

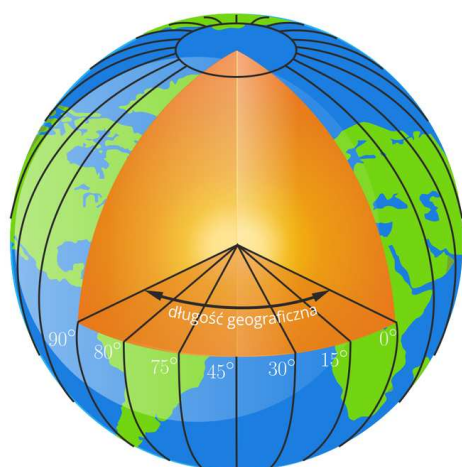


Kąty między płaszczyznami w ostrosłupach

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja 3D
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



W przestrzeni definiujemy różnego rodzaju kąty. Pojęcie kąta dwuściennego (kąta między płaszczyznami) jest jednym z częściej stosowanych w codziennym życiu. Przy jego pomocy definiuje się na przykład długość geograficzną. Kąta dwuściennego używa się również w budownictwie.



Źródło: dostępny w internecie: www.pixabay.com, domena publiczna.

Możemy tu zacytować S. Przewłockiego – autora „*Geodezji dla inżynierii środowiska*”:

⌋ Długość geograficzna punktu P jest to kąt dwuścienny, zawarty pomiędzy płaszczyzną przyjętego południka początkowego (zerowego) a płaszczyzną południka danego punktu P .

Aby obliczyć kąt nachylenia dachu, wystarczy zaś wykorzystać funkcję cyklometryczną arcus tangens

$$\alpha = \text{arc tg}\left(\frac{h}{d}\right)$$

W tym materiale poznasz kąty między płaszczyznami w ostrosłupach. Nauczysz się zaznaczać i wykorzystywać kąty między jego poszczególnymi ścianami.

Twoje cele

- Zaznaczysz odpowiednie kąty między płaszczyznami w ostrosłupach na podstawie ich opisu słownego.
- Wyszukasz trójkąty zbudowane przez elementy ostrosłupa, dzięki którym będziesz mógł określić miarę odpowiedniego kąta.
- Zastosujesz elementy trygonometrii do wyznaczania miar kątów w przestrzeni.
- Określisz charakterystykę ostrosłupa, którego wszystkie ściany boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem.

Przeczytaj

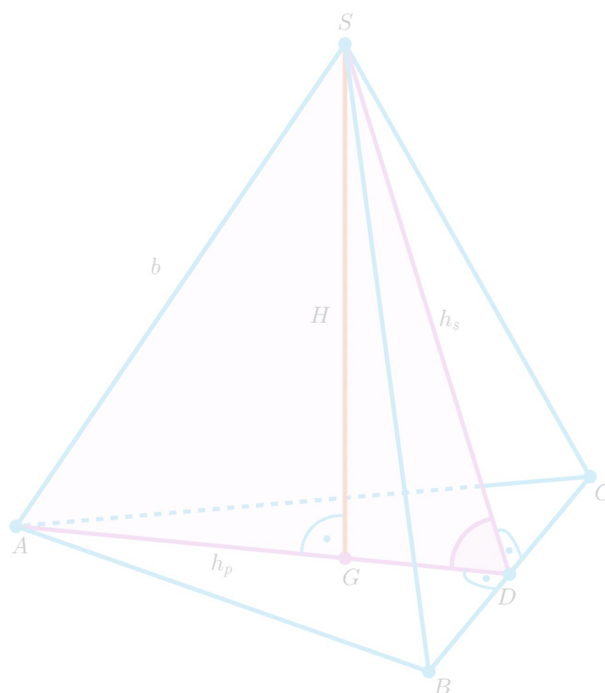
Rozpocznijmy od omówienia dwóch podstawowych kątów między płaszczyznami, charakterystycznych dla ostrosłupów.

W tych wielościanach wyróżniamy dwa rodzaje ścian:

- podstawę,
- ścianę boczną.

