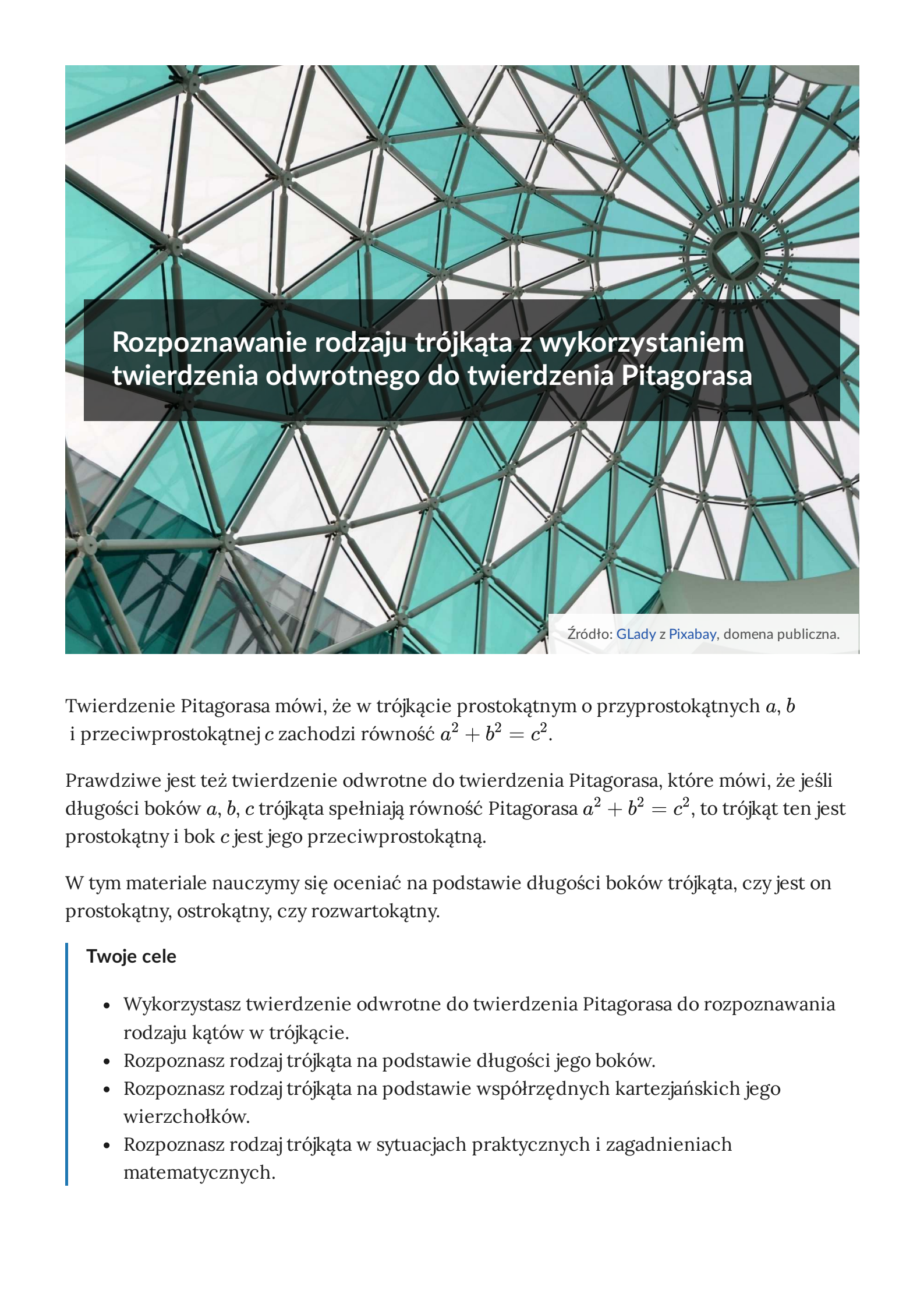




Rozpoznawanie rodzaju trójkąta z wykorzystaniem twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Symulacja interaktywna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Rozpoznawanie rodzaju trójkąta z wykorzystaniem twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa

Źródło: GLady z Pixabay, domena publiczna.

