



Miejsca zerowe funkcji kwadratowej

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Miejsca zerowe funkcji kwadratowej

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

Nabywanie umiejętności określania różnorodnych własności funkcji na podstawie wzoru i wykresu pozwala na wyjaśnienie wielu problemów matematycznych. W tym materiale wprowadzimy wiadomości dotyczące miejsca zerowego funkcji kwadratowej. Dowiemy się, od czego zależy liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej oraz ile co najwyżej miejsc zerowych może mieć ta funkcja. Bazując na części teoretycznej i podanych przykładach, będziemy rozwiązywać ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

- Zastosujesz definicję miejsca zerowego funkcji do ustalenia warunków na istnienie miejsc zerowych funkcji kwadratowej.
- Określisz liczbę miejsc zerowych funkcji kwadratowej.
- Obliczysz wartości parametrów, dla których funkcja kwadratowa ma określoną liczbę miejsc zerowych.
- Ocenisz swoją wiedzę, wykonując zestaw przygotowanych ćwiczeń.

Przeczytaj

Definicja: Miejsce zerowe

Miejszem zerowym funkcji nazywamy taki argument, dla którego wartość funkcji wynosi 0.

Już wiesz

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola. Jeżeli funkcja kwadratowa jest określona wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdy $a \neq 0$, to:

- dla $a > 0$ ramiona paraboli są skierowane do góry,
- dla $a < 0$ ramiona paraboli są skierowane do dołu.

Miejsce zerowe **funkcji kwadratowej** określamy w zależności od wartości wyróżnika funkcji kwadratowej, który obliczamy za pomocą wzoru $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$.

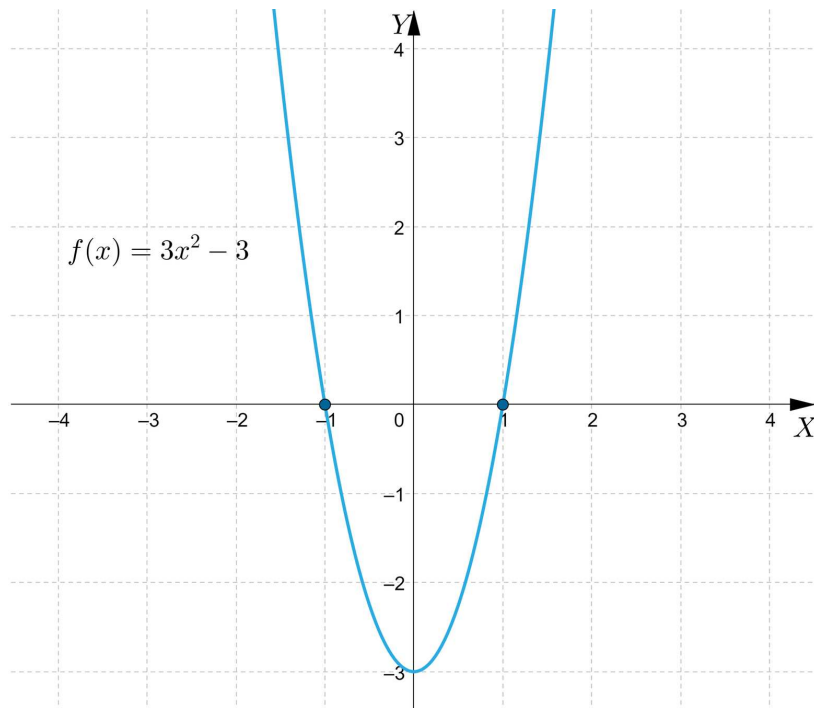
Graficznie, miejsce zerowe funkcji interpretujemy jako pierwszą współrzędną punktu przecięcia wykresu funkcji z poziomą osią X .