Dlatego w ostrosłupach możemy definiować dwa rodzaje kątów dwuściennych. Pierwszym z nich jest kąt między płaszczyzną podstawy ostrosłupa a jego ścianą boczną. Drugi kąt, to kąt między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa.

Wykorzystaj poniższy aplet, aby zaobserwować, jak zaznaczyć w ostrosłupie kąt liniowy kąta dwuściennego między płaszczyzną podstawy ostrosłupa i płaszczyzną jego ściany bocznej. Zmieniając aktywne okienko możesz obserwować kąt między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Du2hLDctt>

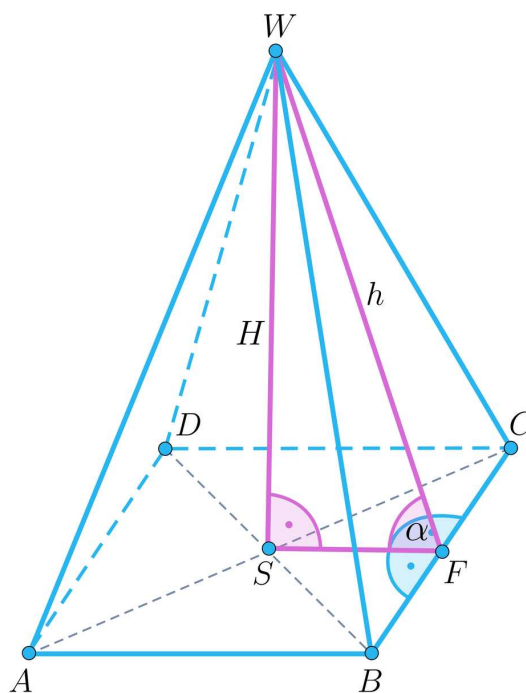
Pamiętaj, że powyższy aplet przedstawia jedynie przykładowy ostrosłup. W zależności od rodzaju ostrosłupa kąt liniowy kąta dwuściennego może być definiowany za pomocą inaczej położonych ramion. Najważniejszym jest to, by zapamiętać, że ramiona takiego kąta muszą być prostopadłe do prostej wspólnej dla płaszczyzn definiujących kąt dwuścienny.

Przykład 1

Narysuj [ostrosłup prawidłowy](#) czworokątny i zaznacz w nim kąt między płaszczyzną podstawy a ścianą boczną ostrosłupa. Wiedząc, że wysokość ostrosłupa jest trzy razy krótsza od wysokości jego ściany bocznej, oblicz miarę kąta liniowego zaznaczonego [kąta dwuściennego](#).

Rozwiązanie:

Zacniemy oczywiście od rysunku:



Aby zaznaczyć kąt między płaszczyzną podstawy a płaszczyzną ściany bocznej ostrosłupa, określamy najpierw prostą wspólną dla tych dwóch płaszczyzn.

Dla ściany bocznej BCW jest to oczywiście prosta BC .

Kąt liniowy naszego kąta dwuściennego można zatem zaznaczyć jako kąt między wysokością ściany bocznej prostopadłą do krawędzi podstawy ostrosłupa a odcinkiem podstawy SF prostopadłym do tej samej krawędzi.

Aby wyznaczyć miarę tego kąta wystarczy wykorzystać definicję funkcji trygonometrycznej sinus w trójkącie prostokątnym WSF :

$$\frac{|WS|}{|WF|} = \sin \alpha$$

$$\frac{x}{3x} = \sin \alpha$$

$$\frac{1}{3} = \sin \alpha$$

$$0,3333 \approx \sin \alpha$$

Wykorzystując tablice matematyczne możemy podać już miarę kąta, o który pytają w zadaniu: $|\angle WFS| \approx 19^\circ$. Odpowiedź jest przybliżona ze względu na wykorzystanie tablic trygonometrycznych.

