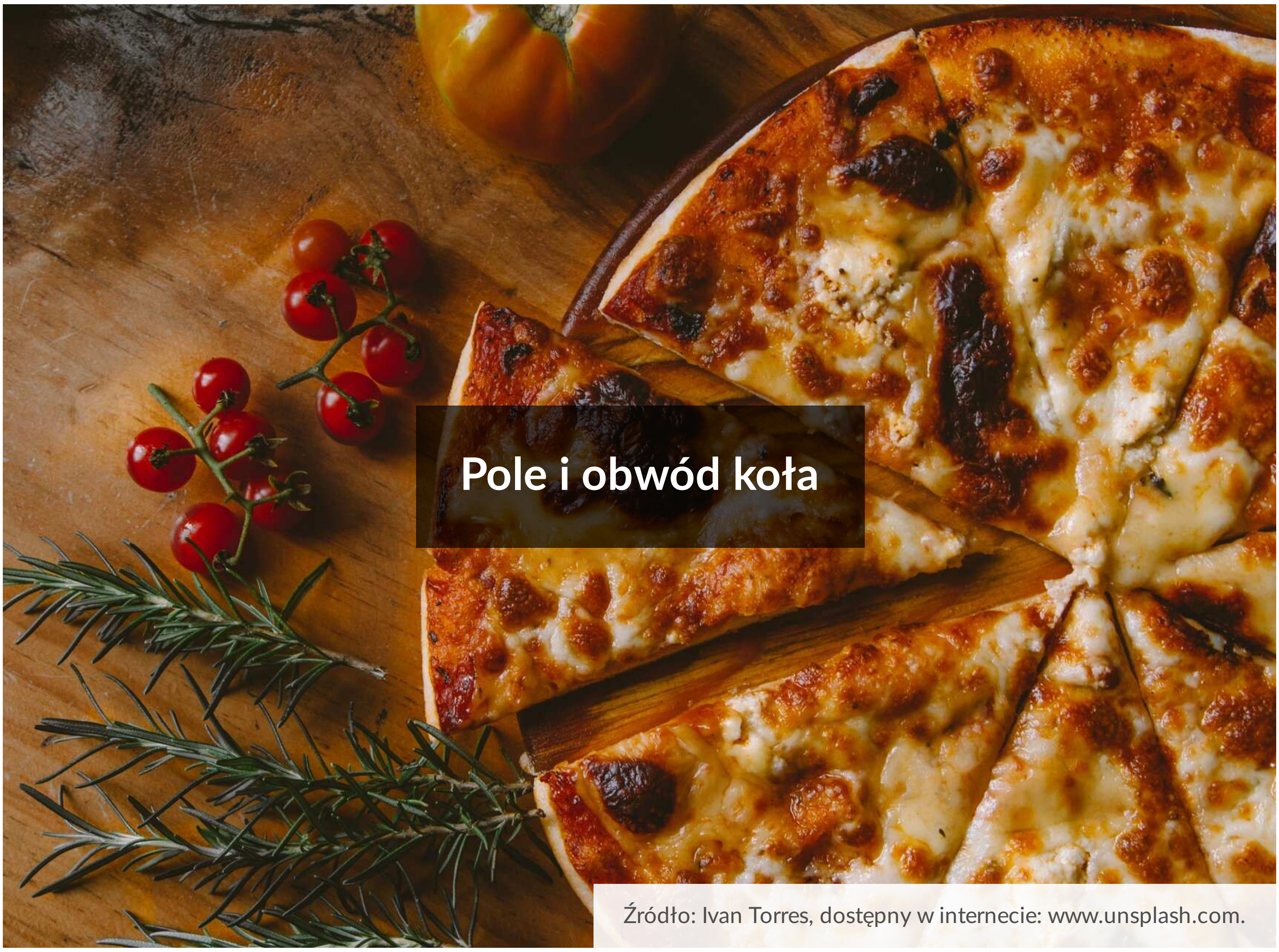
Pole i obwód koła



Pole i obwód koła

Źródło: Ivan Torres, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Ile obrotów wykonuje koło rowerowe, jeżeli kolarz ma do pokonania podczas wyścigu Tour de Pologne 2020 trasę $891,3\ \text{km}$? Którą pizzę wybrać, aby zjeść jak najwięcej, a zapłacić jak najmniej? Odpowiedzi na te pytania znajdują się właśnie w lekcji dotyczącej obliczania pola i obwodu koła oraz zastosowania poznanych wzorów do rozwiązywania zagadnień z życia codziennego.