Jeżeli funkcja kwadratowa jest określona wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$ oraz $a \neq 0$, to:

- gdy $\Delta > 0$, funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe

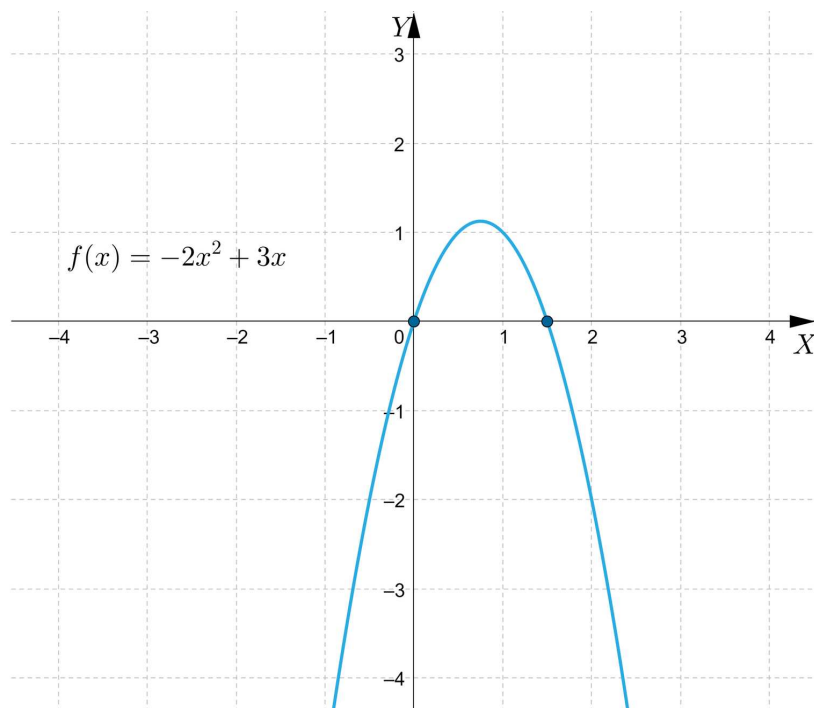
Na rysunku przedstawiono wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = 3x^2 - 3$.

Ponieważ $\Delta = 0^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-3) = 36$, zatem funkcja ma dwa miejsca zerowe.



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = -2x^2 + 3x$.

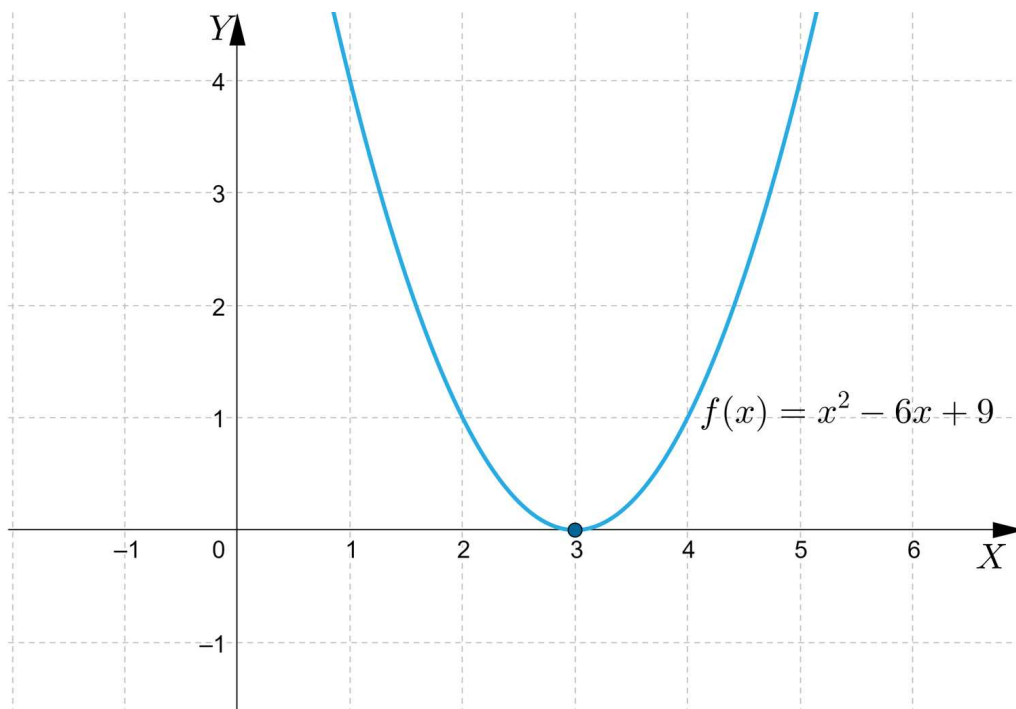
Ponieważ $\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 0 = 9$, zatem funkcja ma dwa miejsca zerowe.