Twierdzenie Pitagorasa mówi, że w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych a , b i przeciwprostokątnej c zachodzi równość $a^2 + b^2 = c^2$.

Prawdziwe jest też twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa, które mówi, że jeśli długości boków a , b , c trójkąta spełniają równość Pitagorasa $a^2 + b^2 = c^2$, to trójkąt ten jest prostokątny i bok c jest jego przeciwprostokątną.

W tym materiale nauczymy się oceniać na podstawie długości boków trójkąta, czy jest on prostokątny, ostrokątny, czy rozwartokątny.

Twoje cele

- Wykorzystasz twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa do rozpoznawania rodzaju kątów w trójkącie.
- Rozpoznasz rodzaj trójkąta na podstawie długości jego boków.
- Rozpoznasz rodzaj trójkąta na podstawie współrzędnych kartezjańskich jego wierzchołków.
- Rozpoznasz rodzaj trójkąta w sytuacjach praktycznych i zagadnieniach matematycznych.

Przeczytaj

Na początek przypomnimy zależności między długościami boków trójkąta.

Własność: długości boków trójkąta

Jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta, to

$$|b - c| < a < b + c$$

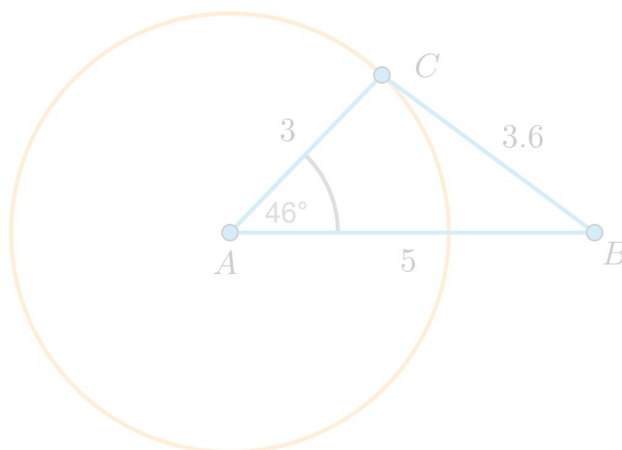
$$|a - c| < b < a + c$$

$$|a - b| < c < a + b$$

Gdyby jedna z tych nierówności nie była spełniona, to nie można by było zbudować trójkąta o bokach a, b, c .

W trójkącie najdłuższy bok leży naprzeciw kąta o największej mierze.

Dla utrwalenia tej własności uruchom aplet. Zwróć uwagę na miarę kąta CAB i boku leżącego na przeciwko niego. Możesz w każdej chwili zatrzymać aplet aby przyjrzeć się uważniej zaznaczonym danym.



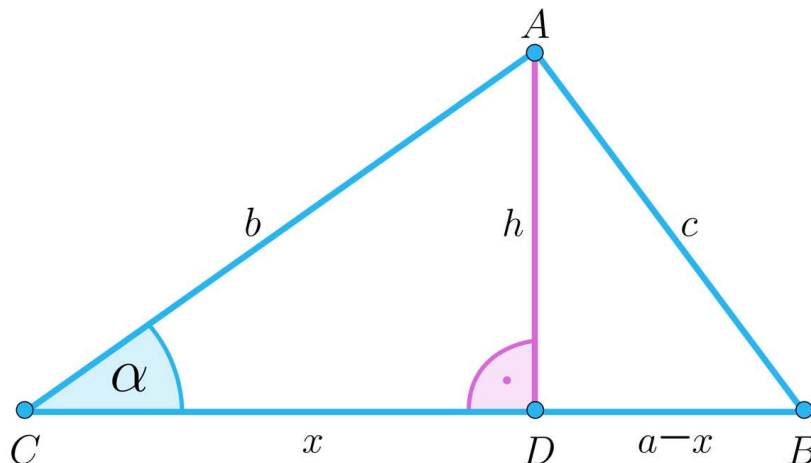
Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D54OT7cfh>

Trójkąt prostokątny

Twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa jednoznacznie charakteryzują trójkąty prostokątne jako trójkąty, których boki spełniają zależność $a^2 + b^2 = c^2$.