Twoje cele

- Poznasz wzory na obliczanie pola i obwodu koła.
- Wykorzystasz poznane wzory do rozwiązywania zadań.
- Obliczysz pola i obwody figur złożonych z kół.
- Ocenisz swoją wiedzę, rozwiązując zestaw ćwiczeń interaktywnych.

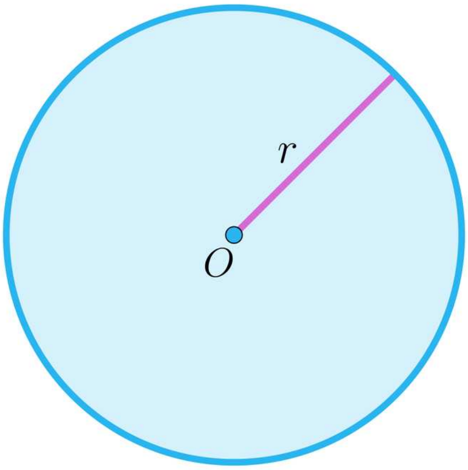
Przeczytaj

Koło na płaszczyźnie

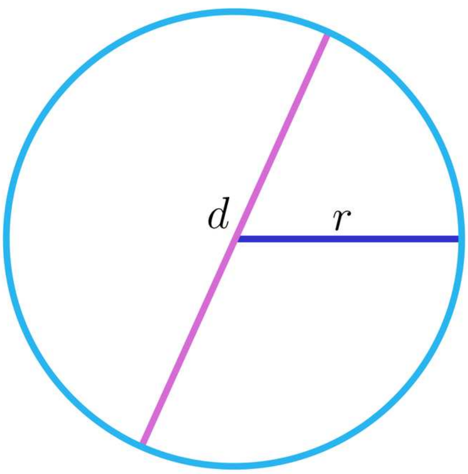
Przypomnijmy definicję koła na płaszczyźnie.

> **Definicja: koło**
>
> Kołem o środku w punkcie O i promieniu r nazywamy zbiór punktów płaszczyzny, których odległości od punktu O są mniejsze lub równe r.

Na poniższym rysunku przedstawiono koło o środku w punkcie O i promieniu r.



Jeżeli przez r oznaczymy długość promienia koła, to obwód l i pole P koła wyrażamy za pomocą wzorów:



$$l = 2\pi \cdot r$$
$$P = \pi \cdot r^2$$

Średnica d koła jest dwa razy większa od długości promienia koła r, więc zachodzi zależność $d = 2r$.

Przykład 1

Obliczymy obwód i pole koła, jeżeli jego średnica ma długość 12 cm.

Rozwiązanie:

Z treści zadania wiemy, że $d = 12 \text{ cm}$.

Ponieważ $d = 2r$, zatem do wyznaczenia długości promienia r rozwiązujemy równanie:

$2r = 12$, czyli $r = 6 \text{ cm}$.

Zatem:

$l = 2\pi \cdot 6 \text{ cm} = 12\pi \text{ cm}$,

$P = \pi \cdot (6 \text{ cm})^2 = 36\pi \text{ cm}^2$.

Ponieważ $r = \frac{d}{2}$, zatem obwód i pole koła możemy zapisać za pomocą wzorów:

$l = 2\pi \cdot r = 2\pi \cdot \frac{d}{2} = \pi \cdot d$,

$P = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \cdot \frac{d^2}{4}$.

Przykład 2

Obliczymy obwód i pole koła, jeżeli jego średnica ma długość 10 cm.