- gdy $\Delta = 0$, funkcja kwadratowa ma jedno miejsce zerowe

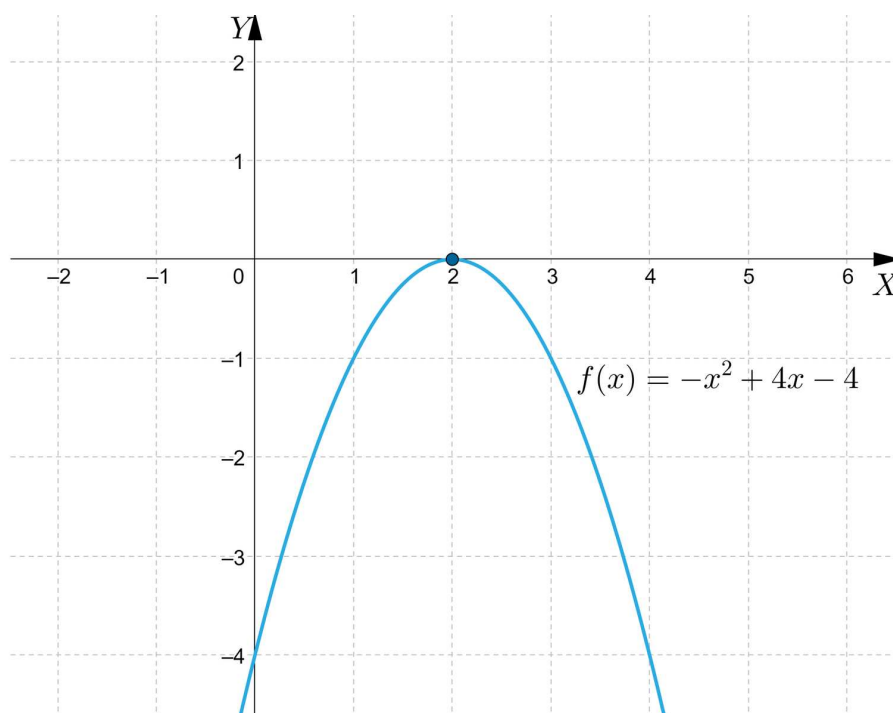
Na rysunku przedstawiono wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = x^2 - 6x + 9$.

Ponieważ $a = 1$ oraz $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$, zatem funkcja ma jedno miejsce zerowe.



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = -x^2 + 4x - 4$.

