



Dwusieczne kątów trójkąta

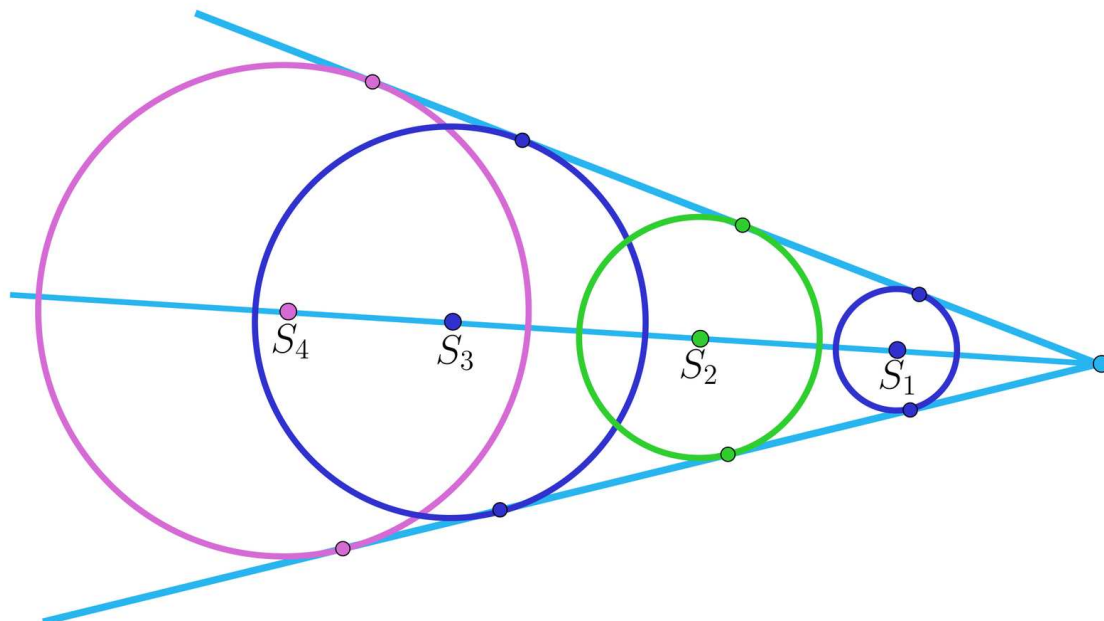
- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Aplet
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

An abstract geometric image featuring a large triangle with a light blue interior and dark grey exterior. Several lines, some dark and some light, intersect within the triangle, creating a complex pattern of smaller shapes and shadows. The overall composition is dynamic and geometric.

Dwusieczne kątów trójkąta

Źródło: Evgeny Tkachenko, dostępny w internecie: www.unsplash.com, domena publiczna.

Wiemy, że dwusieczną kąta nazywamy półprostą, której początkiem jest wierzchołek tego kąta i która dzieli ten kąt na dwa równe kąty. Z pewnością znasz twierdzenie, które orzeka, że jeżeli punkt leży na dwusiecznej kąta wypukłego, to jest on równo oddalony od ramion tego kąta. Tym samym miejscem geometrycznym środków okręgów wpisanych w dany kąt jest oczywiście dwusieczna tego kąta.



W tym materiale połączymy własności dwusiecznej kąta z własnościami kątów wielokątów.

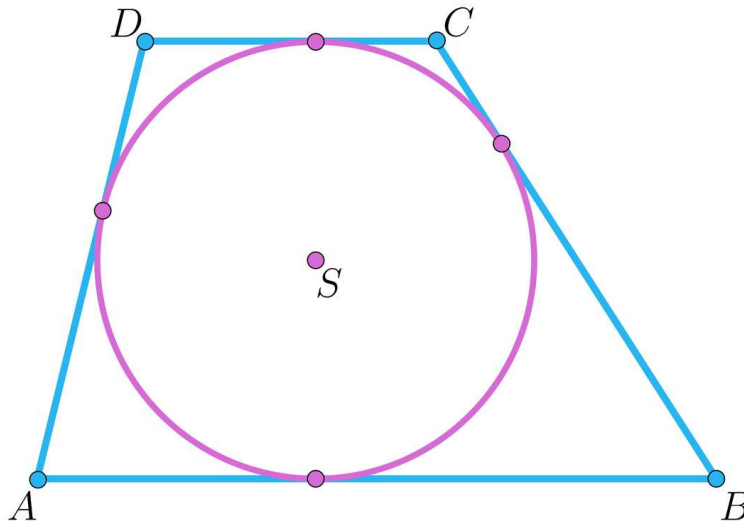
Twoje cele

- Poznasz twierdzenie o okręgu wpisanym w trójkąt.
- Udowodnisz twierdzenie o przecinaniu się dwusiecznych kątów trójkąta.
- Zastosujesz własności dwusiecznych do wyznaczania związków miarowych w czworokątach.
- Zastosujesz poznane zależności w sytuacjach typowych i problemowych.