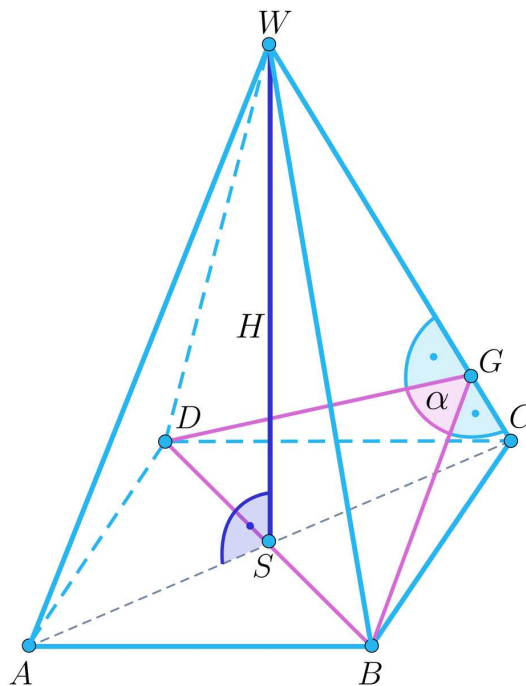
W zadaniach nie zawsze należy obliczyć miarę kąta dwuściennego. Niekiedy podaje się pewien kąt w celu zdefiniowania ostrosłupa i dzięki tej informacji oblicza długości elementów ostrosłupa. Najistotniejszą częścią rozwiązania jest wtedy poprawne zaznaczenie opisanego w treści kąta dwuściennego.

Przykład 2

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDW$ o podstawie $ABCD$ krawędź podstawy AB jest równa 15, a kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa ma miarę 120° . Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa.

Rozwiązanie:

Zacznijmy ponownie od rysunku bryły.



W przypadku ostrosłupa prawidłowego wszystkie ściany boczne są przystającymi trójkątami równoramiennymi.

Stąd długości wysokości BG oraz DG ścian bocznych są identyczne.

Ponieważ dodatkowo przekątna kwadratu $ABCD$ o boku długości 15 to odcinek BD o długości $15\sqrt{2}$, możemy wykorzystać twierdzenie cosinusów, by obliczyć opisaną wcześniej wysokość ściany bocznej.

Wykorzystamy [twierdzenie cosinusów](#) w trójkącie DGB :

$$|BD|^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \cos \angle DGB$$

$$(15\sqrt{2})^2 = 2x^2 - 2x^2 \cos 120^\circ$$

$$450 = 2x^2 + 2x^2 \cos 60^\circ$$

$$450 = 2x^2 + 2x^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$450 = 3x^2$$

$$x = \sqrt{150}$$

$$x = 5\sqrt{6}.$$

Zauważmy teraz, że trójkąt SGC jest podobny do trójkąta WSC .

Istotnie, oba są trójkątami prostokątnymi o wspólnym kącie ostrym przy wierzchołku C .

Wystarczy zatem obliczyć długość odcinka GS i potem GC , aby wyznaczyć długość krawędzi bocznej ostrosłupa.

Długość GS obliczymy z trójkąta prostokątnego GSB :

$$\frac{|BS|}{|GS|} = \operatorname{tg} \frac{120^\circ}{2}$$

$$\frac{\frac{15\sqrt{2}}{2}}{|GS|} = \operatorname{tg} 60^\circ$$

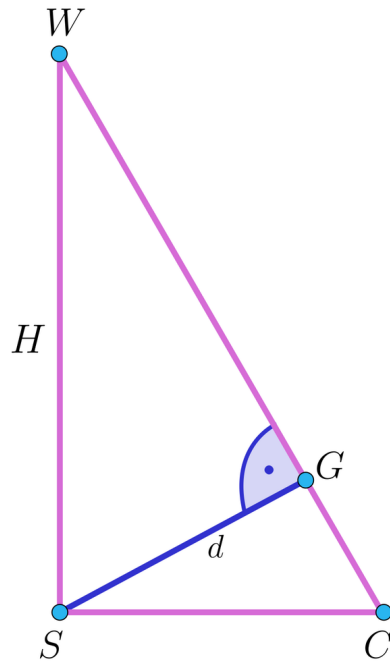
$$\frac{15\sqrt{2}}{2|GS|} = \sqrt{3}$$

$$2\sqrt{3}|GS| = 15\sqrt{2}$$

$$|GS| = \frac{15\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$$

$$|GS| = \frac{15\sqrt{6}}{6}.$$

Rozpatrzmy teraz tylko część przekroju ostrosłupa, trójkąt WSC



W tym trójkącie znamy $|GS| = \frac{15\sqrt{6}}{6}$ oraz $|SC| = \frac{15\sqrt{2}}{2}$.