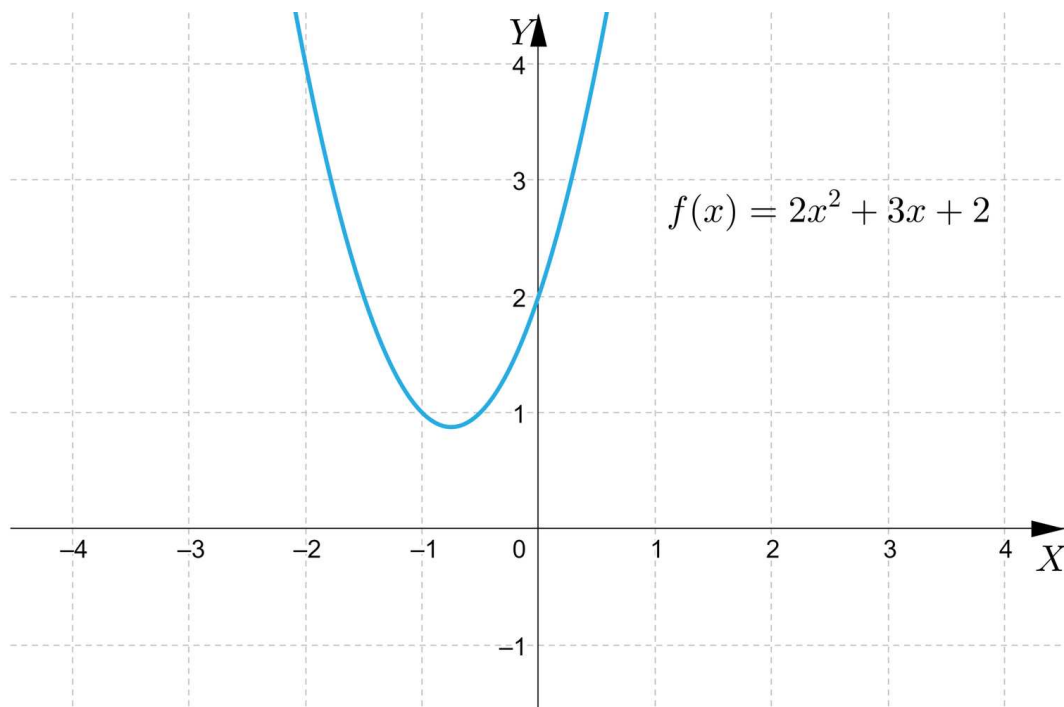
Ponieważ $a = -1$ oraz $\Delta = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4) = 0$, zatem funkcja ma jedno miejsce zerowe.



- gdy $\Delta < 0$, funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych

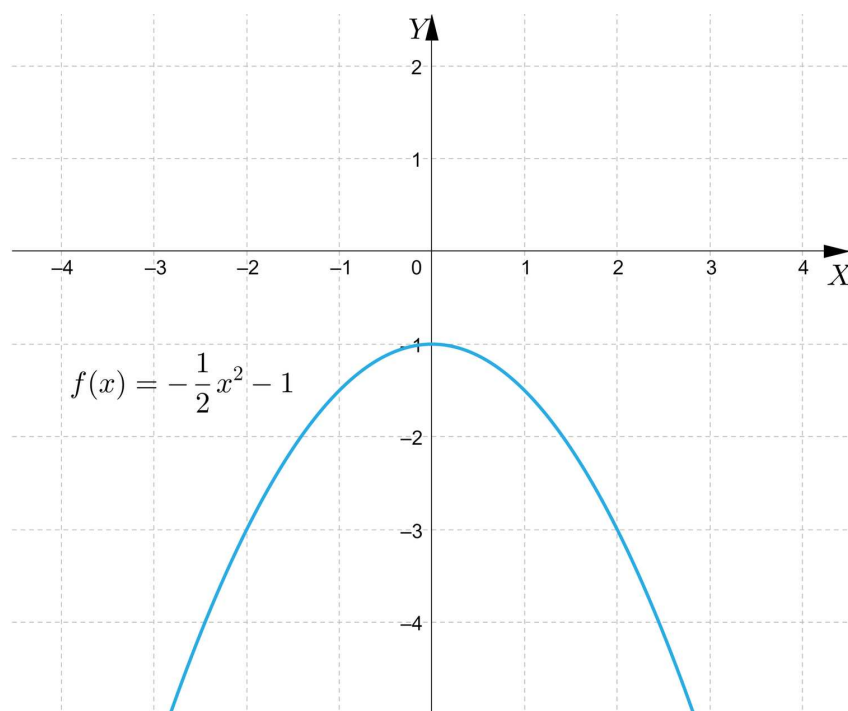
Na rysunku przedstawiono wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = 2x^2 + 3x + 2$.

Ponieważ $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -7$, zatem funkcja nie ma miejsc zerowych.



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 1$.