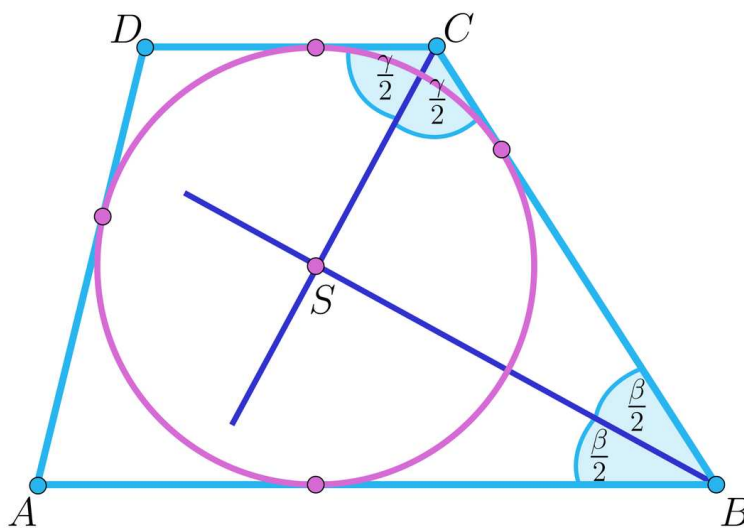
Przeczytaj

Okrąg wpisany w wielokąt

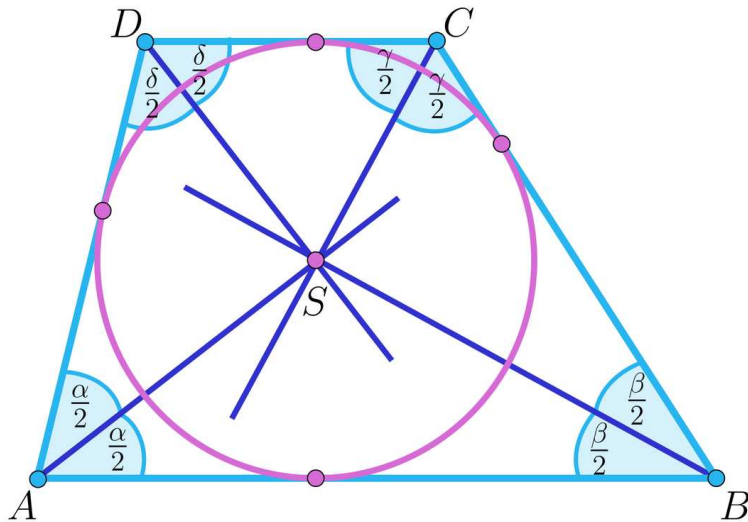
Rozważmy najpierw trapez $ABCD$, w który można wpisać okrąg.



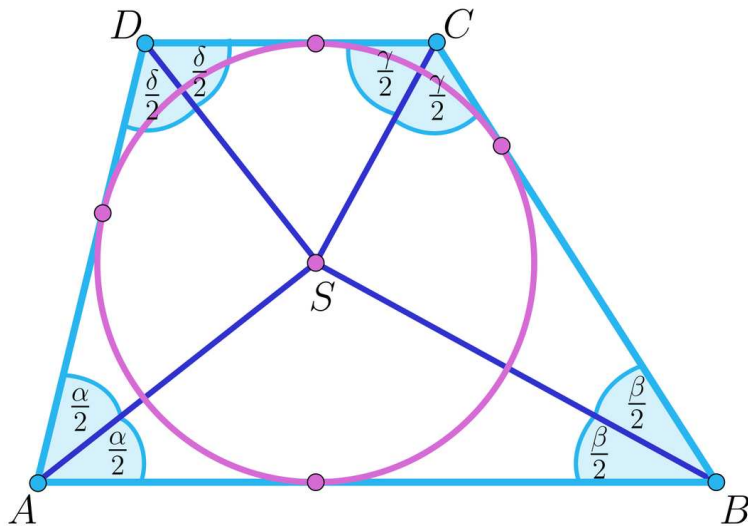
Zastanówmy się, gdzie leży środek tego okręgu. Ponieważ okrąg jest styczny do ramion kąta ABC , więc środek S tego okręgu leży na dwusiecznej kąta ABC . Okrąg jest też styczny do ramion kąta BCD , więc środek S leży na dwusiecznej kąta BCD . Zatem S jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów ABC i BCD .