Z twierdzenia Pitagorasa możemy obliczyć długość GC :

$$|GC|^2 = |SC|^2 - |GS|^2$$

$$|GC|^2 = \left(\frac{15\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{15\sqrt{6}}{6}\right)^2$$

$$|GC|^2 = \frac{225}{2} - \frac{225}{6}$$

$$|GC|^2 = \frac{450}{6}$$

$$|GC| = \sqrt{75}$$

$$|GC| = 5\sqrt{3}.$$

Ostatecznie wykorzystując podobieństwo trójkątów SGC oraz WSC możemy obliczyć długość krawędzi bocznej CW ostrosłupa:

$$\frac{|GC|}{|SC|} = \frac{|SC|}{|CW|}$$

$$|CW| = \frac{|SC|^2}{|GC|}$$

$$|CW| = \frac{\left(\frac{15\sqrt{2}}{2}\right)^2}{5\sqrt{3}}$$

$$|CW| = \frac{\frac{225}{2}}{5\sqrt{3}}$$

$$|CW| = \frac{225}{10\sqrt{3}}$$

$$|CW| = \frac{15\sqrt{3}}{2}.$$

Zgodnie z poleceniem, mamy obliczyć sumę wszystkich krawędzi ostrosłupa. Ponieważ ostrosłup czworokątny ma cztery krawędzie podstawy i cztery krawędzie boczne, otrzymujemy ostateczny wynik:

$$s = 4 \cdot 15 + 4 \cdot \frac{15\sqrt{3}}{2} = 60 + 30\sqrt{3}$$

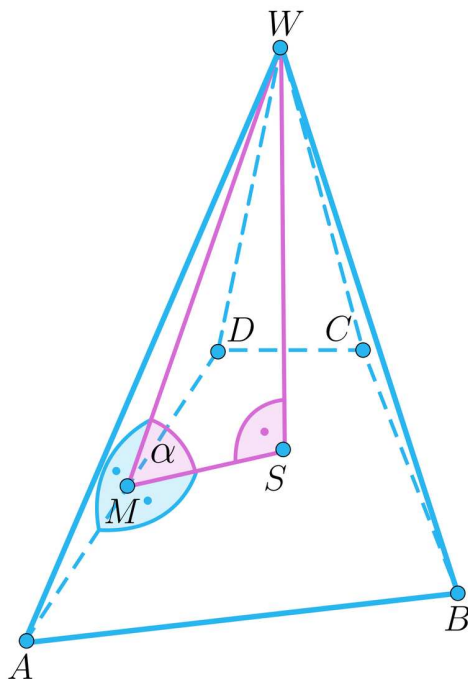
Zaznaczanie kątów między płaszczyznami w ostrosłupach prawidłowych jest dość powtarzalne. Po rozwiązaniu kilku zadań można zauważyć, że kąt między ścianami bocznymi, to kąt między wysokościami ścian bocznych opuszczonymi na wspólną krawędź tych ścian. Analogicznie kąt między podstawą a ścianą boczną, to kąt między wysokością ściany bocznej opuszczoną na krawędź podstawy a odpowiednim odcinkiem podstawy. Jednak nie zawsze mamy do czynienia z ostrosłupami prawidłowymi. W rozwiązaniu niektórych zadań szczególną uwagę musimy przywiązać do analizy własności ostrosłupa, aby poprawnie zaznaczyć kąt dwuścienny.

Przykład 3

Podstawą ostrosłupa jest czworokąt $ABCD$. Wszystkie ściany boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem α . Uzasadnij, że spodek wysokości tego ostrosłupa pokrywa się z punktem przecięcia się dwusiecznych kątów wewnętrznych danego czworokąta.

