



Jak wyznaczyć ekstremum funkcji?

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Jak wyznaczyć ekstremum funkcji?

Źródło: Federico Beccari, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Obiekty otaczającego nas świata obdarzone są mnóstwem różnorodnych cech. Różnorodność ta określa stopień ich skomplikowania. Naukowcy próbują stopniowo badać świat kategoryzując skomplikowane rzeczy i zjawiska z nadzieją, że ułatwi to zrozumienie mechanizmów rządzących światem. Matematyka chcąc pomóc w budowaniu ich teorii „wytworzyła przyrządy” którymi sprawnie posługują się inne nauki. Jednym z takich „przyrządów” jest umiejętność wyznaczania ekstremów funkcji.

Twoje cele

- Dowiesz się jak wyznaczać ekstrema funkcji.

Przeczytaj

Twierdzenie: Warunek konieczny istnienia ekstremum

Jeśli funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna w punkcie x_0 i ma w tym punkcie ekstremum, to

$$f'(x_0) = 0.$$

Punkty, w których pochodna funkcji jest równa zero nazywamy **punktami stacjonarnymi**.

Zapamiętaj!

Zerowanie się pochodnej jest warunkiem koniecznym istnienia ekstremum lokalnego dla funkcji różniczkowalnej, ale nie jest warunkiem wystarczającym.

Ważne!

Funkcja może mieć ekstremum lokalne jedynie w punktach, w których jej pochodna **nie istnieje** albo **istnieje i jest równa zero**.

Twierdzenie: Warunek wystarczający istnienia ekstremum

- Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w przedziale (a, b) i $f'(x) < 0$ dla $x \in (a, x_0)$ oraz $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0, b)$, to funkcja ma w punkcie x_0 minimum.
- Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w przedziale (a, b) i $f'(x) > 0$ dla $x \in (a, x_0)$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0, b)$, to funkcja ma w punkcie x_0 maksimum.

Algorytm szukania ekstremum funkcji

Niech funkcja f będzie ciągła na przedziale $\langle a, b \rangle$ i niech ma pochodną właściwą lub niewłaściwą poza skończoną liczbą punktów tego przedziału. Ekstrema tej funkcji szukamy postępując według następującego algorytmu:

- Sprawdzamy, kiedy spełniony jest warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji. W tym celu znajdujemy punkty zerowania się pochodnej funkcji f oraz punkty, w których pochodna właściwa tej funkcji nie istnieje.
- Następnie posługujemy się twierdzeniem o warunku wystarczającym istnienia ekstremum. Badamy zmianę „znaku” pochodnej w punktach stacjonarnych, tj. przy przejściu przez punkt, w którym pochodna zeruje się.
- Określamy rodzaj ekstremum według następujących reguł:
 - Jeśli pochodna przy przejściu przez punkt stacjonarny zmienia znak z ujemnego na dodatni, to funkcja osiąga w tym punkcie minimum.
 - Jeśli pochodna przy przejściu przez punkt stacjonarny zmienia znak z dodatniego na ujemny, to funkcja osiąga w tym punkcie maksimum.

- Jeśli pochodna przy przejściu przez punkt stacjonarny nie zmienia znaku, to funkcja nie posiada w tym punkcie ekstremum.

Przykład 1

Wyznamy ekstrema lokalne następującej funkcji $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 1$.

Rozwiązanie:

Funkcja $f(x)$ jako wielomian jest różniczkowalna w zbiorze $D_f = \mathbb{R}$. Jej pochodna dana jest wzorem

$$f'(x) = 3x^2 + 18x + 15, D_f = D_{f'}.$$

Na mocy pierwszego Twierdzenia o warunku koniecznym istnienia ekstremum, funkcja różniczkowalna $f(x)$ może mieć ekstremum w punkcie, wtedy i tylko, gdy jej pochodna jest w tym punkcie jest równa zero.