Rozwiązanie:

Z treści zadania wiemy, że $d = 10 \text{ cm}$. Otrzymujemy więc:

$l = \pi \cdot 10 \text{ cm} = 10\pi \text{ cm}$,

$P = \pi \cdot \left(\frac{10}{2} \text{ cm}\right)^2 = 25\pi \text{ cm}^2$.

Przykład 3

Obliczymy:

a) pole koła o obwodzie 30π,

b) obwód koła o polu 144π.

Rozwiązanie:

Ad a) Z zadania wynika, że $l = 30\pi$.

Zatem $2\pi \cdot r = 30\pi$, czyli $r = 15$.

Obliczamy pole koła:

$P = \pi \cdot 15^2 = 225\pi$.

Ad b) Z zadania wynika, że $P = 144\pi$.

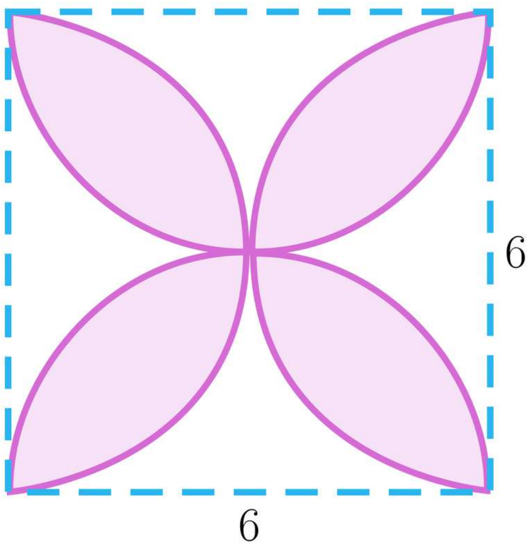
Zatem $\pi \cdot r^2 = 144\pi$, czyli $r = 12$.

Obliczamy obwód koła:

$l = 2\pi \cdot 12 = 24\pi$.

Przykład 4

Obliczymy obwód „czterolistnej koniczyny” z rysunku.



Zauważmy, że wystarczy obliczyć obwody dwóch kół.

Z rysunku możemy odczytać, że średnica jednego koła ma długość 6, zatem promień ma długość 3.

Szukany obwód wynosi:

$l = 2 \cdot 2\pi \cdot 3 = 12\pi$.

Przykład 5

Obliczymy, ile pełnych obrotów wykona koło rowerowe o średnicy 28 cali podczas wyścigu Tour de Pologne na trasie $891,3\ \text{km}$. Do obliczeń przyjmiemy, że $1\ \text{cal} = 2,54\ \text{cm}$ oraz $\pi = 3,14$.

Z zadania wynika, że:

$d = 28\ \text{cal} = 28 \cdot 2,54\ \text{cm} = 71,12\ \text{cm}$.

Zatem obwód koła wynosi:

$l = \pi \cdot 71,12\ \text{cm} = 3,14 \cdot 71,12\ \text{cm} = 223,3168\ \text{cm}$.

Po zamianie długości wyścigu z kilometrów na centymetry, mamy:

$891,3\ \text{km} = 89130000\ \text{cm}$.

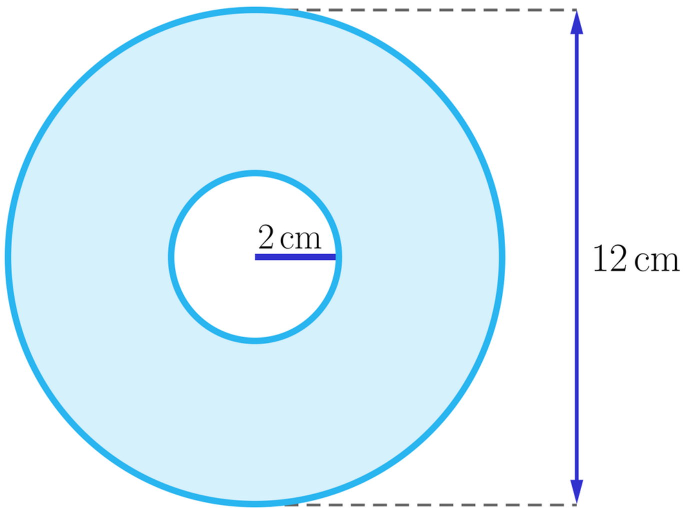
Zatem liczba obrotów, jaką musi wykonać koło rowerowe, wynosi:

$89130000 : 223,3168 \approx 399120$.