To samo rozumowanie prowadzi nas do wniosku, że środek S jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów trapezu $ABCD$.



Zauważmy jeszcze, że trójkąty BCS i ADS są prostokątne, a punkt S jest wierzchołkiem kąta prostego w każdym z nich.



Rzeczywiście, ponieważ proste AB i CD są równoległe, to suma kątów jednostronnych wewnętrznych ABC i BCD jest równa 180° .

Zatem $\beta + \gamma = 180^\circ$.

Stąd $\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ$, czyli $|\angle SBC| + |\angle SCB| = 90^\circ$.

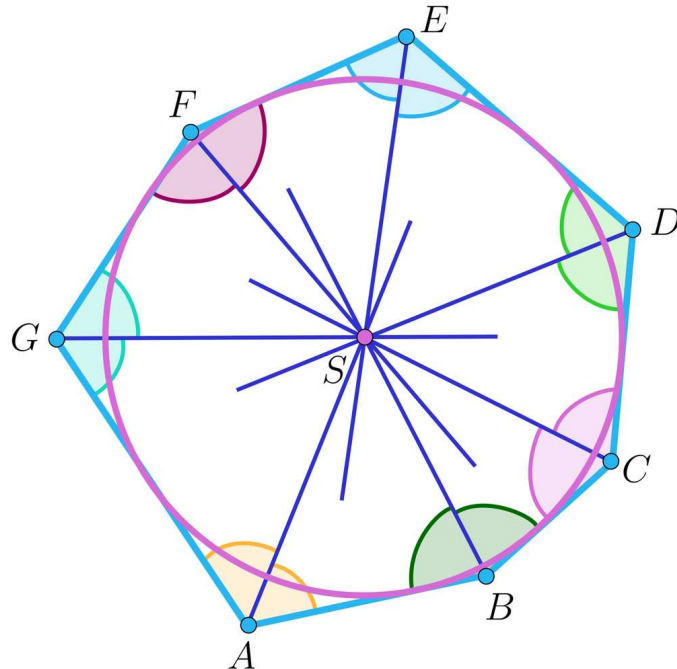
Zatem z twierdzenia o sumie kątów wewnętrznych trójkąta otrzymujemy

$$|\angle BSC| = 180^\circ - (|\angle SBC| + |\angle SCB|) = 90^\circ.$$

Rozważmy teraz dowolny wielokąt wypukły, w który można wpisać okrąg. Rozumując w ten sam sposób, jak w przypadku trapezu stwierdzamy, że dwusieczne wszystkich kątów wewnętrznych tego wielokąta przecinają się w jednym punkcie. Sformułujmy to w postaci następującego twierdzenia.

Twierdzenie: Warunek konieczny i wystarczający wpisania okręgu w wielokąt wypukły

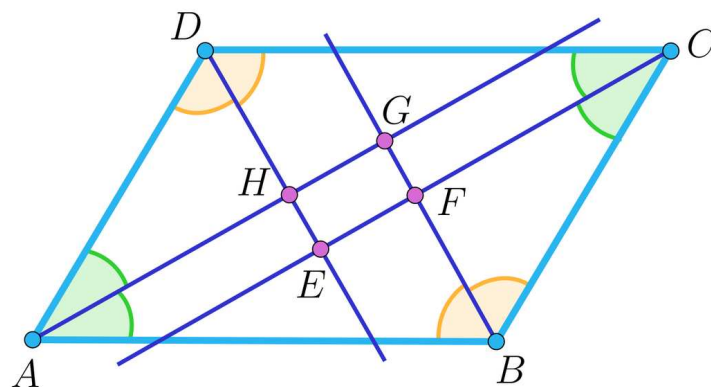
W wielokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy dwusieczne wszystkich kątów wewnętrznych tego wielokąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten jest środkiem tego okręgu.



Oczywiście nie w każdy wielokąt wypukły można wpisać okrąg. Także w tych sytuacjach możemy zaobserwować ciekawe własności dwusiecznych kątów wewnętrznych.

