



Pole powierzchni walca

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Schemat interaktywny
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Podczas robót drogowych walec wykonuje pracę, która polega na wyrównaniu powierzchni asfaltu. Każdy pełny obrót walca oznacza ucięcie fragmentu drogi, który jest równy polu powierzchni bocznej walca. W materiale omówimy, jak obliczyć pole powierzchni całkowitej walca. Bazując na materiale teoretycznym oraz omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.



Źródło: dostępny w internecie: www.pixabay.com, domena publiczna.

Twoje cele

- Podasz definicję oraz podstawowe własności walca.
- Określisz wzory na pole powierzchni podstawy oraz pole powierzchni bocznej walca.
- Obliczysz pole powierzchni całkowitej walca.
- Wykorzystasz wzór na pole powierzchni walca do rozwiązywania problemów matematycznych.

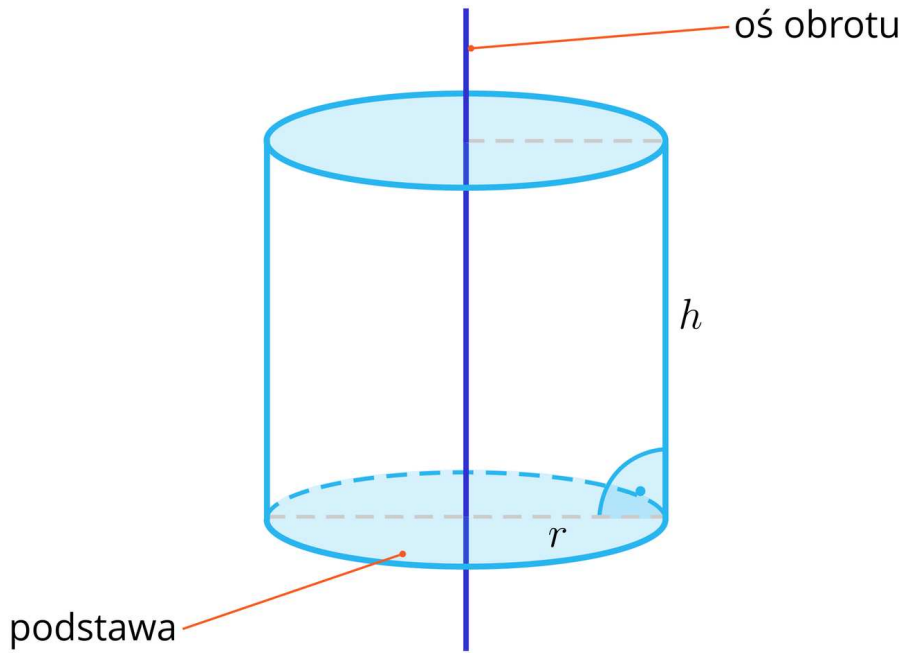
Przeczytaj

Przypomnijmy definicję oraz podstawowe własności walca.

Definicja: Walec

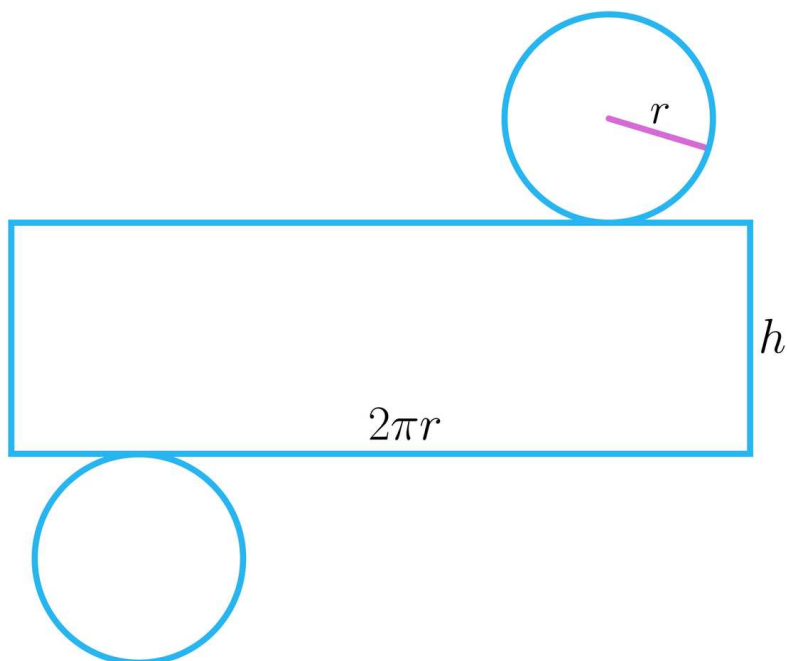
Walec jest bryłą obrotową, która powstaje przez obrót prostokąta dookoła osi zawierającej jeden z jego boków.