Na trasie wyścigu koło rowerowe wykona 399120 pełnych obrotów.

Przykład 6

Wyznaczymy pole pierścienia kołowego z rysunku:



Do wyznaczenia pola pierścienia kołowego wystarczy obliczyć pole koła o średnicy 12, a następnie odjąć od niego pole koła o promieniu 2, czyli $P = P_1 - P_2$.

Wprowadźmy oznaczenia:

$r_1 = \frac{12}{2}\text{cm} = 6\ \text{cm}$ oraz $r_2 = 2\ \text{cm}$.

Zatem:

$P_1 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi \text{ cm}^2$,

$P_2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi \text{ cm}^2$.

Pole pierścienia kołowego wynosi:

$P = 36\pi \text{ cm}^2 - 4\pi \text{ cm}^2 = 32\pi \text{ cm}^2$.

Przykład 7

Obliczymy, o ile procent zmieni się pole koła, jeżeli jego średnicę wydłużymy o 20%.

Wprowadźmy oznaczenia:

d_1 – średnica koła przed wydłużeniem,

P_1 – pole koła o średnicy d_1,

d_2 – średnica koła po wydłużeniu,

P_2 – pole koła o średnicy d_2.

Zatem:

$d_2 = 120\% \cdot d_1 = 1,2d_1$

$P_1 = \pi \cdot \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = \frac{{d_1}^2}{4}\pi$

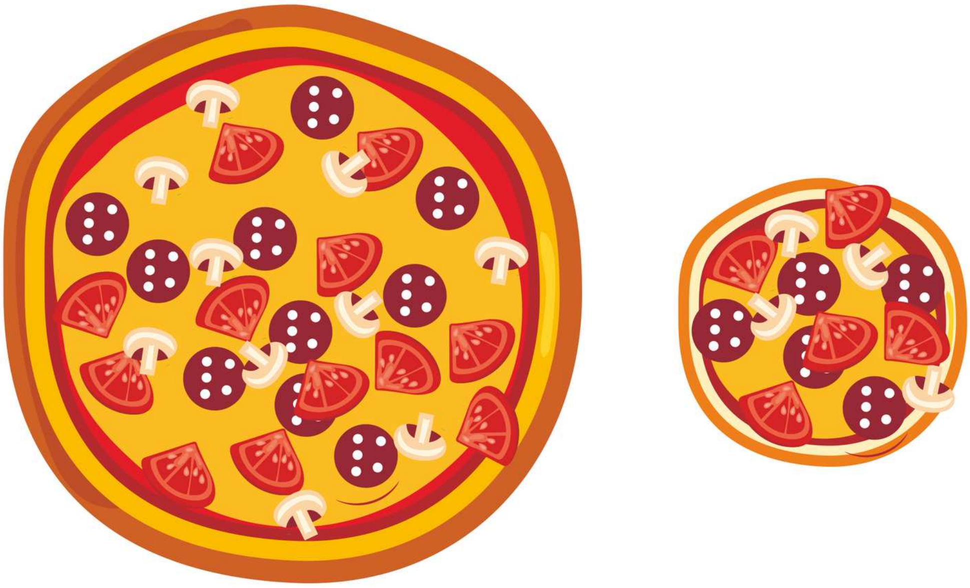
$P_2 = \pi \cdot \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = \pi \cdot \left(\frac{1{,}2d_1}{2}\right)^2 = \pi \cdot \frac{9}{25}{d_1}^2$

$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\pi \cdot \frac{9{d_1}^2}{25}}{\pi \cdot \frac{{d_1}^2}{4}} = \frac{36}{25} = 144\%$.