Przykład 1

Wykaż, że dwusieczne kątów wewnętrznych równoległoboku, który nie jest rombem, wyznaczają prostokąt.



Podobnie jak w przypadku trapezu, tak i tu suma dwóch sąsiednich kątów wewnętrznych jest równa 180° , ale o ile w trapezie mieliśmy tylko dwie pary takich

kątów (kąty przy ramionach trapezu), o tyle w równoległoboku każde dwa sąsiednie kąty mają tę własność.

Powtarzając czterokrotnie rozumowanie, które przeprowadziliśmy wcześniej dla trapezu, wnioskujemy, że każdy z kątów AGB , BFC , CED i AHD jest prosty. Wobec tego, z twierdzenia o kątach wierzchołkowych, wynika, że kąty EFG i EHG też są proste.

Zatem wszystkie kąty wewnętrzne czworokąta $EFGH$ są proste, a to oznacza, że czworokąt ten jest prostokątem.

Pozostaje jeszcze zauważyć, że milcząco zakładaliśmy, że ten czworokąt w ogóle istnieje.

Nie istniałby wtedy, gdyby dwusieczne przeciwległych kątów wewnętrznych równoległoboku $ABCD$ zawierały się w jednej prostej, ale to ma miejsce tylko wtedy, gdy ten równoległobok jest rombem.

Właśnie dlatego założyliśmy, że tak nie jest.

Dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta

Wiemy już, że dwusieczne kątów wewnętrznych wielokąta o co najmniej 4 bokach nie muszą się przeciąć w jednym punkcie, o czym świadczą omawiamy wyżej przykład. W przypadku trójkąta jest jednak inaczej. Sformułujemy i udowodnimy następujące twierdzenie.

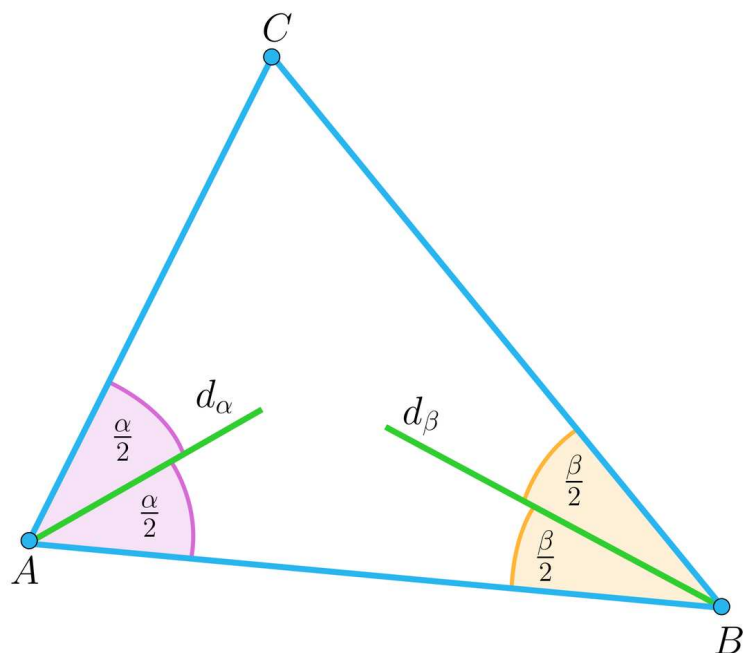
Twierdzenie: o punkcie przecięcia dwusiecznych kątów wewnętrznych trójkąta

W dowolnym trójkącie dwusieczne wszystkich trzech kątów wewnętrznych przecinają się w jednym punkcie.

Dowód

Wykażemy najpierw, że dowolne dwie dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta przecinają się.

Przypuśćmy przeciwnie, że dwusieczne d_α i d_β kątów odpowiednio BAC i ABC nie przecinają się. Zatem byłyby one równoległe.