Ponieważ $a = -\frac{1}{2}$ oraz $\Delta = 0^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-1) = -2$, zatem funkcja nie ma miejsc zerowych.



Własność: liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej

Każda funkcja kwadratowa ma co najwyżej dwa miejsca zerowe.

Mając dany wzór funkcji możemy bez szkicowania wykresu, określić liczbę miejsc zerowych tej funkcji.

Przykład 1

Wyznamy liczbę miejsc zerowych funkcji kwadratowej określonej wzorem

$$f(x) = -x^2 + 3x - 3.$$

$$\text{Obliczamy } \Delta = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4) = 9 - 16 = -7.$$

Ponieważ $\Delta = -7$, zatem funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych.

Wiedząc o tym, że liczba **miejsc zerowych** funkcji kwadratowej zależy od wartości wyróżnika, możemy znajdować wartości parametrów we wzorze funkcji kwadratowej, znając liczbę miejsc zerowych tej funkcji.

Przykład 2

Wyznamy, dla jakiej wartości parametru b funkcja określona wzorem

$$f(x) = 2x^2 - bx + 1 \text{ ma dokładnie jedno miejsce zerowe.}$$

Funkcja ma dokładnie jedno miejsce zerowe, gdy $\Delta = 0$.

$$\text{Obliczamy } \Delta = (-b)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = b^2 - 8$$

Do wyznaczenia wartości parametru b rozwiązujemy równanie

$$b^2 - 8 = 0, \text{ zatem } b = -2\sqrt{2} \text{ lub } b = 2\sqrt{2}.$$

Przykład 3

Wyznamy, dla jakiej wartości parametru b funkcja kwadratowa określona wzorem

$$f(x) = ax^2 + bx + 1 \text{ nie ma miejsc zerowych, przy założeniu, że } a > 0.$$

Funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych, gdy $\Delta < 0$.

Obliczamy:

$$\Delta = b^2 - 4a.$$

Zakres wartości parametru b określimy przez rozwiązanie nierówności

$$b^2 - 4a < 0$$

Nierówność możemy zapisać w postaci $b < 2\sqrt{a}$ i $b > -2\sqrt{a}$, zatem $b \in (-2\sqrt{a}, 2\sqrt{a})$.

Przykład 4

Wyznamy liczbę miejsc zerowych funkcji określonej wzorem $f(x) = ax^2 + (b + 1)x$ w zależności od wartości parametru b , jeżeli $a \neq 0$.

Obliczamy:

$$\Delta = (b + 1)^2 - 4 \cdot a \cdot 0 = (b + 1)^2$$

- funkcja nie ma miejsc zerowych, gdy $\Delta < 0$, zatem $(b + 1)^2 < 0$, czyli $b \in \emptyset$,
- funkcja ma dokładnie jedno miejsce zerowe, gdy $\Delta = 0$, zatem $(b + 1)^2 = 0$, czyli $b = -1$,
- funkcja ma dokładnie dwa miejsca zerowe, gdy $\Delta > 0$, zatem $(b + 1)^2 > 0$, czyli $b \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$.

Słownik

miejsce zerowe

argument, dla którego wartość funkcji wynosi 0, pierwsza współrzędna punktu przecięcia wykresu funkcji z osią X