Trójkąt ostrokątny

Rozważmy trójkąt ostrokątny o bokach a, b, c . Niech α będzie kątem przy wierzchołku C .



Wysokość h jest prostopadła do BC , więc dzieli trójkąt na dwa trójkąty prostokątne.

Z twierdzenia Pitagorasa mamy

$$h^2 = b^2 - x^2$$

$$h^2 = c^2 - (a - x)^2$$

Stąd

$$b^2 - x^2 = c^2 - (a - x)^2 = c^2 - a^2 + 2ax - x^2$$

Zatem

$$a^2 + b^2 = c^2 + 2ax$$

ale $2ax > 0$, więc

$$a^2 + b^2 > c^2$$

Stąd wynika:

Własność: trójkątów ostrokątnych

Jeżeli trójkąt jest ostrokątny, to dla dowolnej pary boków tego trójkąta suma kwadratów ich długości jest większa od kwadratu trzeciego boku.

Dowód

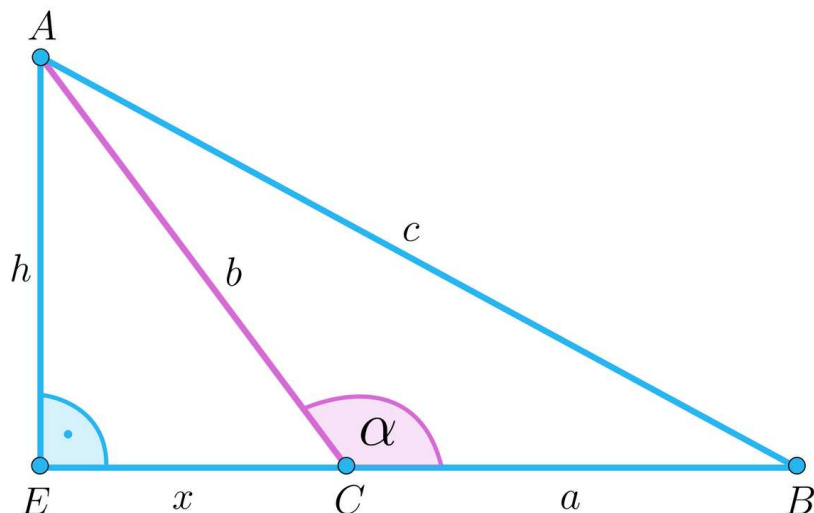
Jeśli kąt między bokami a, b jest ostry, to $a^2 + b^2 > c^2$. Ponieważ trójkąt ostrokątny ma wszystkie kąty ostre, to kąty między dowolnymi dwoma bokami są ostre, więc dla dowolnej pary boków tego trójkąta suma kwadratów ich długości jest większa od kwadratu trzeciego boku.

Sprawdzanie własności opisanej w twierdzeniu można sprowadzić do sprawdzenia, czy kąt leżący naprzeciwko najdłuższego boku trójkąta jest kątem ostrym. Wynika to z własności, że największy kąt w trójkącie leży naprzeciwko najdłuższego boku.

Trójkąt rozwartokątny

Rozważmy trójkąt rozwartokątny o bokach a, b, c .

Niech α będzie kątem rozwartym, jak na rysunku.



Wykonujemy przeliczenia analogiczne do przedstawionych wyżej.

$$h^2 = b^2 - x^2$$

$$h^2 = c^2 - (a + x)^2$$

Stąd

$$b^2 - x^2 = c^2 - (a + x)^2 = c^2 - a^2 - 2ax - x^2$$

Zatem

$$a^2 + b^2 = c^2 - 2ax$$

ale $2ax > 0$, więc

$$a^2 + b^2 < c^2$$

Stąd wynika:

Własność: trójkątów rozwartokątnych

Jeżeli trójkąt jest rozwartokątny, to istnieje para boków tego trójkąta taka, że suma kwadratów ich długości jest mniejsza od kwadratu trzeciego boku.