Rozwiązanie:

Zacznijmy od rysunku:



Przeanalizujemy najpierw kąt nachylenia ściany bocznej ADW do podstawy ostrosłupa.

Wspólną prostą dla płaszczyzn zawierających te ściany jest prosta AD .

Prowadzimy płaszczyznę zawierającą wysokość WS ostrosłupa, prostopadłą do prostej AD .

Jeżeli punkt S będzie spodkiem wysokości ostrosłupa, to otrzymujemy odcinek SM prostopadły do boku AD czworokąta podstawy oraz odcinek MW na ścianie bocznej.

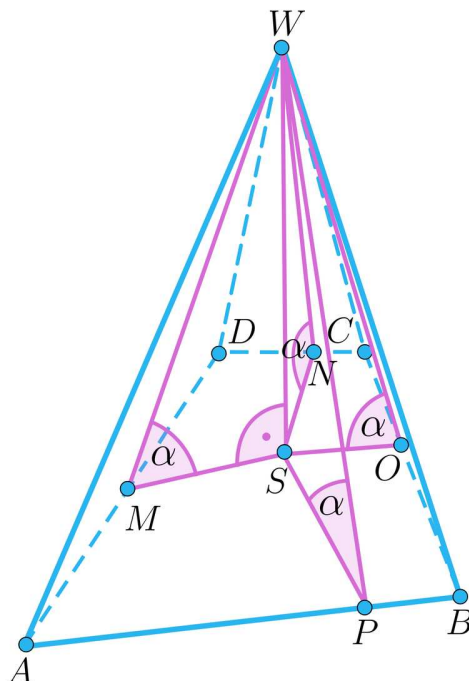
Mamy zatem trójkąt prostokątny WSM , którego kąt wewnętrzny SMW jest kątem liniowym [kąta dwuściennego](#) między płaszczyzną podstawy i ścianą boczną ADW ostrosłupa.

Wynika stąd, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{|WS|}{|SM|}$.

Analogicznie postępujemy dla kolejnych ścian bocznych ostrosłupa i otrzymujemy podobny wynik.

Jedyną zmienną w powyższej równości jest punkt M , który będzie definiowany kolejno jako N, O, P i należał do kolejnych krawędzi podstawy ostrosłupa.

Na rysunku sytuację możemy przedstawić następująco:



Dowodzi to, że spodek wysokości ostrosłupa znajduje się w równej odległości od wszystkich boków czworokąta $ABCD$ i odległość ta jest równa

$$|MS| = |NS| = |OS| = |PS| = \frac{|WS|}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Oznacza to, że do czworokąta można wpisać okrąg (istnieje punkt równo odległy od wszystkich boków czworokąta). Jak wiadomo, środek tego okręgu jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów wewnętrznych czworokąta.

Rozwiązanie ostatniego przykładu wymagało bezpośrednio znajomości definicji kąta dwusiecznego.

Warto zauważyć, że podobnie dowodzi się ogólniejsze twierdzenie:

Twierdzenie: Warunek dla ostrosłupa o stałym kącie nachylenia ścian bocznych do płaszczyzny podstawy

W ostrosłupie wypukłym spodek wysokości jest środkiem okręgu wpisanego w podstawę wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie ściany boczne tego ostrosłupa są nachylone pod tym samym kątem do płaszczyzny podstawy.