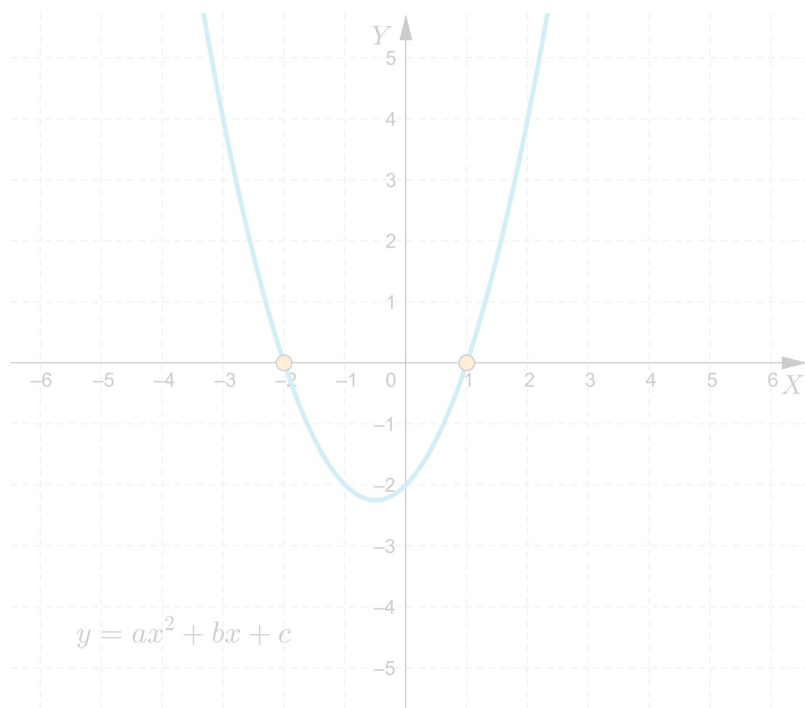
funkcja kwadratowa

funkcja określona za pomocą wzoru $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ oraz $a \neq 0$

Aplet

Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższym apletem i przeanalizuj, jak zmienia się liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej wraz ze zmianą wartości współczynników a , b i c .



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D188gFmBl>

Polecenie 2




Podaj liczbę miejsc zerowych funkcji kwadratowych określonych wzorami:

a) $f(x) = x^2 + 5$

b) $f(x) = -x^2 + 10x - 25$

c) $f(x) = x^2 - 2x$

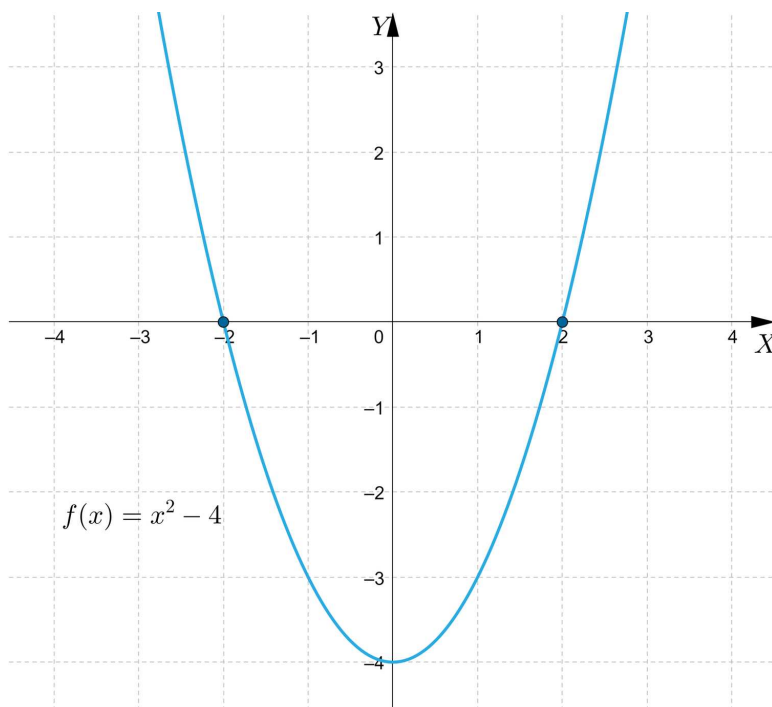
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = x^2 - 4$.



Iloczyn miejsc zerowych tej funkcji wynosi:

8

-4

-8

Ćwiczenie 2



Określ znak wyróżnika funkcji kwadratowej.