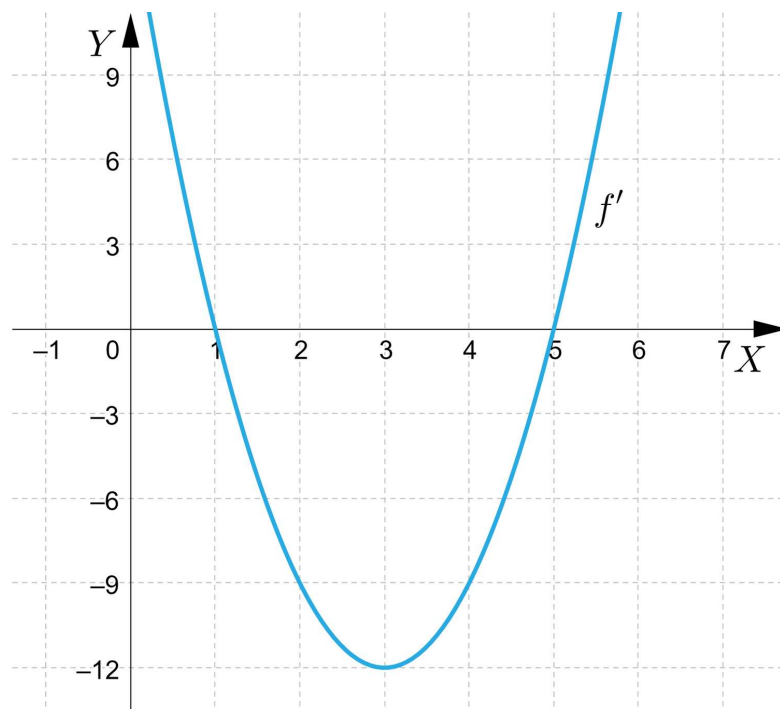
Sprawdźmy, kiedy pochodna $f'(x) = 0$.

Otrzymujemy kolejno:

$$f'(x) = 0, \text{ gdy } 3x^2 - 18x + 15 = 0, \text{ czyli } x = 1 \text{ lub } x = 5.$$

Sprawdzamy warunek wystarczający istnienia ekstremum funkcji.

Badamy zmianę znaku pochodnej w otoczeniu punktów stacjonarnych korzystając z jej wykresu.



W otoczeniu punktu $x = 1$ pochodna zmienia znak z dodatniego na ujemny, zatem w tym punkcie funkcja ma maksimum równe $f_{\max}(1) = 8$.

W otoczeniu punktu $x = 5$ pochodna zmienia znak z ujemnego na dodatni, zatem w tym punkcie funkcja ma minimum równe $f_{\min}(5) = -24$.

Przykład 2

Wyznamy ekstrema lokalne następującej funkcji $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Rozwiązanie:

Dziedziną funkcji jest zbiór $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Funkcja $f(x)$ jako funkcja wymierna jest różniczkowalna w całej dziedzinie. Jej pochodna dana jest wzorem

$$f'(x) = \frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}, D_f = D_{f'}.$$

