

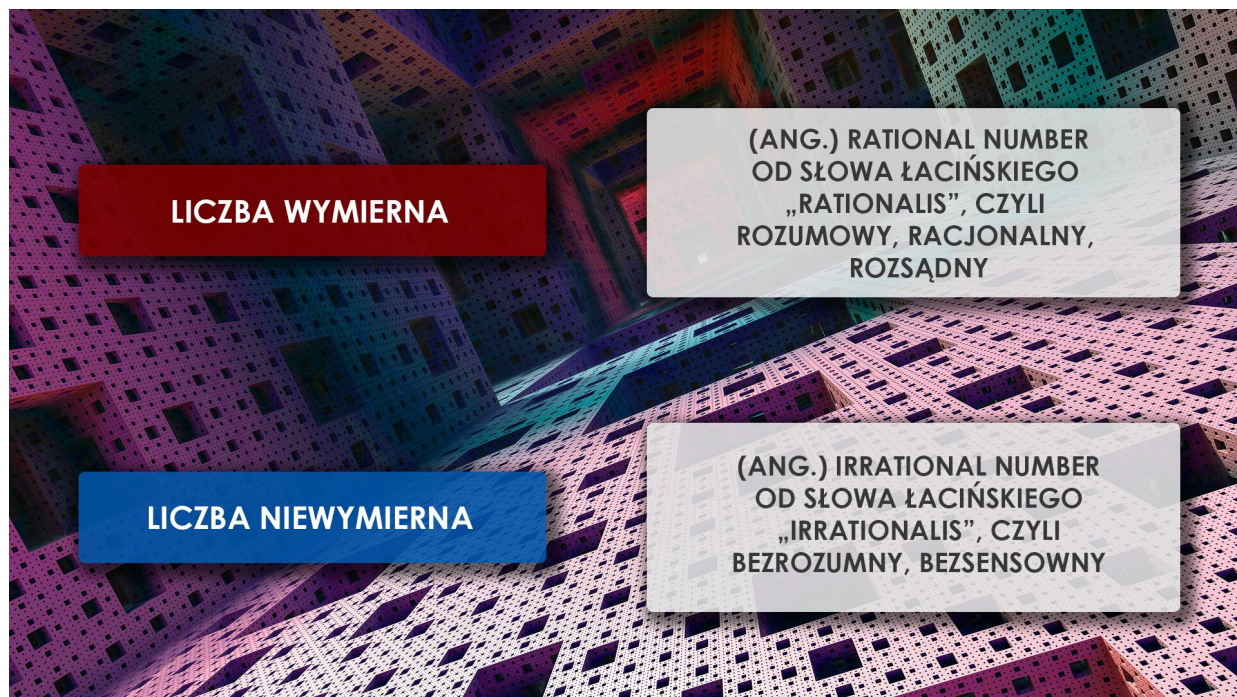
Ofiara Hippiazosa, czyli o tajemnicy liczb niewymiernych

Ofiara Hippazosa, czyli o tajemnicy liczb niewymiernych

Wstęp

Wiemy, że liczba wymierna to taka, którą można zapisać w postaci ilorazu dwóch liczb całkowitych, z których liczba przez którą dzielimy jest różna od zera. Są to więc liczby, które można przedstawić za pomocą ułamka zwykłego. Wiemy również, że liczba wymierna może mieć **rozwiniecie dziesiętne** skończone lub nieskończone okresowe. Starożytni pitagorejczycy uważali, że świat jest uporządkowany i racjonalny, gdyż rządzą nim liczby. Liczby wymierne. Bez nich wszystko byłoby bezkresne, niepojęte i chaotyczne. Odkrycie **liczb niewymiernych** spowodowało, że zachwiało się postrzeganie świata przez pitagorejczyków.





Źródło: Eduexpert Sp. z o.o. / Evaco Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Nauczysz się

1. sposobu znajdowania [rozwinęcia dziesiętnego](#) pierwiastka.

Cele edukacyjne zgodne z etapem kształcenia

1. przeprowadza proste rozumowania,
2. podaje argumenty uzasadniające poprawność rozumowania,
3. rozróżnia dowód od przykładu.

OFIARA HIPPAZOSA, CZYLI O TAJEMNICY LICZB NIEMIERNYCH - audiobook

1. Odkrycie liczb niewymiernych - wprowadzenie
2. Historia odkrycia liczb niewymiernych
3. Wartość $\sqrt{2}$
4. Podsumowanie

Notatka dla prowadzącego



Wskazówka

Podczas odsłuchiwania audiobooka, zwróć uwagę na sposób wyznaczania [rozwinienia](#) dziesiętnego $\sqrt{2}$.