Niech r będzie długością promienia podstawy walca, a h jego wysokością.



Pole powierzchni walca

Walec zbudowany jest z dwóch podstaw, które są kołami o promieniu r oraz powierzchni bocznej, która po rozwinięciu jest prostokątem o bokach długości $2\pi r$ oraz h .



Zatem pole powierzchni całkowitej walca zapisujemy wzorem:

$$P_c = 2 \cdot P_p + P_b,$$

gdzie:

$$P_p = \pi \cdot r^2$$

$$P_b = 2\pi r \cdot h.$$

Wobec tego

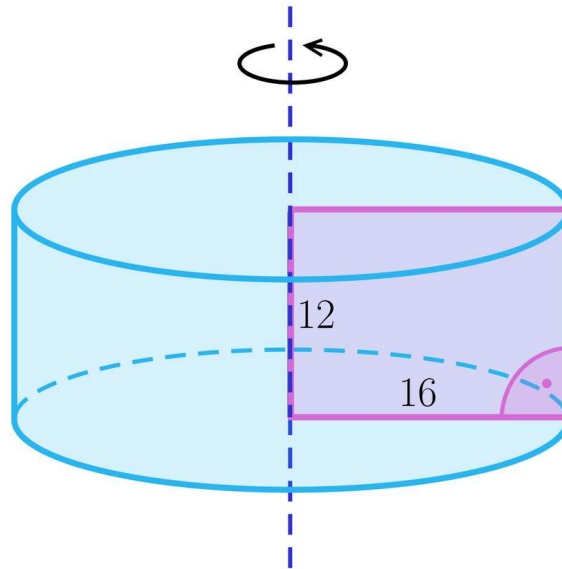
$$P_c = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h = 2\pi r(r + h).$$

Przykład 1

Obliczymy pole powierzchni całkowitej walca powstałego w wyniku obrotu prostokąta o wymiarach 12 i 16 wokół krótszego boku.

Rozwiązanie

Narysujmy walec i wprowadźmy odpowiednie oznaczenia.



Jeżeli r jest długością promienia podstawy walca, a h długością jego wysokości, to:

$$r = 16,$$

$$h = 12.$$

Zatem pole powierzchni całkowitej tego walca wynosi:

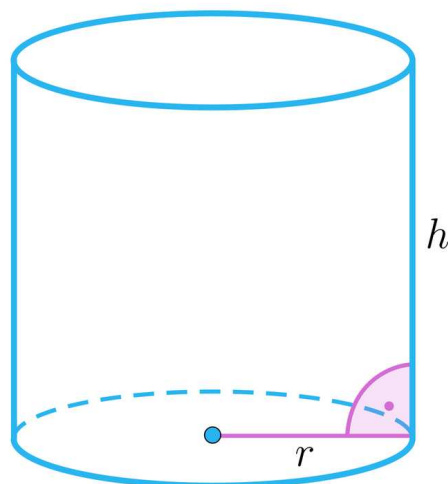
$$P_c = 2\pi \cdot 16^2 + 2\pi \cdot 16 \cdot 12 = 512\pi + 384\pi = 896\pi.$$

Przykład 2

Obliczymy **pole powierzchni** całkowitej walca, jeżeli obwód jego podstawy wynosi 16π , a wysokość walca ma długość 6.

Rozwiązanie

Narysujmy walec i wprowadźmy odpowiednie oznaczenia.