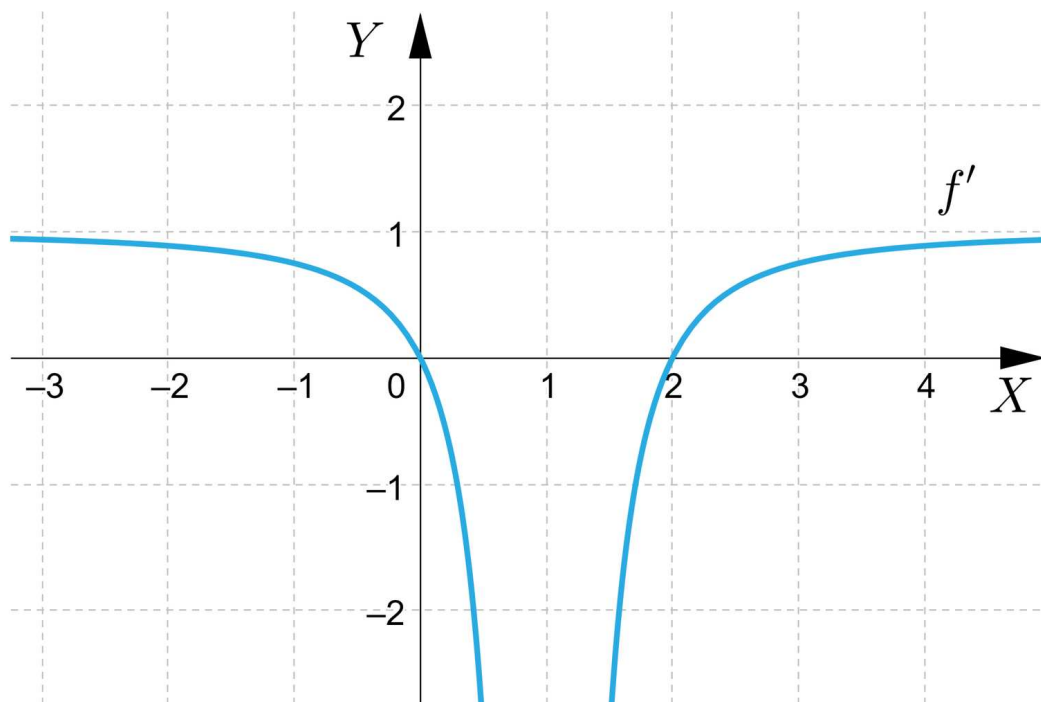
Sprawdzamy, kiedy spełniony jest warunek konieczny istnienia ekstremum, czyli kiedy pochodna $f'(x) = 0$.

Otrzymujemy kolejno:

$$f'(x) = 0, \text{ gdy } \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = 0, \text{ czyli } x^2 - 2x = 0, \text{ stąd } x = 0 \text{ lub } x = 2.$$

Sprawdzamy warunek wystarczający istnienia ekstremum funkcji.

Badamy zmianę znaku pochodnej w otoczeniu punktów stacjonarnych korzystając z jej wykresu.

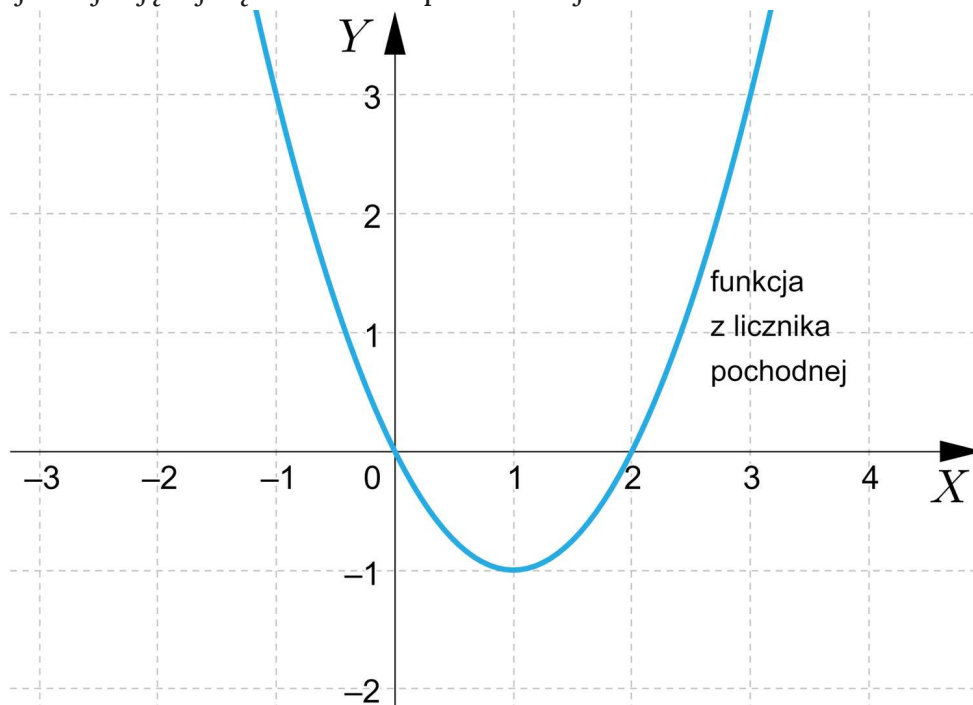


W otoczeniu punktu $x = 0$ pochodna zmienia znak z dodatniego na ujemny, zatem w tym punkcie funkcja ma maksimum równe $f_{\max}(0) = 0$.