Audiobook można wysłuchać pod adresem: <https://zpe.gov.pl/b/PPNOnFzBY>

Ofiara Hippazosa, czyli o tajemnicy liczb niewymiernych

Rozdział 1

Odkrycie liczb niewymiernych – wprowadzenie

Materiał przedstawia rozmowę matki z synem, wprowadzającą do historii odkrycia liczb niewymiernych

— Co oglądasz z takim zainteresowaniem?

— Znalazłem twój stary kalkulator. Bardzo proste urządzenie.

— W latach mojej młodości (a pamiętaj, że to były lata 80-te XX wieku) to był model zaawansowany.

— Serio?

— Tak. Spójrz na klawiaturę. Oprócz klawiszy oznaczonych cyframi od 0 do 9 i klawiszy z symbolami czterech podstawowych działań arytmetycznych, znajduje się tu klawisz, na którym zapisana jest liczba $\sqrt{2}$. To bardzo wygodne, gdyż po naciśnięciu klawisza wyświetla się przybliżona wartość tej liczby. A liczba $\sqrt{2}$ występuje w bardzo wielu wzorach matematycznych. Co ciekawe, jest to liczba niewymierna.

— Niewymierna?!

— Ajjj... Widzę, że musimy zacząć od początku. Posłuchaj interesującej historii.

Rozdział 2

Historia odkrycia liczb niewymiernych

Forma słuchowiska. Nagranie czytane przez lektora, opisujące historię odkrycia liczb niewymiernych.

Starożytni pitagorejczycy uważali, że porządkiem świata rządzą liczby. Bez nich zapanowałby chaos. To one kształtują rzeczywistość i poprzez odkrywanie ich obecności w świecie, możliwe jest poznanie wszystkiego. Pitagorejczycy rozumieli liczby nie jako abstrakcje, lecz przypisywali im przestrzenną wielkość i realny kształt.

Według legendy jeden ze zwolenników Pitagorasa, Hippazos z Metapontu, odkrył, że istnieją liczby, które nie są wymierne. Dowiódł on, że przekątna kwadratu o boku równym 1 jest liczbą, której nie da się wyrazić za pomocą ułamka zwykłego.

To zdumiewające odkrycie ogłosił w czasie przeprawy łodzią przez Morze Śródziemne. Legenda głosi, iż jego towarzysze tak się zdenerwowali, że wyrzucili go za burtę i

nieszczęśnik utonął. Bardziej prawdopodobne natomiast jest, że został po prostu wykluczony z grona zwolenników zgromadzonych wokół Pitagorasa.

Pitagorejczycy nie byli zadowoleni z odkrycia Hippazosa. Te dziwne liczby, których nie można było wyrazić żadnym dotychczas znanym systemem liczbowym, nazwano niewyrażalnymi – „alogoj”. Odkrycie tych liczb rujnowało ich pogląd, że świat opiera się na liczbach – przez które rozumieli liczby całkowite. Ułamki – będące stosunkiem liczb całkowitych – zupełnie dobrze wpasowały się w ten światopogląd. Liczba odkryta przez Hippazosa z Metapontu, dzisiaj określana jako pierwiastek z dwóch, takim ułamkiem nie była.

Na skutek utrzymywania tego odkrycia w tajemnicy, nastąpił rozłam wśród pitagorejczyków. Jedni domagali się wymiany informacji i odtajnienia wyników badań i odkryć, inni dążyli do zachowania odkrycia w tajemnicy.

Rozdział 3

Wartość $\sqrt{2}$

Kontynuacja rozmowy matki z synem na temat liczby $\sqrt{2}$. Próba policzenia rozwinięcia dziesiętnego liczby $\sqrt{2}$.

– Z tego co usłyszałem wynika, że $\sqrt{2}$ to pierwsza znana liczba, która nie była liczbą wymierną.

– Prawdopodobnie tak. Dzisiaj liczby, których nie można przedstawić w postaci ilorazu dwóch liczb całkowitych, nazywamy niewymiernymi. $\sqrt{2}$ to właśnie taka liczba. Spróbujmy znaleźć kilka początkowych cyfr rozwinięcia dziesiętnego $\sqrt{2}$.

– To użyjmy do obliczeń kalkulatora, którym posługiwałaś się w młodości. Od czego zaczniemy?

– Zaczniemy od oszacowania wielkości tej liczby. $\sqrt{2}$ jest większy od $\sqrt{1}$, a zarazem mniejszy od $\sqrt{4}$, bo liczba 2 jest większa od 1 i mniejsza od 4. Zapisz odpowiednią nierówność podwójną.

– Zrobione.

– A jaka jest wartość $\sqrt{1}$ oraz wartość $\sqrt{4}$?

– Wiem! 1 i 2.