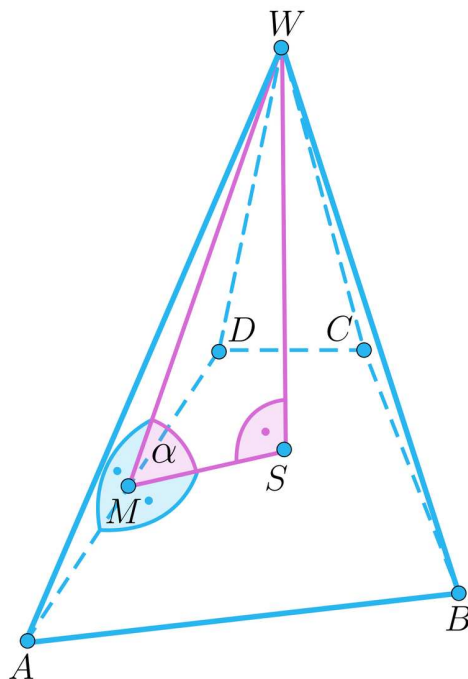
Twierdzenie to jest często wykorzystywane do rozwiązywania zadań ze stereometrii.

Przykład 4

Podstawą ostrosłupa jest trapez równoramienny $ABCD$, w którym $|AB| = a$, $|CD| = b$. Wszystkie ściany boczne tego ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem α . Uzasadnij, że wysokość tego ostrosłupa wyraża się wzorem $H = \frac{\sqrt{ab}}{2} \operatorname{tg} \alpha$.

Rozwiązanie:

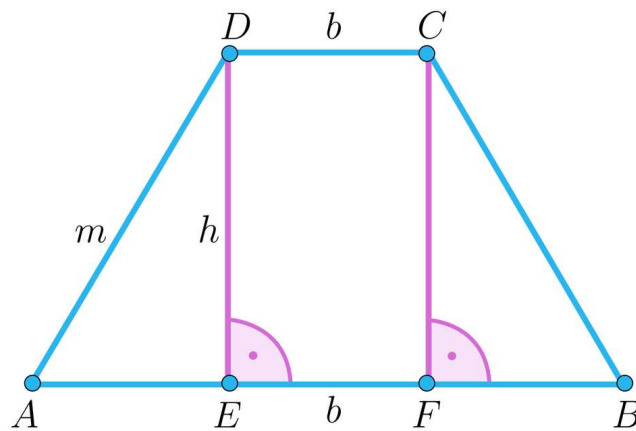
Przyjmijmy następujące oznaczenia dla ostrosłupa:



Ponieważ wszystkie ściany boczne są nachylone do podstawy pod tym samym kątem, to w podstawę ostrosłupa można wpisać okrąg, a spodek wysokości

ostrosłupa jest środkiem tego okręgu.

Przeanalizujemy zatem samą podstawę ostrosłupa:



Z warunku czworokąta opisanego na okręgu wynika, że suma ramion m trapezu jest równa sumie jego podstaw, stąd:

$$2m = a + b$$

$$m = \frac{a+b}{2}$$

Jeżeli zauważymy teraz, że gdy podstawa AB trapezu ma długość a oraz odcinek EF tej podstawy ma długość b , to z faktu, że trapez jest równoramienny wynika, że odcinek AE trapezu $ABCD$ ma długość $\frac{a-b}{2}$.

Możemy wykorzystać twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta AED , by obliczyć wysokość h trapezu:

$$h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$h^2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2}{4}$$

$$h^2 = ab$$

$$h = \sqrt{ab}$$

Promień okręgu wpisanego w trapez jest połową jego wysokości, zatem:

$$r = \frac{\sqrt{ab}}{2}$$

Ostatecznie wykorzystując w ostrosłupie trójkąt WSM otrzymujemy długość wysokości ostrosłupa:

$$\frac{H}{r} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$H = r \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$H = \frac{\sqrt{ab}}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Słownik

kąt między płaszczyznami (kąt dwuścienny)

każda z dwóch części przestrzeni, na jakie dzieli ją dwie półpłaszczyzny, nazywane ścianami kąta dwuściennego, mające wspólną krawędź nazywaną krawędzią kąta dwuściennego, wraz z punktami każdej półpłaszczyzny

kąt liniowy kąta dwuściennego

kątem liniowym kąta dwuściennego nazywa się kąt płaski będący częścią wspólną tego kąta dwuściennego oraz płaszczyzny prostopadłej do jego krawędzi

miara kąta liniowego kąta dwuściennego

miarą kąta dwuściennego nazywa się miarę jego dowolnego kąta liniowego (wszystkie są przystające)

twierdzenie cosinusów

twierdzenie określające związek między kątem wewnętrznym trójkąta i bokami tego trójkąta:

w dowolnym trójkącie kwadrat długości jednego z boków jest równy sumie kwadratów długości pozostałych dwóch boków pomniejszonej o podwojony iloczyn tych boków i cosinusa kąta między nimi zawartego

ostrosłup prawidłowy

ostrosłupem prawidłowym nazywamy taki ostrosłup prosty, którego podstawa jest wielokątem foremnym