W otoczeniu punktu $x = 2$ pochodna zmienia znak z ujemnego na dodatni, zatem w tym punkcie funkcja ma minimum równe $f_{\min}(2) = 4$.

Uwaga:

Dla rozważanej funkcji $f(x)$ badanie znaku pochodnej można ograniczyć do badania znaku funkcji znajdującej się w liczniku pochodnej



Zmiana znaku funkcji z licznika wpływa na znak całej pochodnej.

Przykład 3

Wyznamy ekstrema lokalne następującej funkcji $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Rozwiązanie:

Dziedziną funkcji jest zbiór $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Funkcja $f(x)$ jako funkcja wymierna jest różniczkowalna w całej dziedzinie. Jej pochodna dana jest wzorem

$$f'(x) = \frac{(2x-3) \cdot x^2 - (x^2-3x+2) \cdot 2x}{x^4} = \frac{3x-4}{x^3}$$

dla każdego argumentu ze zbioru $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Sprawdzamy, kiedy spełniony jest warunek konieczny istnienia ekstremum, czyli kiedy pochodna $f'(x) = 0$.

Otrzymujemy kolejno:

$$f'(x) = 0, \text{ gdy } \frac{3x-4}{x^3} = 0, \text{ czyli } 3x - 4 = 0, \text{ stąd } x = \frac{4}{3}.$$

Sprawdzamy warunek wystarczający istnienia ekstremum funkcji.

Badamy zmianę znaku pochodnej w otoczeniu punktów stacjonarnych.

Otrzymujemy kolejno

$$\frac{3x-4}{x^3} > 0,$$

$$x(3x - 4) > 0,$$

$$x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{4}{3}, \infty\right).$$

$$\frac{3x-4}{x^3} < 0,$$

$$x(3x - 4) < 0,$$

$$x \in \left(0, \frac{4}{3}\right).$$

W otoczeniu punktu $x = \frac{4}{3}$ pochodna zmienia znak z ujemnego na dodatni, zatem w tym punkcie funkcja ma minimum równe $f_{\min}\left(\frac{4}{3}\right) = -0,125$.

Punkt $x = 0$ nie należy do dziedziny funkcji (ani pochodnej) zatem funkcja nie może mieć w nim ekstremum.

Przykład 4

Sprawdzimy, ile ekstremów posiada funkcja $f(x) = x^3 + ax + 2$ w zależności od wartości parametru a .

Rozwiązanie:

Funkcja $f(x)$ jako wielomian jest różniczkowalna w zbiorze \mathbb{R} . Jej pochodna dana jest wzorem

$$f'(x) = 3x^2 + a.$$

Otrzymujemy kolejno

- dla $a > 0$ pochodna $f'(x) > 0$ dla każdego argumentu z dziedziny funkcji. Zatem dla żadnego punktu z dziedziny nie jest spełniony warunek konieczny, ani wystarczający istnienia ekstremum funkcji. Funkcja nie ma ekstremum.
- dla $a = 0$ pochodna $f'(x) \geq 0$ dla każdego argumentu z dziedziny funkcji. Istnieją zatem punkty, dla których spełniony jest warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji, ale nie jest spełniony warunek wystarczający istnienia ekstremum funkcji, pochodna nie zmienia znaku. Zatem funkcja nie ma ekstremum.

- dla $a < 0$ pochodna $f'(x) = 3x^2 - a$ dla każdego argumentu z dziedziny funkcji. Pochodna jest funkcją kwadratową, której wyróżnik $\Delta > 0$ dla $a < 0$. Stąd wynika, że pochodna ma dwa miejsca zerowe. Z własności funkcji kwadratowej posiadającej dwa miejsca zerowe wynika, że w otoczeniu tych miejsc pochodna zmienia znak. Zatem funkcja ma dwa ekstrema.

Przykład 5

O funkcji $f(x) = ax^3 + bx + 2$ wiadomo, że w punkcie $x = -1$ posiada ekstremum równe 4. Znajdziemy wartości współczynników a i b oraz pozostałe ekstrema funkcji (jeśli je posiada).