- Znakomicie. Zapisz, tak jak poprzednio, odpowiednią nierówność. Powiedz, co zauważasz.
- Teraz widzę, że $\sqrt{2}$ jest liczbą większą od 1, a jednocześnie mniejszą od 2.
- Znakomicie. Spróbujmy zobaczyć, jaka liczba większa od 1 i mniejsza od 2, podniesiona do kwadratu będzie najbliższa liczbie 2. Zaczynaj liczyć, proszę.
- Dobrze. Liczbą większą od liczby 1 jest liczba 1,1. Podnoszę tę liczbę do kwadratu. Następnie podnoszę do kwadratu kolejną liczbę, czyli 1,2. I tak dalej...
- I przydał się kalkulator?
- O tak.
- I jakie otrzymałeś wyniki? Czy coś już możesz powiedzieć o wartości $\sqrt{2}$?
- Zauważyłem, że liczba $\sqrt{2}$ jest większa od liczby 1,4 i mniejsza niż liczba 1,5.
- Dlaczego?
- Bo liczba 1,4 podniesiona do kwadratu to 1,96, liczba 1,5 podniesiona do kwadratu jest większa od dwóch, bo jest równa 2,25.
- Znakomicie. Co proponujesz dalej?
- Wyznamy następne cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczby $\sqrt{2}$.
- Co otrzymałeś?
- Okazuje się, że $\sqrt{2}$ jest większy od liczby 1,41, a mniejszy od liczby 1,42. Kwadrat liczby 1,42 i jest już większy od liczby 2.
- Brawo. Czyli już wiesz, jak można obliczyć kolejne cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczby $\sqrt{2}$?
- Tak. Należy dodawać kolejne cyfry po przecinku do liczby 1,41 i poprzez podniesienie do kwadratu tak otrzymanych liczb, sprawdzać, która z nich jest najbliższa liczbie 2. Fajna zabawa. Policzę jeszcze kilka kolejnych liczb. Dzięki za kalkulator.

Rozdział 4

Podsumowanie

W rozmowie z synem, matka opowiada o próbach obliczenia wartości liczby $\sqrt{2}$.

– Już obliczyłem do czwartego miejsca po przecinku wartość $\sqrt{2}$. A ile jest wszystkich cyfr po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby $\sqrt{2}$?

– Rozwinięcie dziesiętne $\sqrt{2}$ jest nieskończone. Jeśli będziemy liczyć dalej, nie odkryjemy żadnej powtarzalności wśród znalezionych kolejnych cyfr. Czyli rozwinięcie dziesiętne liczby $\sqrt{2}$ jest nieskończone i nieokresowe. Zatem jest to liczba niewymierna.

– Czyli wobec tego, w jaki sposób zapisać liczbę $\sqrt{2}$ w postaci dziesiętnej?

– Możemy podać wartość przybliżoną tej liczby, na przykład z dokładnością do szóstego miejsca po przecinku. Ta wartość to: 1,414214. A na koniec ciekawostka. W jednym z czasopism matematycznych, w 1887 roku, podano aż 520 cyfr po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby $\sqrt{2}$. W 1971 roku znano już ponad milion cyfr po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby $\sqrt{2}$.

– Twój kalkulator pokazuje osiem cyfr po przecinku. Czy taka dokładność wystarczała do obliczeń w twoich projektach?

– O tak. Ten sprzęt był moim nieocenionym pomocnikiem.

Źródło: Eduexpert Sp. z o.o. / Evaco Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Polecenie 1

Czy znasz wzory matematyczne, fizyczne, w których występuje $\sqrt{2}$ lub inna **liczba niewymierna**? Odszukaj kilka z nich w Internecie.

Polecenie 2

Znajdź w Internecie informacje o szkole pitagorejskiej i jej przedstawicielach.

Polecenie 3

Czy przez drzwi o wymiarach 1 m na 2 m można wnieść okrągłe lustro o średnicy 2,25 m?