Wzór funkcji	$\Delta > 0$	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$
$y = x^2 + 2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$y = 2x^2 - 6$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$y = x^2 + 4x + 4$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$y = -x^2 + x - 7$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Ćwiczenie 3



Nie sporządzając wykresu funkcji, określ liczbę jej miejsc zerowych.

$$y = -x^2 - 3 \quad \boxed{}$$

$$y = -x^2 + 10 \quad \boxed{}$$

$$y = x^2 + 6x + 9 \quad \boxed{}$$

$$y = 5x^2 + 2x - 1 \quad \boxed{}$$

$$y = -2x^2 - 3x + 4 \quad \boxed{}$$

Ćwiczenie 4



Funkcja f jest określona za pomocą wzoru $f(x) = 2x^2 - x + c$.

Połącz w pary wartość parametru c z liczbą miejsc zerowych funkcji f dla wybranej wartości c .

$$c = 0$$

Dwa miejsca zerowe.

$$c = \frac{1}{8}$$

Jedno miejsce zerowe.

$$c = 2$$

Brak miejsc zerowych.

Ćwiczenie 5



Funkcja kwadratowa określona wzorem $f(x) = -x^2 + 2ax - 2$:

ma jedno miejsce zerowe dla $a = 0$

ma dwa miejsca zerowe dla $a = 5$

ma jedno miejsce zerowe dla $a = \sqrt{2}$

ma dwa miejsca zerowe dla $a = 1$

Ćwiczenie 6



Przeciągnij w puste miejsca odpowiednie liczby.

Miejszem zerowym każdej funkcji kwadratowej postaci $f(x) = ax^2 + bx$ jest liczba

.

Funkcja kwadratowa określona wzorem $f(x) = -2x^2 + 1 + c$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe dla $c =$.

Jeżeli dla funkcji określonej wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$ zachodzi zależność $b^2 > 4ac$, to funkcja ma miejsca zerowe.

-1

3

-1

0

2

1

Ćwiczenie 7



Wstaw w tekst odpowiednie liczby.

Dana jest funkcja kwadratowa określona wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Funkcja ma jedno miejsce zerowe, gdy:

$a = -1, b = 2\sqrt{2}$ oraz $c =$

$a =$, $b = -12, c = 9$

$a = 12, b =$, $c = 0$

Ćwiczenie 8



Wyznacz wartość parametru p , dla którego funkcja określona wzorem $f(x) = 2x^2 - px + 3$ nie ma miejsc zerowych.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Miejsca zerowe funkcji kwadratowej

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:

4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane;

8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje);

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykorzystuje definicję miejsca zerowego funkcji do ustalenia warunków na istnienie miejsc zerowych funkcji kwadratowej,
- określa liczbę miejsc zerowych funkcji kwadratowej,
- oblicza wartości parametrów, dla których funkcja kwadratowa ma określoną liczbę miejsc zerowych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki pracy

- praca z tekstem
- dyskusja
- analiza przypadku

Środki dydaktyczne

- komputery z dostępem do internetu
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Formy pracy:

- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego;
- praca w parach.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom cele lekcji i formułuje wspólnie z uczniami kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie podzieleni na małe grupy, analizują aplet, dyskutując od czego może zależeć liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej.
2. W czasie pracy wykonują notatki i obliczenia, zapisują wnioski.
3. Uczniowie zapoznają się z wiadomościami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”, porównują ze swoimi wcześniejszymi zapiskami, korygują je i wspólnie ustalają wnioski na temat liczby miejsc zerowych funkcji kwadratowej.
4. Uczniowie w parach przygotowują po dwa zadania, których rozwiązanie polega na wskazaniu liczby miejsc zerowych funkcji kwadratowej. Pary wymieniają się zadaniami i rozwiązują je. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
5. Uczniowie w grupach 4 - osobowych rozwiązują zadania numer 3 - 8 z sekcji „Sprawdź się”. Po wykonaniu zadań omawiają ich rozwiązania z całą klasą.
6. Uczniowie indywidualnie, w zależności od swoich umiejętności, konstruują zadania analogiczne do zadania 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie wymieniają się zadaniami z kolegą lub koleżanką.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Miejsca zerowe funkcji kwadratowej](#)

Wskazówki metodyczne:

- Aplet można wykorzystać do graficznego sprawdzania liczby rozwiązań równań kwadratowych.