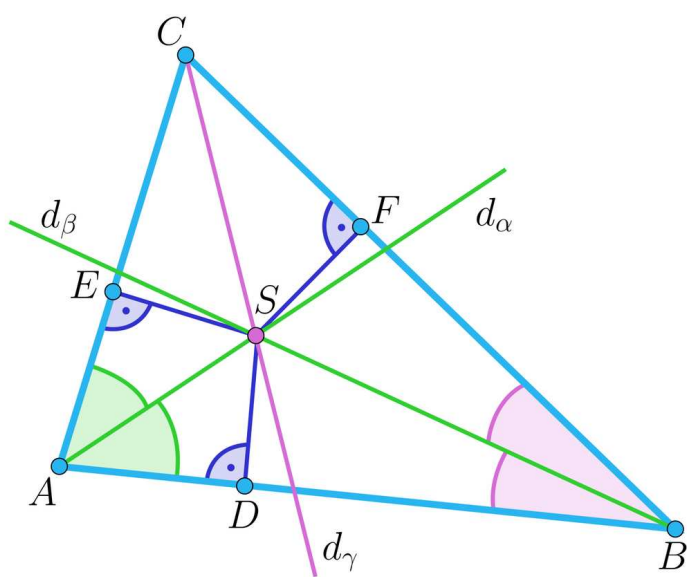


Wtedy z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o kątach jednostronnych wynikałoby, że $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 180^\circ$, ale to oznaczałoby, że $\alpha + \beta = 360^\circ$. To jest jednak niemożliwe, bo $\alpha + \beta = 180^\circ - |\sphericalangle ACB| < 180^\circ$.

Zatem przypuszczenie o tym, że dwusieczne dwóch kątów wewnętrznych trójkąta mogą się nie przecinać prowadzi do sprzeczności.

Tym samym jest ono nieprawdziwe.

Niech S oznacza punkt przecięcia dwusiecznych d_α i d_β kątów odpowiednio BAC i ABC trójkąta ABC .



Ponieważ punkt S leży na dwusiecznej d_α kąta BAC , to z własności dwusiecznej wynika, że odległość tego punktu od ramion AB i AC jest jednakowa, czyli $|SD| = |SE|$, gdzie D i E to punkty leżące na półprostych odpowiednio AB i AC tak, że $SD \perp AB$ i $SE \perp AC$.

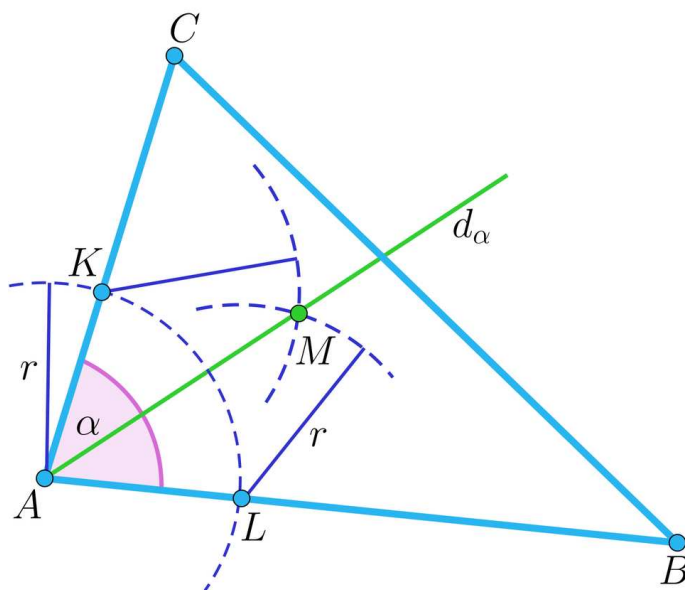
Punkt S leży też na dwusiecznej d_β kąta ABC , więc jego odległości od ramion BA i BC są równe, czyli $|SD| = |SF|$, gdzie F to taki punkt leżący na ramieniu BC kąta ABC , że $SF \perp BC$. Wykazaliśmy więc, że $|SD| = |SE| = |SF|$, więc w szczególności $|SE| = |SF|$. To jednak, z własności dwusiecznej kąta, oznacza, że punkt S leży na dwusiecznej d_γ kąta ACB .

To kończy dowód.