Dowód

Jeśli kąt między bokami a, b jest rozwarty, to $a^2 + b^2 < c^2$. Ponieważ trójkąt rozwartokątny ma jeden kąt rozwarty, to dla pary boków tworzących ten kąt zachodzi, suma kwadratów ich długości jest mniejsza od kwadratu trzeciego boku.

Twierdzenie: Twierdzenie o klasyfikacji kątów

Jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta, to kąt między bokami a, b jest:

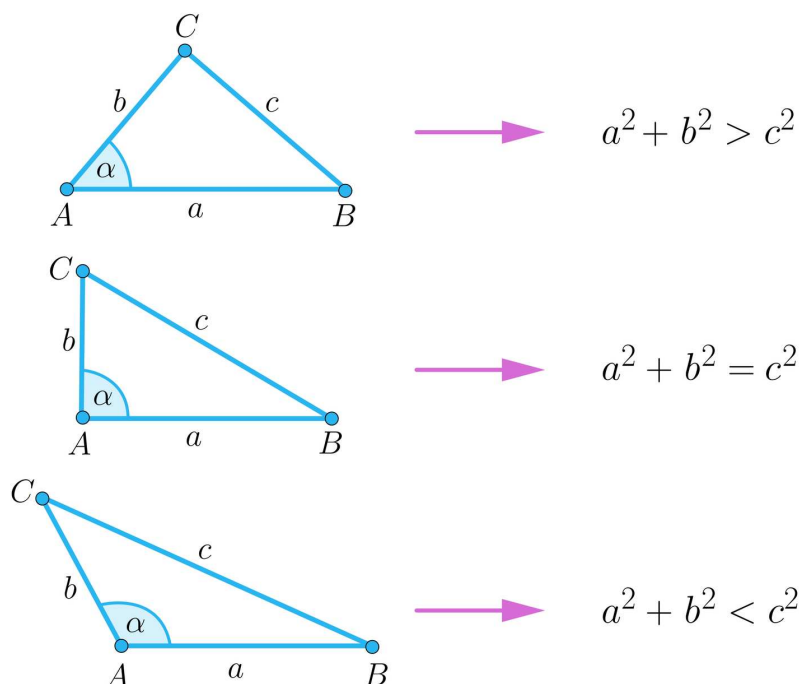
1. ostry wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 + b^2 > c^2$;
2. prosty wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 + b^2 = c^2$;
3. rozwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 + b^2 < c^2$.

Dowód

Pokazaliśmy wyżej, że jeżeli kąt między bokami a, b jest

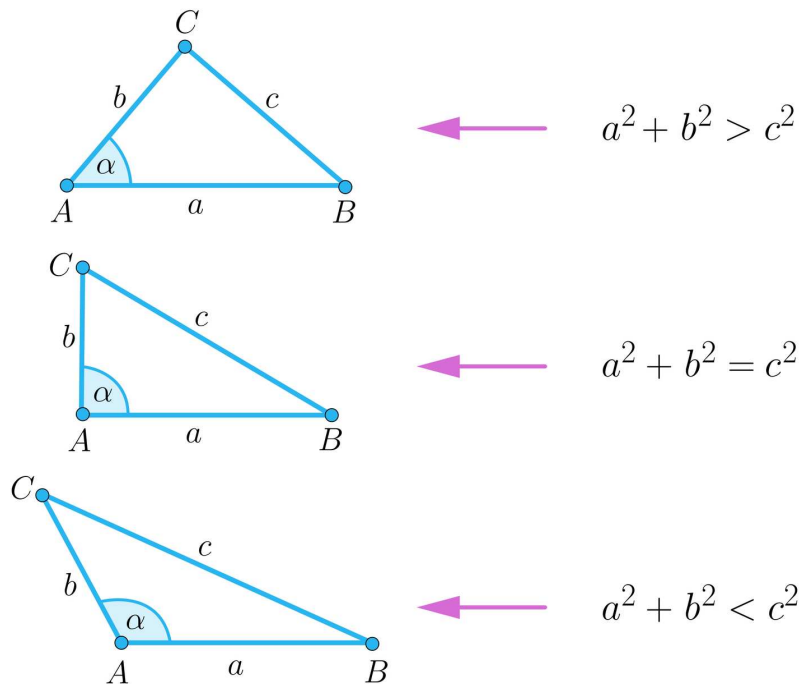
1. ostry, to $a^2 + b^2 > c^2$;
2. prosty, to $a^2 + b^2 = c^2$;
3. rozwarty, to $a^2 + b^2 < c^2$.