Z treści zadania mamy, że $h = 6$. Obwód podstawy **walca** o promieniu r obliczamy ze wzoru $L = 2\pi r$, zatem do wyznaczenia wartości r rozwiązujemy równanie:

$$16\pi = 2\pi \cdot r, \text{ czyli } r = 8.$$

Wobec tego pole powierzchni całkowitej tego walca wynosi:

$$P_c = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$P_c = 2\pi \cdot 8^2 + 2\pi \cdot 8 \cdot 6 = 128\pi + 96\pi = 224\pi.$$

Przykład 3

Obliczymy długość promienia podstawy walca, gdy jego pole powierzchni całkowitej wynosi 42π , a wysokość ma długość 4.

Rozwiązanie

$$P_c = 42\pi,$$

$$h = 4.$$

Niech r będzie długością promienia podstawy walca.

Do wyznaczenia wartości r wykorzystamy wzór na pole powierzchni całkowitej walca:

$$P_c = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Zatem:

$$42\pi = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot 4$$

$$42 = 2 \cdot r^2 + 2 \cdot r \cdot 4$$

$$r^2 + 4r - 21 = 0$$

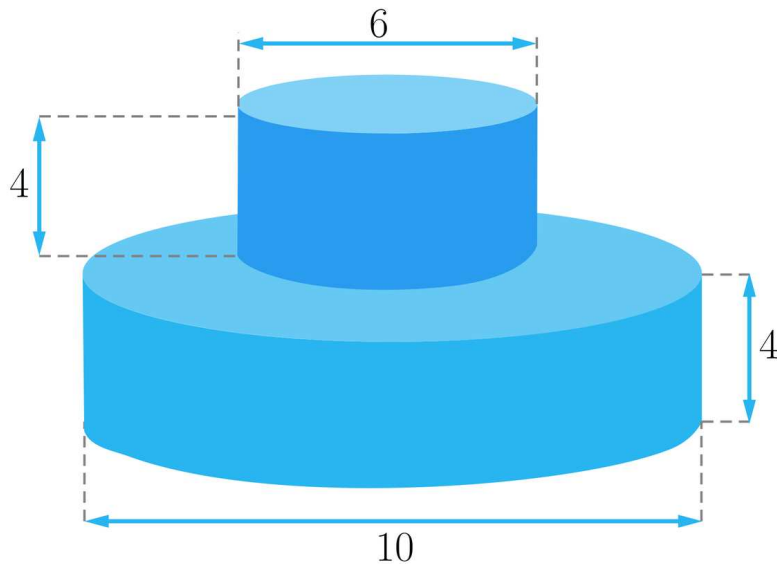
$$r_1 = \frac{-4-10}{2} = -7 < 0$$

$$r_2 = \frac{-4+10}{2} = 3 > 0.$$

Zatem promień podstawy walca jest równy 3.

Przykład 4

Obliczymy pole powierzchni całkowitej bryły o wymiarach, jak na rysunku.



Rozwiązanie

Zauważmy, że bryła z rysunku składa się z dwóch walców.

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

r_1 – długość promienia mniejszego walca,

r_2 – długość promienia większego walca,

h_1 – długość wysokości mniejszego walca,

h_2 – długość wysokości większego walca.

Z rysunku odczytujemy, że:

$$r_1 = 3,$$

$$r_2 = 5,$$

$$h_1 = h_2 = 4.$$

Wobec tego pole powierzchni całkowitej tej bryły obliczymy ze wzoru:

$$P_c = 2\pi r_1 \cdot h_1 + 2\pi r_2^2 + 2\pi r_2 \cdot h_2.$$

Zatem:

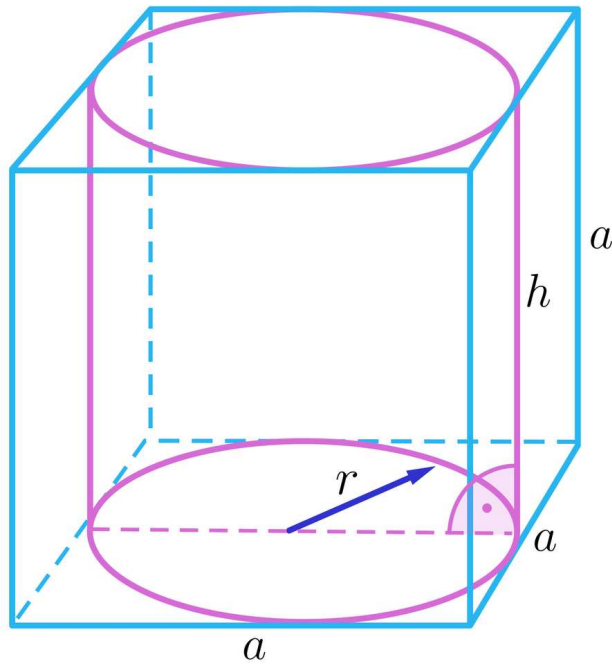
$$P_c = 2\pi \cdot 3 \cdot 4 + 2\pi \cdot 5^2 + 2\pi \cdot 5 \cdot 4 = 24\pi + 50\pi + 40\pi = 114\pi.$$

