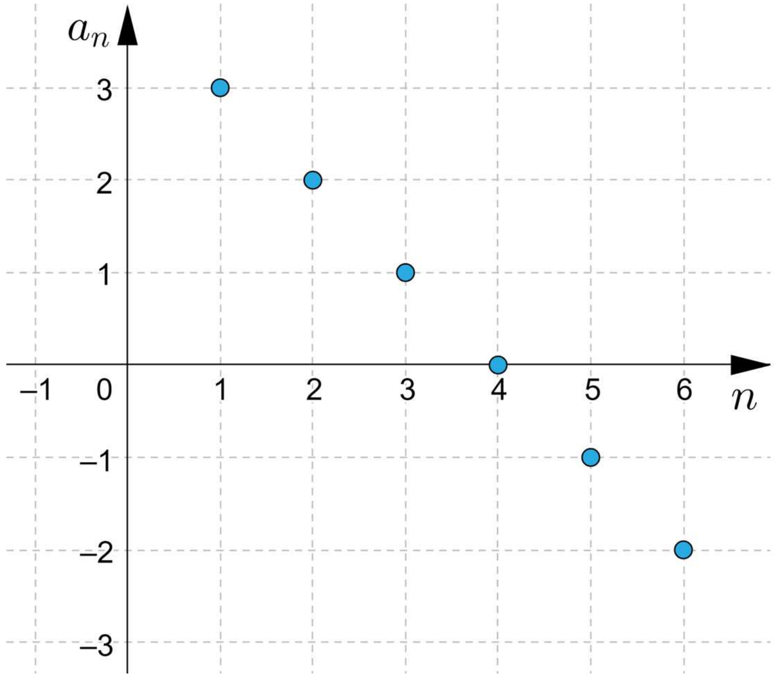
$a_3 = -3 + 4 = 1$

$a_4 = -4 + 4 = 0$

$a_5 = -5 + 4 = -1$

$a_6 = -6 + 4 = -2$

Wykresem ciągu jest zbiór punktów $(n,\ a_n) = (n,\ \ -n + 4)$. Zaznaczamy te punkty w układzie współrzędnych.



Ciąg (a_n), przedstawiony na rysunku powyżej, można opisać za pomocą **zbioru uporządkowanych par**

$\{(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1),\ (4,\ 0),\ (5,\ \ -1),\ (6,\ \ -2)\}$.

Słownik

ciąg nieskończony

ciągiem nieskończonym nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych dodatnich

ciąg skończony

ciągiem skończonym nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór n liczb naturalnych $\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n\}$

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z galerią pokazującą sposoby opisywania ciągów. Spróbuj najpierw samodzielnie rozwiązać proponowane tam zadania, a następnie porównaj z rozwiązaniami.

Polecenie 2

Ciąg (a_n) opisany jest za pomocą tabelki. Opisz ten ciąg wzorem i wypisując jego wyrazy.

Kolejne wyrazy ciągu					
n	1	2	3	4	5
a_n	-2	-7	-24	-77	-238

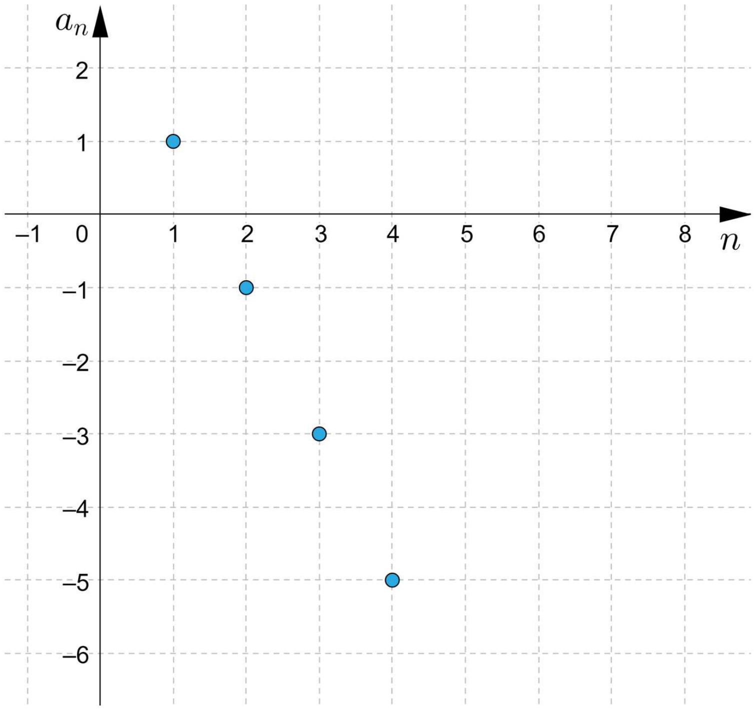
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Na rysunku przedstawiono wykres kilku kolejnych wyrazów ciągu (a_n).



Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Sprawdź, ile punktów wspólnych mają wykresy ciągów $a_n = 2(2n+1)$ i $b_n = 17 + n(n-4)$.

Ćwiczenie 8

Wyznacz wszystkie wyrazy całkowite ciągu (a_n) określonego wzorem ogólnym $a_n = 2 - \frac{64-n^2}{n^2}$.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Sposoby opisywania ciągów

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;

5) stosuje wzór na n–ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;

7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- opisuje ciąg różnymi sposobami (słownie, za pomocą wzoru, wykresu, zbioru uporządkowanych par)
- ciąg określony za pomocą kilku wyrazów opisuje innymi sposobami
- wykorzystuje własności ciągów liczbowych do rozwiązywania zadań z teorii liczb
- rozwija umiejętności związane z tworzeniem, analizowaniem i rozwiązywaniem zadań opartych na analogii

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- ja i ty
- para za parą

Formy pracy:

- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą ja i ty powtarzają wiadomości dotyczące ciągów (uczniowie nawzajem zadają sobie pytania dotyczące ciągów i odpowiadają na nie).
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie siedzący w tej samej ławce tworzą parę. Najpierw zapoznają się z materiałem zapisanym w sekcji „Przeczytaj” (oprócz Przykładu 4 i Przykładu 5) i w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych”.
2. Następnie opisują wymyślony przez siebie ciąg jednym ze sposobów. Kartkę z opisem ciągu przekazują parze uczniów z sąsiedniej ławki. Uczniowie, którzy otrzymali kartkę dopisują opis ciągu innym sposobem i przekazują ja następnej parze, która postępuje podobnie. I tak, aż do wyczerpania pomysłów. Para, która już nie wymyśli nowego opisu, oddaje kartkę twórcom pierwszego opisu.
3. W ten sposób każda para uczniów powinna dokonać co najmniej 5 – 10 opisów. Ważne jest, aby za każdym razem próbowała opisać ciąg innym sposobem.
4. Ostatnim elementem tej części zajęć jest wspólne rozwiązanie na tablicy Przykładu 4 i Przykładu 5.

Faza podsumowująca:

1. Uczniowie, na podstawie otrzymanych opisów ciągów, sporządzają wspólny graf sposobów opisu ciągów.
2. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności. Zwracając szczególną uwagę na

efektywność pracy w parach.
3. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę par.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest wykonanie ćwiczeń interaktywnych.

Materiały pomocnicze:

Pojęcie ciągu. Ciąg jako funkcja zmiennej naturalnej

Wskazówki metodyczne:

Galerię zdjęć interaktywnych można wykorzystać omawiając sposoby opisu funkcji o dziedzinie skończonej (dyskretnej).