Przedstawmy to graficznie, gdzie strzałka pokazuje kierunek wnioskowania.



Należy teraz pokazać własności odwrotne, czyli odwrócić kierunek wnioskowania.

Założmy, że $a^2 + b^2 > c^2$. Wtedy kąt między bokami a i b nie może być prosty, bo musiałaby być równość. Nie może być też rozwarty, bo wtedy mielibyśmy $a^2 + b^2 < c^2$. Zatem kąt między bokami a i b jest ostry. Analogiczne rozważania przeprowadzamy dla pozostałych zależności. Stąd w graficznym przedstawieniu prawdziwe jest wnioskowanie w drugą stronę.



Jako wniosek z twierdzenia o klasyfikacji kątów dostajemy:

Twierdzenie: o klasyfikacji trójkątów

1. Trójkąt jest ostrokątny, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej pary boków tego trójkąta suma kwadratów ich długości jest większa od kwadratu trzeciego boku.
2. Trójkąt jest prostokątny, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje para boków tego trójkąta taka, że suma kwadratów ich długości jest równa kwadratowi trzeciego boku.

3. Trójkąt jest rozwartokątny, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje para boków tego trójkąta taka, że suma kwadratów ich długości jest mniejsza od kwadratu trzeciego boku.

Przykład 1

Dane są dwa boki trójkąta $a = 2$, $b = \sqrt{3}$ oraz wiemy, że trzeci bok $c > a, b$. Wyznaczmy zbiór wartości boku c , dla których ten [trójkąt jest rozwartokątny](#).

Rozwiązanie

1. Musi zachodzić nierówność $a^2 + b^2 < c^2$. Stąd $c^2 > 2^2 + \sqrt{3}^2 = 7$. Stąd $c > \sqrt{7}$.

2. Z własności boków trójkąta i z założenia $2 < c < 2 + \sqrt{3}$.

Wartość c należy do części wspólnej tych przedziałów, czyli $\sqrt{7} < c < 2 + \sqrt{3}$.

Przykład 2

Dane są dwa boki trójkąta $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$ oraz wiemy, że trzeci bok $c > a, b$. Wyznaczmy zbiór wartości boku c , dla których ten [trójkąt jest ostrokątny](#).

Rozwiązanie

1. Musi zachodzić nierówność $c^2 < a^2 + b^2$. Stąd $c^2 < \sqrt{2}^2 + \sqrt{3}^2 = 5$. Stąd $c < \sqrt{5}$.

2. Z własności boków trójkąta i z założenia $\sqrt{3} < c < \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Wartość c należy do części wspólnej tych przedziałów, czyli $\sqrt{3} < c < \sqrt{5}$.

Przykład 3

Wiemy, że trójkąt równoramienny ma podstawę długości 10. Wyznamy długości ramion, dla których trójkąt ten jest:

1. ostrokątny;
2. prostokątny;
3. rozwartokątny.

Rozwiązanie

Na początku zauważamy, że jeśli kąt leżący naprzeciwko podstawy ma miarę α , to pozostałe kąty tego trójkąta mają miarę $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, czyli są ostre. Stąd wynika, że do określenia rodzaju trójkąta równoramiennego wystarczy określić rodzaj kąta leżącego naprzeciwko podstawy.