Przykład 5

W sześcián o przekątnej długości 9 wpisano walec. Obliczymy pole powierzchni całkowitej tego walca.

Rozwiązanie

Narysujmy walec wpisany w sześcián i wprowadźmy oznaczenia, jak na rysunku.



Zauważmy, że jeśli a jest długością krawędzi sześcianu, r długością promienia podstawy walca, a h długością jego wysokości, to zachodzą następujące zależności:

$$r = \frac{1}{2}a \text{ oraz } h = a.$$

Ponieważ przekątna sześcianu ma długość 9, zatem do wyznaczenia wartości a rozwiązujemy równanie:

$$9 = a\sqrt{3}$$

$$a = 3\sqrt{3}.$$

$$\text{Zatem } r = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ oraz } h = 3\sqrt{3}.$$

Wobec tego pole powierzchni całkowitej walca wynosi:

$$P_c = 2\pi \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2\pi \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{27}{2}\pi + 27\pi = \frac{81}{2}\pi.$$

Słownik

walec

bryła obrotowa, która powstaje przez obrót prostokąta wokół prostej zawierającej jeden bok

pole powierzchni

miara przyporządkowująca danej figurze liczbę nieujemną, charakteryzująca jej rozmiar

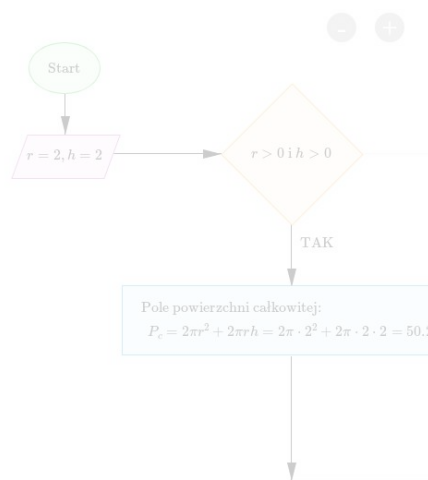
Schemat interaktywny

Polecenie 1

Przeanalizuj działanie schematu interaktywnego, a następnie wykonaj poniższe polecenie. Schemat można powiększać i zmniejszać za pomocą przycisków „+” i „-”, a także przesuwać za pomocą myszki.

Podaj długość promienia podstawy oraz długość wysokości walca:

$r = 2$
 $h = 2$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D4KO2020B>



Polecenie 2

Prostokąt o boku długości 7 i przekątnej długości 13 obracamy wokół osi przechodzącej przez środki dłuższych boków. Oblicz pole powierzchni całkowitej otrzymanego walca.

Polecenie 3

W poniższym schemacie przygotuj algorytm obliczający pole powierzchni całkowitej walca.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

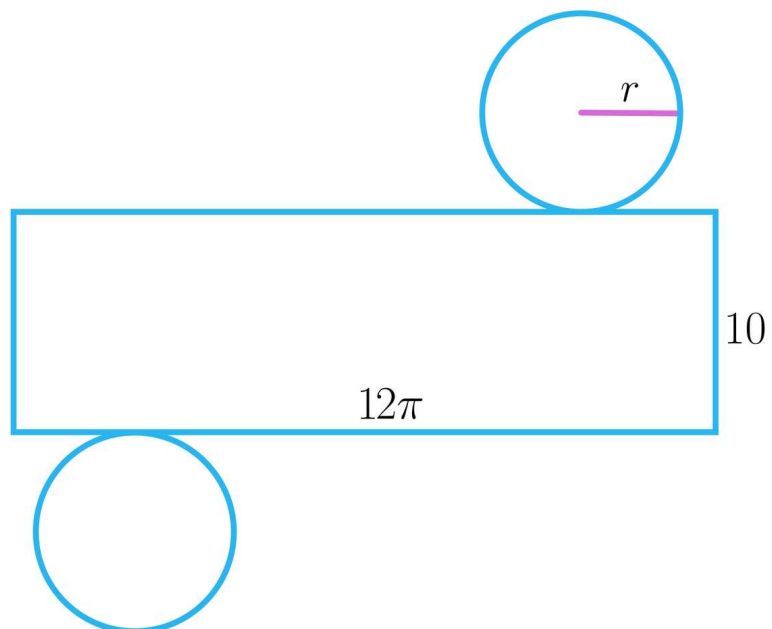
Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Na rysunku przedstawiono siatkę walca.