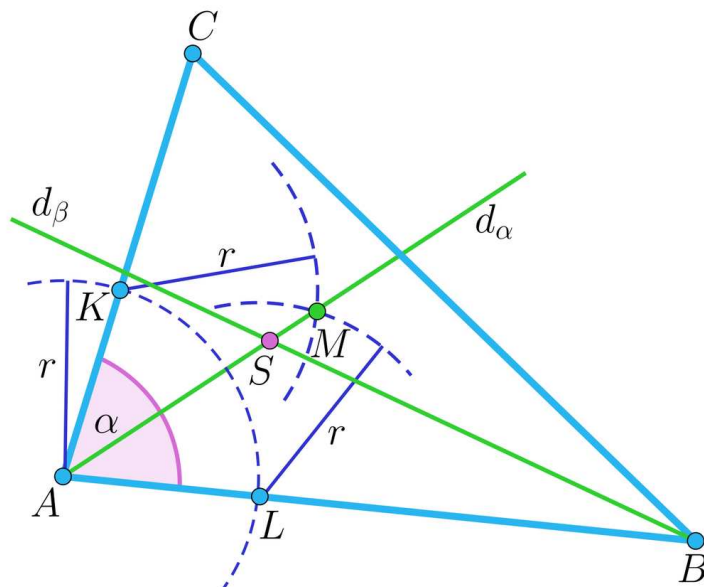
Przeprowadzimy teraz konstrukcję punktu wspólnego **dwusiecznych kątów wewnętrznych trójkąta**. Zauważmy, co wynika z powyższego twierdzenia, że wystarczy wyznaczyć punkt przecięcia dwóch spośród trzech dwusiecznych. Rozważmy trójkąt ACB . Skonstruujemy dwusieczne kątów d_α i d_β kątów odpowiednio BAC i ABC .

Opis konstrukcji:

- rysujemy łuki okręgu o środku A i dowolnym promieniu $r > 0$ tak, żeby przecięły ramiona kąta w punktach K i L ;
- rysujemy łuki okręgów o środkach K i L i tym samym promieniu $r > 0$ tak, żeby przecięły się w punkcie M różnym od A ;
- rysujemy półprostą AM . Jest to dwusieczna d_α kąta α .

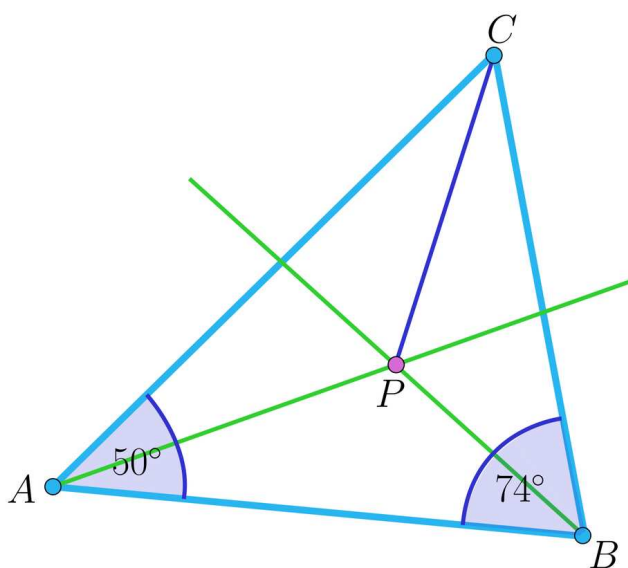


Analogicznie przebiega konstrukcja dwusiecznej d_β kąta β . Punkt wspólny tych dwusiecznych jest szukanym punktem wspólnym wszystkich dwusiecznych kątów wewnętrznych trójkąta.



Przykład 2

Rozważmy trójkąt ABC , którego dwa kąty mają miary $|\sphericalangle BAC| = 50^\circ$, $|\sphericalangle ABC| = 74^\circ$. Niech P będzie punktem przecięcia się dwusiecznych kątów wewnętrznych tego trójkąta. Wyznamy miary kątów APB , BPC oraz APC .



Rozwiązanie:

W trójkącie APB mamy $\frac{1}{2}|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle APB| + \frac{1}{2}|\sphericalangle ABC| = 180^\circ$, czyli $\frac{1}{2} \cdot 50^\circ + |\sphericalangle APB| + \frac{1}{2} \cdot 74^\circ = 180^\circ$.

Stąd $|\sphericalangle APB| = 180^\circ - 25^\circ - 37^\circ = 118^\circ$.

Ponieważ trzeci kąt w trójkącie ABC ma miarę:

$|\sphericalangle ACB| = 180^\circ - |\sphericalangle BAC| - |\sphericalangle ABC| = 56^\circ$, to w trójkącie APC mamy

$$\frac{1}{2}|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle APC| + \frac{1}{2}|\sphericalangle ACB| = 180^\circ, \text{ czyli } \frac{1}{2} \cdot 50^\circ + |\sphericalangle APC| + \frac{1}{2} \cdot 56^\circ = 180^\circ.$$

$$\text{Stąd } |\sphericalangle APC| = 180^\circ - 25^\circ - 28^\circ = 127^\circ.$$

$$\text{Zatem miara kąta } BPC \text{ jest równa } |\sphericalangle BPC| = 360^\circ - 127^\circ - 118^\circ = 115^\circ.$$