Ponieważ pole P_2 stanowi 144% pola P_1, zatem pole koła po zwiększeniu jego średnicy o 20% zwiększyło się o 44%.

Przykład 8

Który wariant zamówienia pizzy jest bardziej opłacalny?



I: duża pizza o promieniu $50\ \text{cm}$ za 38 zł,

II: mała pizza o promieniu $25\ \text{cm}$ za 19 zł.

Wprowadźmy oznaczenia:

$r_1 = 50\ \text{cm}$,

$r_2 = 25\ \text{cm}$.

Zatem

$P_1 = \pi \cdot (50\ \text{cm})^2 = 2500\pi\ \text{cm}^2$,

$P_2 = \pi \cdot (25\ \text{cm})^2 = 625\pi\ \text{cm}^2$.

Zauważmy, że $P_1 = 4 \cdot P_2$, a cena dużej pizzy jest 2 razy większa od ceny małej pizzy, zatem bardziej opłacalny jest zakup dużej pizzy.

Słownik

koło

zbiór punktów płaszczyzny odległych o nie więcej niż ustaloną długość od punktu nazywanego środkiem koła

Gra edukacyjna

Polecenie 1

Uruchom grę, a następnie wykonaj poniższe polecenie.

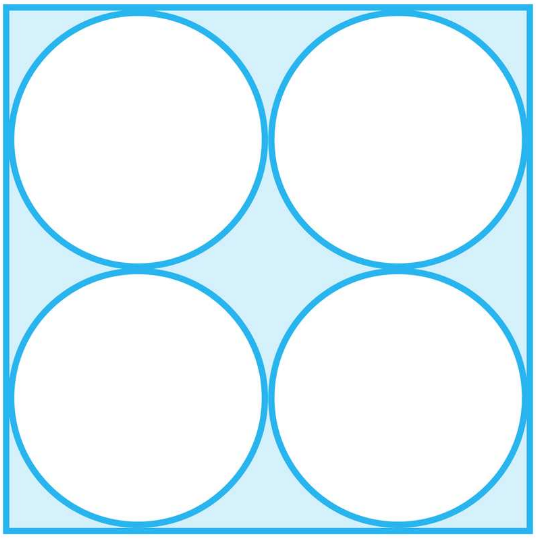
Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DnZ46dqYy

Polecenie 2

W kwadracie o boku 8 umieszczono 4 jednakowe koła, styczne do boków kwadratu, jak na poniższym rysunku.

a) Oblicz pole zacieniowanej części kwadratu.

b) Jaki procent całego pola kwadratu stanowi suma pól tych 4 kół? Do obliczeń przyjmij, że $\pi = 3,14$.



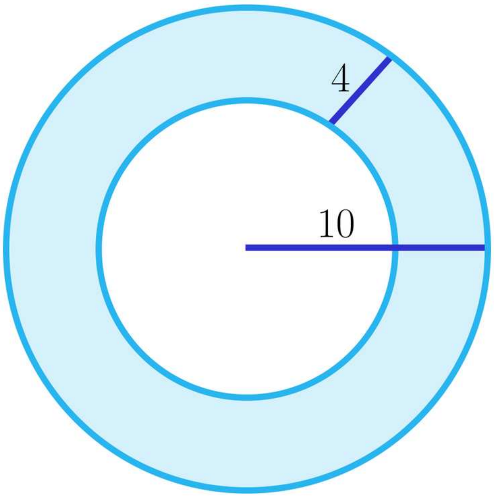
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Na rysunku przedstawiono pierścień kołowy.