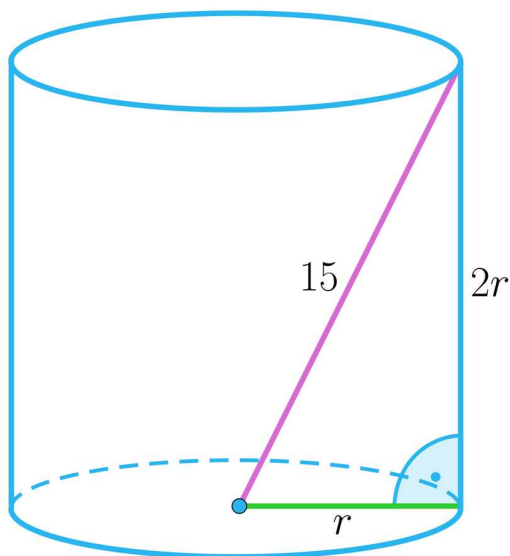


Ćwiczenie 3

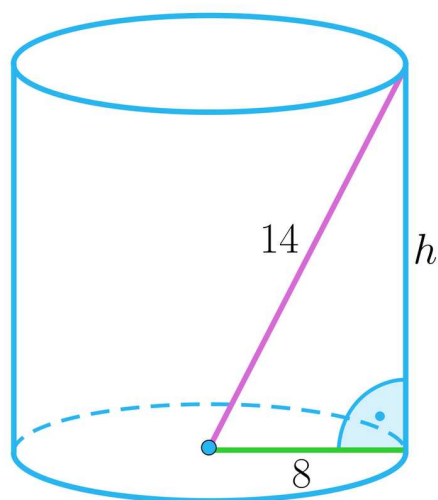


Na rysunkach 1 i 2 przedstawiono walce.

1



2



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Wiadomo, że iloczyn długości wysokości walca i średnicy jego podstawy jest równy 20, a ich stosunek długości wynosi 5 : 2.

Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca.

Ćwiczenie 7



Obliczymy pole powierzchni bocznej walca, gdy jego pole powierzchni całkowitej wynosi 480π , a wysokość ma długość 8.

Ćwiczenie 8



Długość średnicy podstawy walca i wysokości jest taka sama, a ich iloczyn jest równy P . Wyznacz pole powierzchni całkowitej tego walca.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Pole powierzchni walca

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

X. Stereometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wymienia podstawowe własności walca;
- określa wzory na pole powierzchni podstawy oraz pole powierzchni bocznej walca;
- oblicza pole powierzchni całkowitej walca;
- wykorzystuje wzór na pole powierzchni walca do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- metoda kota i myszy;
- burza mózgów;
- liga zadaniowa;

- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- komputery z dostępem do internetu dla uczniów.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat – „Pole powierzchni walca”, wskazuje cele zajęć oraz ustala z nimi kryteria sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Schemat interaktywny”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie wykonują pierwsze dwa ćwiczenia interaktywne z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy omawiane są na forum klasy i komentowane przez nauczyciela.
4. Kolejny etap to liga zadaniowa – uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają je na forum klasy.
5. Uczniowie wykonują kolejne ćwiczenia nr 6, 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się” metodą kot i mysz. Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po dwóch nieudanych próbach kot „łapie mysz”, która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej – role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem – procedura się powtarza.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Bryły obrotowe - walec](#)

Wskazówki metodyczne:

- Materiał w sekcji „Schemat interaktywny” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w zakresie obliczania pola powierzchni walca.