Niech a oznacza długość ramienia, wtedy $a > \frac{10}{2} = 5$.

Obliczamy sumę kwadratów ramion trójkąta $a^2 + a^2$, a następnie porównujemy $2a^2$ z wartością $10^2 = 100$.

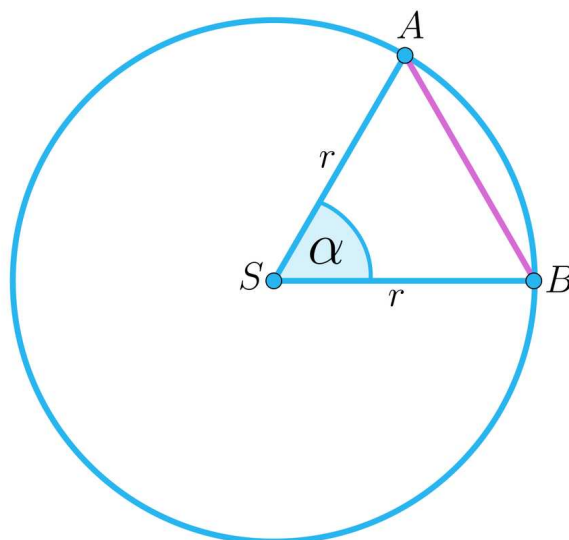
Trójkąt jest prostokątny, wtedy i tylko wtedy, gdy $2a^2 = 100$, czyli $a^2 = 50$, stąd $a = 5\sqrt{2}$.

Trójkąt jest ostrokątny, wtedy i tylko wtedy, gdy $2a^2 > 100$, czyli $a > 5\sqrt{2}$.

Trójkąt jest rozwartokątny, wtedy i tylko wtedy, gdy $2a^2 < 100$, czyli $5 < a < 5\sqrt{2}$.

Przykład 4

Promień okręgu o środku S wynosi r . Rozważamy kąty środkowe w tym okręgu. Wyznamy dla jakich długości cięciw kąty środkowe są ostre.



Rozwiązanie

Trójkąt ABS jest trójkątem równoramiennym o długości ramienia równej promieniowi okręgu. Kąt środkowy oparty na cięciwie AB to kąt ASB tego trójkąta.

Jeśli α jest kątem ostrym w trójkącie ASB to:

$$2r^2 > |AB|^2, \text{ więc } |AB| < r\sqrt{2}.$$

Dla zainteresowanych

Wykorzystanie twierdzenia o klasyfikacji trójkątów w układzie współrzędnych

Rozważamy trójkąt ABC , którego wierzchołki mają współrzędne

$$A = (x_a, y_a), B = (x_b, y_b), C = (x_c, y_c)$$

Wyprowadzimy sposób sprawdzania jakim rodzajem trójkąta jest ten trójkąt.

1. Obliczamy kwadraty długości boków tego trójkąta

$$|AB|^2 = (x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2,$$

$$|AC|^2 = (x_c - x_a)^2 + (y_c - y_a)^2,$$

$$|BC|^2 = (x_c - x_b)^2 + (y_c - y_b)^2.$$

2. Wybieramy ten odcinek, którego kwadrat długości jest maksymalny. Przyjmijmy, że to jest AB .

3. Sprawdzamy, która z zależności z twierdzenia o klasyfikacji kątów jest spełniona, czyli porównujemy wartość wyrażenia $|AC|^2 + |BC|^2$ z wartością $|AB|^2$.

4. Określamy rodzaj trójkąta.

Przykład 5

Określimy rodzaj trójkąta o wierzchołkach $A = (-2, 1)$, $B = (1, 1)$, $C = (4, 2)$.