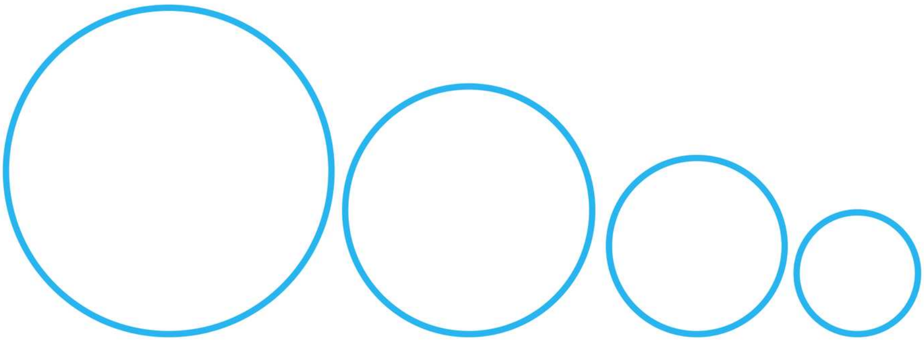
Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

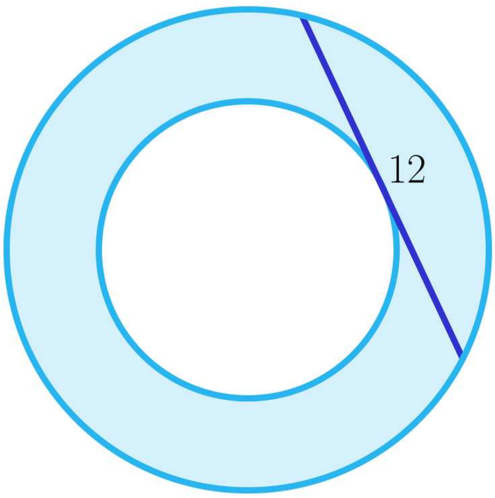
Na rysunku dane są 4 koła. Największe koło ma promień o długości r, a długość promienia każdego następnego koła jest 2 razy krótsza od długości promienia poprzedniego koła. Wiemy, że suma pól tych kół wynosi $\frac{85}{64}\pi$. Wyznacz długość promienia najmniejszego koła.



Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

W pierścieniu kołowym z rysunku, cięciwa większego koła ma długość 12 i jest styczna do mniejszego koła. Uzasadnij, że pole pierścienia można wyrazić bez użycia długości promieni wyznaczających go kół.



Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Pole i obwód koła

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
VIII. Planimetria. Zakres podstawowy. Uczeń:
6) stosuje wzory na pole wycinka koła i długość łuku okręgu;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa wzory na obliczanie pola i obwodu koła;
- wykorzystuje poznane wzory do rozwiązywania zadań;
- oblicza pola i obwody figur złożonych z kół;
- stosuje różne strategie rozwiązywania zadań.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- z użyciem e-podręcznika;
- gra dydaktyczna;
- burza mózgów.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- komputery z dostępem do internetu dla uczniów.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przedstawienie tematu zajęć: „Pole i obwód koła” oraz wspólne z uczniami ustalenie kryteriów sukcesu.
2. Nauczyciel prosi o przygotowanie w parach pytań związanych z tematem. Czego się uczniowie chcą dowiedzieć? Co ich interesuje w związku z tematem lekcji?

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie zapoznają się z treścią w sekcji „Przeczytaj” i zapisują w zeszycie minimum dwa pytania. Następnie nauczyciel dzieli uczniów na dwie grupy. Grupy na przemian zadają przygotowane wcześniej pytania grupie przeciwnej, która udziela odpowiedzi. Nauczyciel uzupełnia wyjaśnienia.
2. Uczniowie w parach biorą udział w grze w sekcji „Gra edukacyjna”. W ten sposób utrwalają zdobyte wiadomości na temat pola i obwodu koła.
3. Uczniowie wykonują pierwsze dwa ćwiczenia interaktywne z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy omawiane są na forum klasy i komentowane przez nauczyciela.
4. Kolejne ćwiczenia, nr 3-5 w sekcji „Sprawdź się”, uczniowie wykonują w tych samych parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi, zapisują problemy, które napotkali podczas rozwiązywania zadań.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

1. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 6-8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- Pole koła.

Wskazówki metodyczne:

- „Gra edukacyjna” można zostać wykorzystana jako powtórzenie przed kartkówką lub do realizacji tematu „Okrąg, koło i ich elementy”.