



## Pochodne funkcji elementarnych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



## Pochodne funkcji elementarnych

Źródło: Adrien Cesard, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

Wyznaczanie pochodnych funkcji bezpośrednio z definicji pochodnej może okazać się wymagające i czasochłonne. W matematyce istnieje pewien zestaw funkcji zwanych funkcjami elementarnymi, które wykorzystuje się do wyznaczania pochodnych bardziej skomplikowanych funkcji, ich złożań i odwrotności. Podczas tej lekcji poznasz wzory pozwalające szybko i efektywnie wyznaczyć pochodne pewnych funkcji.

### Twoje cele

- Sklasyfikujesz wzory pochodnych wybranych funkcji elementarnych.
- Na podstawie poznanych wzorów wyznacysz pochodne przykładowych funkcji elementarnych.

# Przeczytaj

---

Rozważmy funkcję  $f$  oraz argument  $x_0$ , w otoczeniu którego funkcja  $f$  jest określona. Przypomnijmy, iż pochodną funkcji  $f$  w punkcie  $x_0$ , oznaczaną symbolem  $f'(x_0)$ , definiujemy jako granicę właściwą [ilorazu różnicowego](#):

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Pochodną funkcji  $f$  w punkcie  $x_0$  możemy także zdefiniować jako granicę:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Oczywiście powyższe definicje są sobie równoważne, a w literaturze możesz spotkać obie z nich. Na potrzeby tego materiału będziemy stosować definicję drugą.

Wyznaczanie pochodnych funkcji bezpośrednio z definicji niejednokrotnie może okazać się wymagające i czasochłonne. Z pomocą przychodzą wzory ogólne pochodnych wybranych [funkcji elementarnych](#). Wzory te wyrażać będą ogólną postać pochodnej rozważanej funkcji  $y = f(x)$  w dowolnym punkcie  $x$ , w którym funkcja jest określona i różniczkowalna.

W trakcie tej lekcji poznasz wzory wyrażające pochodną funkcji stałej, pochodną funkcji potęgowej o wykładniku naturalnym, a także, ponadprogramowo, wzór wyrażający pochodną [logarytmu naturalnego](#).

## Pochodna funkcji stałej $f(x) = c, c \in \mathbb{R}$

Rozważmy funkcję stałą postaci  $f(x) = c$ , gdzie  $c$  jest dowolną liczbą rzeczywistą. Wówczas pochodna funkcji stałej w dowolnym punkcie  $x \in D_f$  wyraża się wzorem:

$$f'(x) = (c)' = 0.$$

### Dla zainteresowanych

Zauważ, że wyprowadzając pochodną funkcji  $f(x) = c$  bezpośrednio z definicji pochodnej, otrzymamy:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

### Przykład 1

Znajdziemy pochodną funkcji stałej  $y = 5$ . Zgodnie z wprowadzonym powyżej wzorem, dostaniemy  $y' = (5)' = 0$ .

### Przykład 2

Wyznamy pochodną funkcji stałej  $y = -\frac{1}{2}$ . Otrzymamy  $y' = \left(-\frac{1}{2}\right)' = 0$ .

## Pochodna funkcji potęgowej $f(x) = x^n$ dla $n \in \mathbb{N}$

### Przykład 3

Rozważmy funkcję potęgową  $y = x^2$  dla  $x \in \mathbb{R}$ . Chcemy wyznaczyć pochodną tej funkcji w dowolnym punkcie  $x \in \mathbb{R}$ . Skorzystamy najpierw bezpośrednio z definicji pochodnej. Otrzymamy:

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x. \end{aligned}$$

Zatem  $y' = (x^2)' = 2x$  dla dowolnego argumentu  $x \in \mathbb{R}$ .

Wprowadzimy teraz wzór ogólny wyrażający pochodną dowolnej funkcji potęgowej o wykładniku naturalnym. Pochodna funkcji potęgowej  $f(x) = x^n$ , gdzie  $x \in \mathbb{N}$ , dana jest wzorem:

$$f'(x) = (x^n)' = n \cdot x^{n-1}.$$

### Dla zainteresowanych

Aby uzasadnić powyższy wzór, skorzystamy z definicji pochodnej funkcji oraz z [dwumianu Newtona](#). Otrzymamy wówczas:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^k \right) - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left( \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \dots + \binom{n}{n} h^n \right) - x^n}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + n \cdot x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \dots + h^n - x^n}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( n \cdot x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot h + \dots + h^{n-1} \right) = n \cdot x^{n-1}. \end{aligned}$$

### Przykład 4

Rozważamy raz jeszcze funkcję  $y = x^2$ , której pochodną chcielibyśmy wyznaczyć korzystając z przedstawionego powyżej wzoru. Zauważamy, że zgodnie z powyższą postacią, wykładnik  $n = 2$ . Podstawiając  $n$  do wprowadzonego wzoru dostaniemy  $y' = (x^2)' = 2 \cdot x^{2-1} = 2x$ , tak jak w przykładzie 2.

### Przykład 5

Znajdziemy pochodną funkcji  $y = x^{17}$ . Stosując wzór na pochodną funkcji potęgowej, dla  $n = 17$ , otrzymamy  $y' = (x^{17})' = 17 \cdot x^{17-1} = 17x^{16}$ .