Animacja 3D

Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższą animacją. Prezentuje ona różnego rodzaju kąty między płaszczyznami w ostrosłupie. Obserwuj, jak definiować zaznaczone w bryle kąty oraz jak samodzielnie zaznaczać kąty, dla których podano opis słowny. Po zapoznaniu się z materiałem, spróbuj rozwiązać ćwiczenia problemowe umieszczone pod animacją.

Wystąpił błąd

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej kąta między płaszczyznami w ostrosłupach.

Polecenie 2

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny. Połącz w pary te opisy, które definiują ten sam kąt w przestrzeni.

α – Kąt między wysokością ściany bocznej ostrosłupa a wysokością ostrosłupa.

β – Kąt między wysokością ściany bocznej ostrosłupa a krawędzią boczną ostrosłupa.

γ – Kąt między wysokościami ścian bocznych ostrosłupa opuszczonymi na ich wspólną krawędź.

δ – Kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa.

ε – Kąt między ścianą boczną ostrosłupa a płaszczyzną prostopadłą do jego podstawy zawierającą wierzchołek ostrosłupa.

Polecenie 3

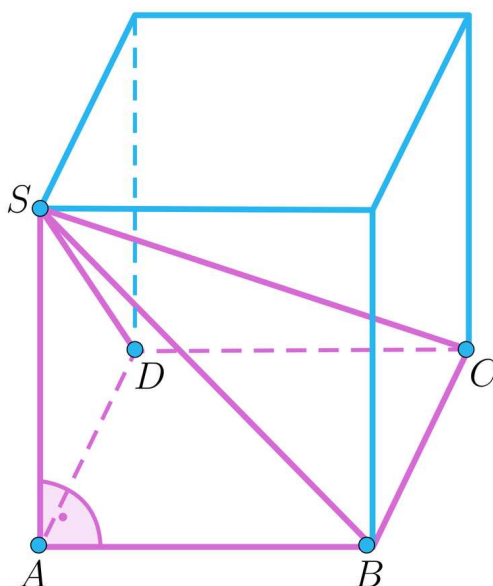
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



W sześcianie o krawędzi a połączono wierzchołki podstawy dolnej z jednym z wierzchołków podstawy górnej otrzymując ostrosłup $ABCD S$.



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym pole powierzchni ściany bocznej wynosi 18 cm^2 , a krawędź podstawy ma długość $2\sqrt{2} \text{ cm}$. Cosinus kąta zawartego między dwiema ścianami bocznymi jest równy $0,75$. Oblicz długość krawędzi bocznej tego ostrosłupa.