Rozwiązanie:

Funkcja $f(x)$ jako wielomian jest różniczkowalna w zbiorze \mathbb{R} . Jej pochodna dana jest wzorem

$$f'(x) = 3ax^2 + b.$$

Na mocy Twierdzenia o warunku koniecznym istnienia ekstremum funkcji wiemy, że funkcja ma punkty stacjonarne, wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(x) = 0$. Zatem $f'(-1) = 0$ oraz $f(-1) = 4$.

Otrzymujemy kolejno

$$f(-1) = -a - b + 2 = 4,$$

$$f'(-1) = 3a + b = 0,$$

$$\text{stad } a = 1, b = -3.$$

Zatem pochodna funkcji f dana jest wzorem $f'(x) = 3x^2 - 3$.

Miejscami zerowymi pochodnej są punkty (warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji) $x = 1$ i $x = -1$.

Pochodna jest dodatnia dla $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ oraz ujemna dla $x \in (-1, 1)$.

Zatem funkcja posiada drugie ekstremum w punkcie $x = 1$ i jest ono równe 0.

Słownik

funkcja różniczkowalna

funkcję nazywamy różniczkowalną jeśli ma pochodną w każdym punkcie dziedziny

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z galerią zdjęć interaktywnych, a następnie wykonaj ćwiczenia zamieszczone pod nią.

Polecenie 2

Polecenie 3

Wyznaczmy ekstrema funkcji $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5



Wyznacz ekstrema funkcji $f(x) = \frac{2}{5}x^5 - x^3 - 2x + 1$.

Ćwiczenie 6



Wyznacz ekstrema funkcji $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+1}$.

Ćwiczenie 7



Dla jakiej wartości parametru a funkcja $f(x) = \frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{2}(3a+1)x^2 + 3x - 1$ nie ma ekstremów.

Ćwiczenie 8



Uzasadnij, że funkcja $f(x) = \frac{ax}{x^2+4}$ posiada dwa ekstrema dla $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Dla nauczyciela

Autor: Agnieszka Niemczynowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Jak wyznaczyć ekstremum funkcji?

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Zakres rozszerzony Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej;

5) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;

Cele operacyjne:

Uczeń:

- definiuje maksimum lokalne (właściwe/niewłaściwe) funkcji;
- definiuje minimum lokalne (właściwe/niewłaściwe) funkcji;
- opisuje warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji;
- opisuje warunek wystarczający istnienia ekstremum funkcji.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja panelowa;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

- Uczniowie zapoznają się z treściami dotyczącymi ekstremów funkcji.

Faza wstępna:

1. Prowadzący wyświetla na tablicy interaktywnej zawartość sekcji „Wprowadzenie” i omawia cele do osiągnięcia w trakcie lekcji o temacie: „Jak wyznaczyć ekstremum funkcji?”.
2. Rozpoznawanie wiedzy uczniów.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 3–4 osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami z sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie indywidualnie analizują materiał przedstawiony w sekcji „Medium bazowe”. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości, które pojawiły się po zapoznaniu się z materiałem.
3. Uczniowie wykonują wspólnie polecenia nr 1–2 z sekcji „Medium bazowe”. Następnie nauczyciel omawia je wraz z uczniami wyjaśniając ewentualne wątpliwości.
4. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1–2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.
5. Nauczyciel dzieli klasę na grupy. Uczniowie rozwiązują zadania 3–5 z sekcji „Sprawdź się”. Grupa, która poprawnie rozwiąże zadania jako pierwsza otrzymuje oceny za

aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
6. Uczniowie realizują indywidualnie ćwiczenia 6–7 z sekcji „Sprawdź się”. Po ich wykonaniu nauczyciel omawia najlepsze rozwiązania zastosowane przez uczniów.

Faza podsumowująca:

- Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenie nr 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Ekstrema funkcji](#)

Wskazówki metodyczne:

Galerię zdjęć interaktywnych można wykorzystać jako materiał, służący powtórzeniu materiału wyznaczaniu przedziałów monotoniczności funkcji.