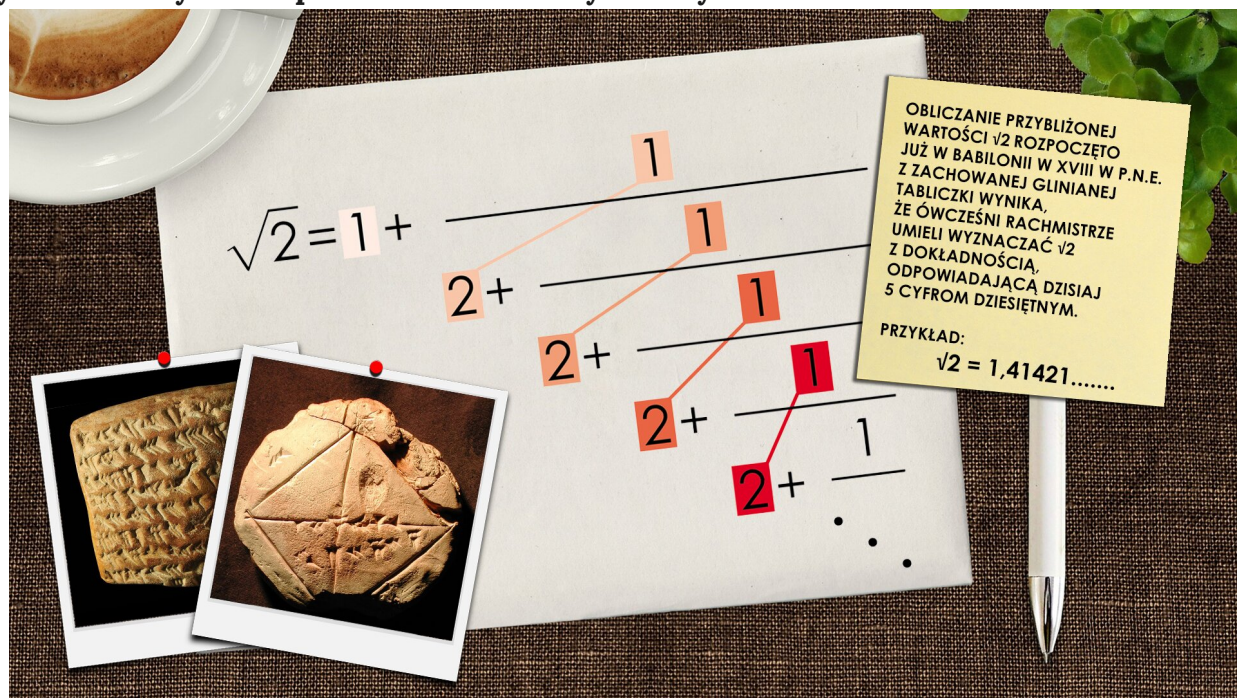
Podsumowanie

W 1887 roku opublikowano w jednym z czasopism matematycznych 520 cyfr po przecinku **rozwinienia dziesiętnego** liczby $\sqrt{2}$. Natomiast w 1951 roku profesor Horace Uhler, fizyk amerykański, odkrył 1542 cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby $\sqrt{2}$.

O pierwszym znaczącym rekordzie komputerowym prasa doniosła w roku 1971 – Jacques Dutka z Columbia University znalazł ponad milion cyfr po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby $\sqrt{2}$.

Rozwinięcie dziesiętne $\sqrt{2}$ podajemy, zapisując cyfry do pewnego miejsca, na przykład:
 $\sqrt{2} = 1,414213562373095048801688724209698...$

Nie sposób przewidzieć dalszego układu cyfr zastąpionych wielokropkiem. Dotyczy to oczywiście wszystkich pierwiastków niewymiernych.



Źródło: Eduexpert Sp. z o.o. / Evaco Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Praca domowa

Polecenie 4.1

Wyznacz 5 cyfr po przecinku rozwinięcia dziesiętnego $\sqrt{3}$.

Zadania

Ćwiczenie 1

Dopasuj do odpowiedniej kategorii.

LICZBY WYMIERNE

-5,4

$\sqrt[3]{8}$

6,3

2,(6)

$\sqrt{2}$

$\sqrt{9}$

10,4

$\sqrt[3]{-27}$

$\sqrt{29}$

$\sqrt{4}$

LICZBY NIEWYMIERNE

Źródło: Eduexpert Sp. z o.o. / Evaco Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2

Uzupełnij luki w tekście podanymi słowami.

Źródło: Eduexpert Sp. z o.o. / Evaco Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3

Oceń prawdziwość informacji. Zaznacz czy zdanie jest prawdziwe czy fałszywe.

	Prawda	Fałsz
$\sqrt{2} = 2$	☐	☐
Pitagoras urodził się przed naszą erą.	☐	☐
Liczba $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną.	☐	☐
Przybliżenie $\sqrt{2}$ do dwóch miejsc po przecinku jest równe 1,42.	☐	☐
Według legendy jeden ze zwolenników Pitagorasa, Hippazos z Metapontu, odkrył, że istnieją liczby, które nie są wymierne.	☐	☐
Długość przekątnej kwadratu o boku równym 2 wynosi $4\sqrt{2}$	☐	☐
$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$	☐	☐
Liczby niewymierne tworzą wraz z liczbami wymiernymi zbiór liczb rzeczywistych.	☐	☐

Źródło: Eduexpert Sp. z o.o. / Evaco Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Słowniczek

Liczba niewymierna

liczba rzeczywista niebędąca liczbą wymierną. Rozwinięcie dziesiętne liczby niewymiernej jest nieskończone i nieokresowe.

Rozwinięcie dziesiętne

sposób przedstawiania liczb rzeczywistych w postaci ułamka dziesiętnego. Ułamek ten może być skończony, nieskończony okresowy lub nieskończony nieokresowy.