### Przykład 6

Wprowadzony powyżej wzór znajduje zastosowanie również w szczególnym przypadku, gdy dana jest funkcja  $y = x$  dla  $x \in \mathbb{R}$ . Wtedy wykładnik  $n = 1$ , więc pochodna funkcji będzie postaci

$$y' = (x)' = 1 \cdot x^{1-1} = 1.$$

## Pochodna logarytmu naturalnego $f(x) = \ln x$ dla $x \in \mathbb{R}^+$

Rozważmy funkcję logarymiczną postaci  $f(x) = \ln x$ , gdzie  $x \in \mathbb{R}^+$ . Pochodna logarytmu naturalnego dana jest wzorem:

$$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

## Podsumowanie

Reasumując, zaprezentowane pochodne wybranych funkcji elementarnych zapiszemy w poniższej tabeli.

Wzór funkcji $y = f(x)$	Pochodna $f'(x)$ funkcji $f$	Uwagi
$f(x) = c$	$(c)' = 0$	$c \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$n \in \mathbb{N}$
$f(x) = \ln x$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$x \in \mathbb{R}^+$

## Słownik

### iloraz różnicowy

to stosunek przyrostu wartości funkcji do przyrostu argumentu funkcji. Dla funkcji  $f: X \rightarrow Y$  oraz argumentów  $x_1, x_2 \in X$  iloraz różnicowy wyrażony jest jako

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

### funkcje elementarne

to funkcje, które możemy otrzymać z tak zwanych **podstawowych funkcji elementarnych** za pomocą skończonej liczby działań arytmetycznych, składania oraz odwracania funkcji. Do **podstawowych funkcji elementarnych** należą:

- funkcje stałe
- funkcje potęgowe
- funkcje wykładnicze
- funkcje logarymiczne
- funkcje trygonometryczne

### dwumian Newtona

jeśli  $x, y \in \mathbb{R}$ , to każdą naturalną potęgę dwumianu  $x + y$  możemy przedstawić w postaci sumy:

$$(x + y)^n = \binom{n}{0} \cdot x^n + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1}y + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot xy^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot y^n$$

lub krócej przy pomocy notacji sumacyjnej

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

### logarytm naturalny

to logarytm o podstawie  $e$  (liczba Eulera), gdzie  $e \approx 2,718281828$ . Logarytm naturalny oznaczany jest symbolem  $\ln$

# Infografika

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższą infografiką. Następnie wykonaj kolejne zadania.

## Polecenie 2

Wyznacz pochodne następujących funkcji:

- $f(x) = 40$ ,
- $g(x) = -7$ ,
- $h(x) = x^6$ ,
- $l(x) = x^{15}$ .

## Polecenie 3

Wyznacz pochodne następujących funkcji:

- $f(x) = x^{21}$ ,
- $g(x) = x^8$ ,
- $h(x) = \ln x$ .

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Wyznacz pochodne następujących funkcji:

- $f(x) = 2000$ ,
- $g(x) = x^8$ ,
- $h(x) = x^{27}$ .

Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Ćwiczenie 9



Korzystając bezpośrednio z definicji pochodnej funkcji, wyznacz pochodną funkcji  $f(x) = x^3$  w dowolnym punkcie  $x$ , w którym funkcja jest określona.

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Małgorzata Kruszelnicka

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Pochodne funkcji elementarnych

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy. Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- potrafi sklasyfikować wybrane funkcje elementarne
- wykorzystuje pojęcie ilorazu różnicowego
- stosuje poznane wiadomości do wyznaczania pochodnych wybranych funkcji elementarnych
- wyciąga wnioski na podstawie zrealizowanych przykładów

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm

**Metody i techniki nauczania:**

- odwrócona lekcja

- graffiti matematyczne
- sznurkowa pajęczynka

### **Formy pracy:**

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

### **Środki dydaktyczne:**

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- kartki A4, mazaki
- kłębek sznurka

### **Przebieg lekcji**

#### **Faza wstępna:**

1. Uczniowie w domu zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz przedstawia kryteria sukcesu.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Nauczyciel dzieli uczniów na małe grupy. Uczniowie wymieniają się informacjami pozyskanymi w domu. Metodą graffiti matematycznego sporządzają schematy zawierające wzory pochodnych wybranych funkcji elementarnych, które następnie prezentują na forum klasy.
2. Teraz każda grupa układa 4 zadania oparte na uzyskanych w domu wiadomościach – dwa zadania polegające na wskazaniu przykładów funkcji o pochodnej równej 0, dwa kolejne zadania wymagające wyznaczenia pochodnej funkcji potęgowej o wykładniku naturalnym.
3. Ułożone przez grupy zadania uczniowie rozwiązują wspólnie na tablicy.

#### **Faza podsumowująca:**

1. Liderzy grup dzielą się informacjami na temat pracy swojej grupy, prezentują pomysły, przedstawiają wątpliwości.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup.
3. Uczniowie metodą sznurkowej pajęczynki wybierają ucznia, który wniósł największy wkład w pracę grupy i całego zespołu klasowego (uczniowie rzucają kłębkami sznurka wzajemnie do siebie – wygrywa uczeń, który zbierze najwięcej „końców” sznurka).

#### **Praca domowa:**

Uczniowie wykonują w domu zadania z sekcji „Sprawdź się”.

**Materiały pomocnicze:**

[Pochodna funkcji](#)

**Wskazówki metodyczne:**

Infografikę można wykorzystać jako wstęp do zajęć, utrwalając w ten sposób wiadomości na temat pochodnych wybranych funkcji elementarnych.