Słownik

dwusieczna kąta wewnętrznego trójkąta

dwusieczną kąta wewnętrznego trójkąta nazywamy półprostą, której początkiem jest wierzchołek trójkąta i która dzieli kąt wewnętrzny trójkąta na dwa równe kąty. Niekiedy dwusieczną kąta wewnętrznego trójkąta nazywamy odcinek tej dwusiecznej, którego jednym końcem jest wierzchołek trójkąta, a drugi koniec leży na przeciwległym boku tego trójkąta

wielokąt opisany na okręgu

wielokątem opisanym na okręgu nazywamy wielokąt wypukły, którego każdy bok jest styczny do tego samego okręgu, czyli wielokąt wypukły, którego każdy bok ma z okręgiem dokładnie jeden punkt wspólny niebędący wierzchołkiem tego wielokąta

Aplet

Polecenie 1

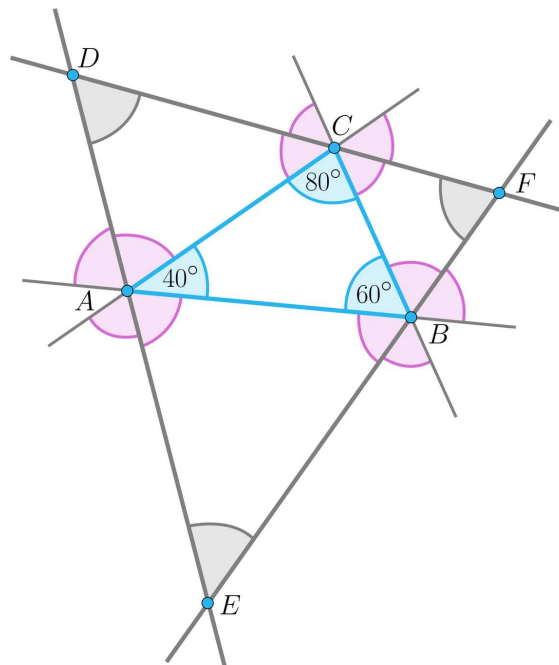
Uruchom aplet. Obserwuj kolejne etapy konstrukcji dwusiecznych kątów wewnętrznych oraz kątów zewnętrznych trójkąta ABC .

Polecenie 2

Na podstawie obserwacji miar kątów, sformułuj i udowodnij hipotezę o kątach utworzonych między dwusieczną kąta zewnętrznego trójkąta i prostą zawierającą dwusieczną kąta wewnętrznego, poprowadzoną z tego samego wierzchołka.

Polecenie 3

Miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC są odpowiednio równe: $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 60^\circ$ i $\gamma = 80^\circ$. Proste zawierające dwusieczne kątów zewnętrznych tego trójkąta przecinają się w punktach D , E , F , jak na rysunku. Wyznacz miary kątów trójkąta DEF .



Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Kąty wewnętrzne trójkąta ABC mają miary: $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 60^\circ$ i $\gamma = 80^\circ$. Wyznacz kąty między dwusiecznymi kątów wewnętrznych tego trójkąta.

Ćwiczenie 2



Wyznacz miary kątów trójkąta ABC , w którym dwa kąty, jakie tworzą dwusieczne jego kątów wewnętrznych mają miary 124° oraz 140° .

Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczne kątów przy jego podstawie AB . Miara kąta rozwartego, jaki utworzyły te dwusieczne jest trzy razy większa od miary kąta wewnętrznego ACB w tym trójkącie. Oblicz miarę kąta ACB .