Ćwiczenie 7

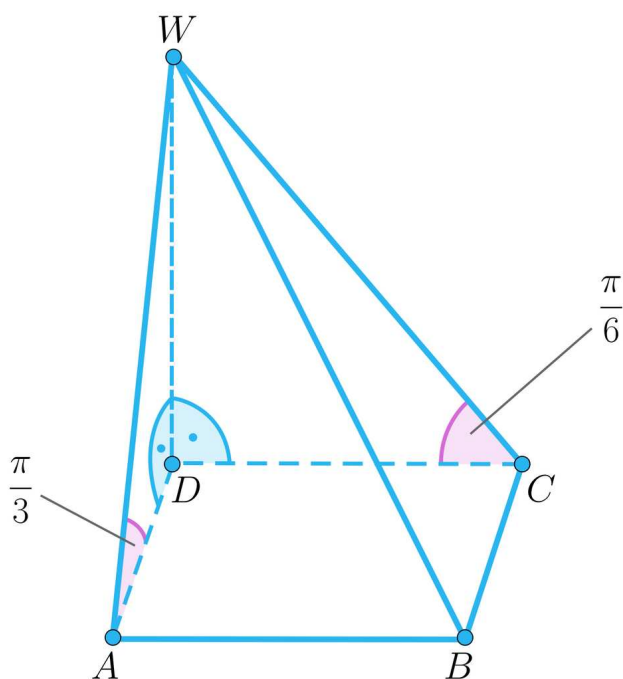


W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym o krawędzi podstawy długości 16 kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ma miarę 30° . Oblicz długość krawędzi bocznej ostrosłupa.

Ćwiczenie 8



Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o polu 9 dm^2 . Dwie ściany boczne ostrosłupa są prostopadłe do płaszczyzny podstawy, a dwie pozostałe ściany boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątami $\frac{\pi}{3}$ oraz $\frac{\pi}{6}$. Oblicz wysokość ostrosłupa.



Dla nauczyciela

Autor: Bożena Koprowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Kąty między płaszczyznami w ostrosłupach

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

4) rozpoznaje w walcach i w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą), oblicza miary tych kątów;

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje w ostrosłupach opisane kąty między płaszczyznami
- rozpoznaje w ostrosłupach podstawowe jego elementy (np. wysokość ostrosłupa, wysokość ściany bocznej ostrosłupa, spodek wysokości ostrosłupa)
- nazywa zaznaczone w ostrosłupie kąty, używając nazw elementów ostrosłupa
- przeprowadza proste rozumowanie pomagające ustalić strategię rozwiązania zadania

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- pokaz
- dyskusja

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- modele ostrosłupów
- komputer z głośnikami i dostępem do Internetu
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- projektor multimedialny/tablica interaktywna

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

- Nauczyciel prosi uczniów o przypomnienie pojęcia kąta dwuściennego. Jeżeli uczniowie mają problem z prawidłowym wypowiedzeniem definicji, wspólnie używając modeli ostrosłupów definiują pojęcie kąta między dwiema płaszczyznami.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel rozpoczyna lekcję od animacji prezentującej kąty w ostrosłupach z części „Przeczytaj”. Uczniowie wspólnie dyskutują, na co należy zwrócić uwagę tworząc szkic bryły i jak zaznaczać w ostrosłupach kąty między płaszczyznami.
2. Nauczyciel wspólnie z klasą analizuje Przykład 1 z części „Przeczytaj”. Jeszcze raz wyjaśnia pojęcie kąta między ścianami wielościanu.
3. Nauczyciel dzieli klasę na grupy. Każdej grupie przekazuje model ostrosłupa czworokątnego, którego ściany boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem. Uczniowie zaznaczają te kąty na modelu i w grupach stawiają hipotezy, z jakim punktem pokrywa się spodek wysokości ostrosłupa.
4. Uczniowie dyskutują na forum rezultaty swojej pracy. Wspólnie rozwiązują Przykład 3 z części „Przeczytaj”.
5. Ponownie w grupach uczniowie rozwiązują Przykład 4 z części „Przeczytaj”. W razie problemów nauczyciel pozwala im na wykorzystanie rozwiązania ze strony e-podręczniki.

Faza podsumowująca:

1. Uczniowie notują warunek dla ostrosłupa o stałym kącie nachylenia ścian bocznych do płaszczyzny podstawy.
2. Nauczyciel podsumowuje lekcję, przypominając zasady zaznaczania kątów między ścianami w ostrosłupach.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca uczniom wykorzystanie części multimedialnej lekcji. Prosi o wykonanie pracy umieszczonej w pytaniach pod multimediami.

Materiały pomocnicze:

[Kąty pomiędzy płaszczyznami i prostymi oraz pomiędzy płaszczyznami w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym](#)

Wskazówki metodyczne:

Animację z części multimedialnej można wykorzystać w pierwszej części lekcji, zastępując metodę burzy mózgów prezentacją animacji i jej omówieniem z uczniami.