Rozwiązanie

Obliczamy

$$|AB|^2 = (1 - (-2))^2 + (1 - 1)^2 = 9,$$

$$|AC|^2 = (4 - (-2))^2 + (2 - 1)^2 = 37,$$

$$|BC|^2 = (4 - 1)^2 + (2 - 1)^2 = 10.$$

Kwadrat boku AC ma największą wartość.

$$|AC|^2 + |BC|^2 = 19 < 37, \text{ więc trójkąt jest rozwartokątny.}$$

Słownik

trójkąt prostokątny

trójkąt, którego jeden z kątów wewnętrznych jest prosty

trójkąt ostrokątny

trójkąt, którego wszystkie kąty wewnętrzne są ostre

trójkąt rozwartokątny

trójkąt, którego jeden z kątów wewnętrznych jest rozwarty

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

1. Ustaw godzinę za pomocą suwaków **h** i **m**. Wskazówka godzinowa jest dwa razy krótsza od wskazówki minutowej.
2. Oceń rodzaj trójkąta jaki tworzą wskazówki zegara i odcinek łączący ich końce.
3. Ustaw godzinę tak, by trójkąt był rozwartokątny, a kąt między wskazówkami był ostry.
4. Podaj przykłady godzin, dla których utworzony trójkąt jest prostokątny? Ostrokątny? Rozwartokątny?



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1CKgVKjG>




Polecenie 2

Zaznacz prawidłową odpowiedź.

Polecenie 3

Zaznacz prawidłowe odpowiedzi.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

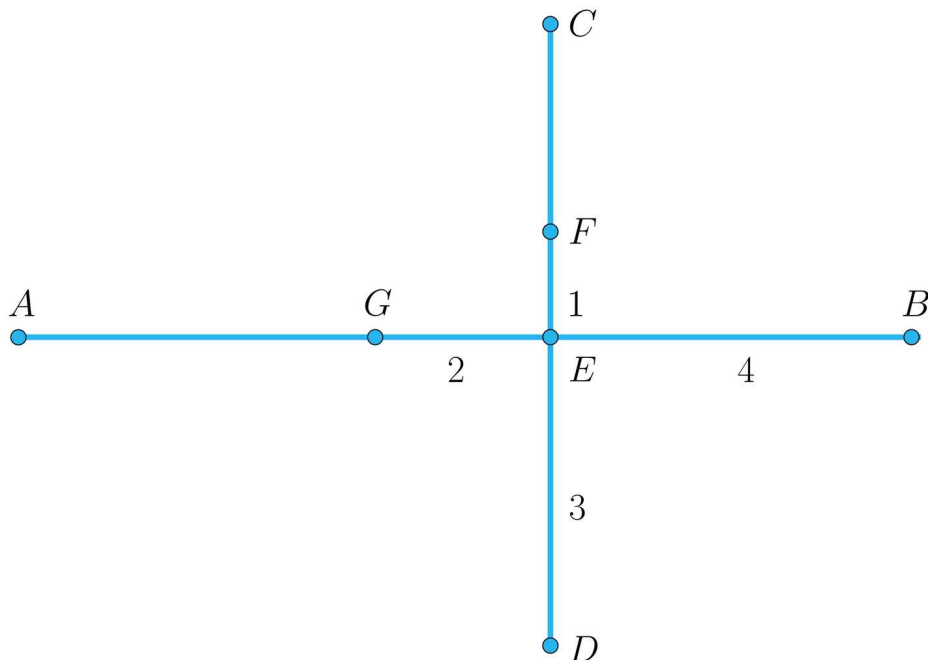
Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Na rysunku punkt E jest punktem przecięcia prostopadłych odcinków AB i CD o długościach 10 i 6 odpowiednio. Ponadto $|EF| = 1$, $|EG| = 2$, $|ED| = 3$, $|EB| = 4$.



Wtedy:

Ćwiczenie 3



Trójkąt ABC ma boki długości $|AB| = 6$, $|AC| = 10$. Jaką długość powinien mieć bok $|BC|$, aby trójkąt był prostokątny?

Ćwiczenie 4



Trójkąt ABC ma boki długości $|AB| = 16$, $|AC| = 20$. Jaką długość powinien mieć bok $|BC|$, aby trójkąt był ostrokątny.