Ćwiczenie 7

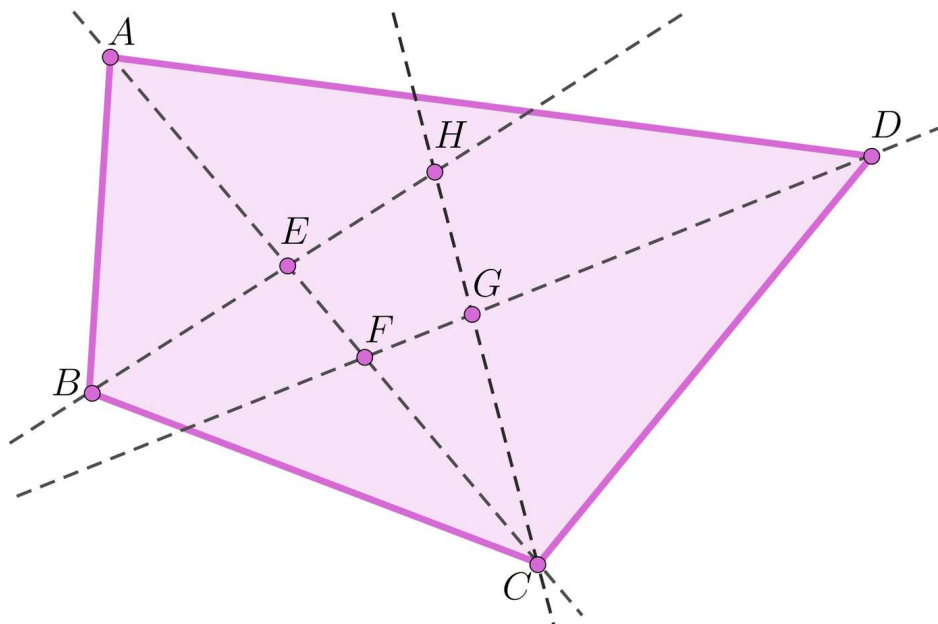


Dany jest trójkąt prostokątny ABC . Skonstruuj dwusieczne kątów ostrych tego trójkąta i wykaż, że kąt rozwarty, jaki tworzą te dwusieczne ma miarę 135° .

Ćwiczenie 8



Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Dwie sieczne jego kątów wewnętrznych przecinają się w różnych punktach: E, F, G, H , jak na rysunku.



Dla nauczyciela

Autor: Henryk Dąbrowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Dwusieczne kątów trójkąta

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, klasa I lub II, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria. Zakres podstawowy.

4) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach;

10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności;

12) przeprowadza dowody geometryczne.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zna pojęcie i stosuje własności dwusiecznej
- przeprowadza konstrukcję dwusiecznej
- przeprowadza dowód twierdzenia o punkcie przecięcia się dwusiecznych kątów wewnętrznych trójkąta
- przeprowadza dowody geometryczne

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda para uczniów miała do dyspozycji komputer; lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi o przypomnienie pojęcia dwusiecznej i jej własności.
2. Nauczyciel formułuje problem dotyczący wyznaczenia miejsca geometrycznego punktów, które są środkami okręgów stycznych do ramion kąta i tak steruje dyskusją, by wspomniano o dwusiecznej.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prezentuje rysunek trapezu opisanego na okręgu i prosi o wyznaczenie miary kąta wyznaczonego przez końce ramion trapezu i środek okręgu wpisanego. Prosi uczniów o jego rozwiązanie i uogólnia otrzymany wynik.
2. Nauczyciel formułuje przykład dotyczący dwusiecznych kątów wewnętrznych równoległoboku. Ilustrując to zagadnienie za pomocą apletu geogebry wcześniej przez siebie przygotowanego, może pokazać przykłady równoległoboków, w których dwusieczne nie będą wyznaczały czworokąta.
3. Nauczyciel poleca uruchomić Aplet i prosi o szczególnie uważne przeanalizowanie konstrukcji dwusiecznych kątów wewnętrznych trójkąta i ich punktu wspólnego.
4. Następnie formułuje twierdzenie – może od razu podać wersję 2. twierdzenia lub zacząć, przez analogie z zadaniami dotyczącymi czworokątów, od wersji, w której zakładamy, że punkt wspólny istnieje. Następnie wybrani uczniowie przeprowadzają dowód twierdzenia.
5. Nauczyciel proponuje przeprowadzić konstrukcję punktu wspólnego dwusiecznych danego trójkąta – w ramach dowodu poprawności uczniowie odwołują się do dowodu twierdzenia.

6. Nauczyciel formułuje problem dotyczący zależności między miarami kątów trójkąta i kątów, jakie tworzą dwusieczne – wybrani uczniowie rozwiązują problem na tablicy.
7. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, wykorzystując umiejętności z różnych działów matematyki.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć. Proponuje, by rozwiązując ćwiczenie 5 sięgnąć do dołączonego apletu.

Materiały pomocnicze:

[Dwusieczne kąta](#)

Wskazówki metodyczne:

Można zastosować w ramach powtórzenia przed sprawdzianem. Można wykorzystać przy realizacji tematu o okręgu wpisanym w trójkąt.