Ćwiczenie 5

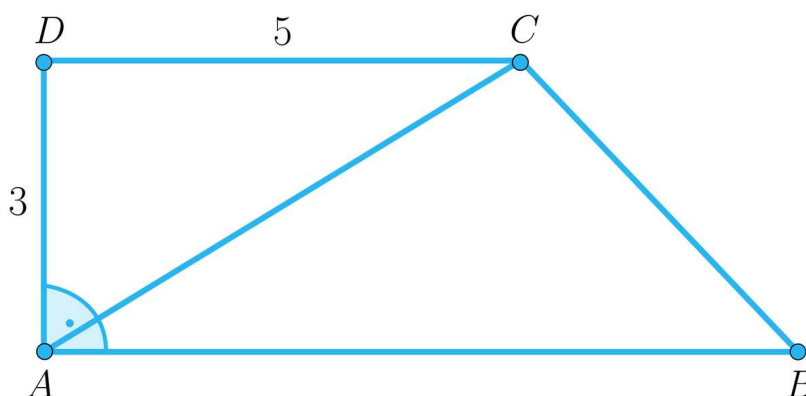


Trójkąt ABC ma boki długości $|AB| = c$, $|AC| = b$ takie, że $c \geq b$. Jaką długość powinien mieć bok $|BC|$, aby trójkąt był rozwartokątny.

Ćwiczenie 6



W trapezie prostokątnym przedstawionym na rysunku podstawa AB jest o 3 dłuższa od podstawy DC .



Oceń jakiego rodzaju trójkątem jest trójkąt ABC .

Ćwiczenie 7



Dłuższa przekątna deltoidu dzieli krótszą przekątną o długości a w połowie. A krótsza przekątna deltoidu dzieli dłuższą przekątną w stosunku $1 : 3$. Wyznacz dla jakich długości dłuższej przekątnej trójkąty równoramienne, z których składa się deltoid, są ostrokątne.

Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Bogdan Staruch

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wykorzystanie twierdzenia Pitagorasa do obliczania długości odcinków w trójkątach

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria

Zakres podstawowy. Uczeń:

2) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i twierdzenie cosinusów); stosuje twierdzenie: w trójkącie naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok;

12) przeprowadza dowody geometryczne.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków - stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa;
- stosuje twierdzenie: w trójkącie naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm
- kognitywizm

Metody i techniki nauczania:

- mapa myśli
- metoda tekstu przewodniego
- analiza pomysłów

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń lub para uczniów miała do dyspozycji komputer; lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym

Przebieg zajęć:

Faza wstępna:

- Uczniowie przypominają twierdzenia Pitagorasa i odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.
- Nauczyciel przedstawia temat lekcji i ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie tworzą mapę myśli ilustrującą z jakich boków można zbudować trójkąt, rodzaje kątów i ich związki z długościami boków trójkąta.
2. Nauczyciel przedstawia własności długości boków trójkąta.
3. Uczniowie poznają twierdzenie o klasyfikacji trójkątów, analizują dowód.
4. Uczniowie metodą tekstu przewodniego zapoznają się z przykładami w części Przeczytaj.
5. Nauczyciel przedstawia symulację interaktywną do rozpoznawania rodzaju trójkąta na tarczy zegara.
6. Uczniowie sprawdzają nabyte umiejętności i wiedzę wykonując wskazane ćwiczenia interaktywne.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel omawia ewentualne problemy z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: Na dzisiejszych zajęciach nauczyłam/nauczyłem się...

Praca domowa

Uczniowie wyznaczają przykładowe godziny, dla których wskazówki zegara i odcinek łączący ich końce tworzą trójkąt prostokątny.

Materiały pomocnicze:

- [Twierdzenie Pitagorasa](#)

Wskazówki metodyczne:

Symulacja interaktywna może być wykorzystana przez uczniów:

- podczas przygotowywania się do zajęć,
- do utrwalania wiedzy,
- jako inspiracja do stworzenia własnego samouczka lub prezentacji.