# Pojęcie prawdopodobieństwa

# Pojęcie prawdopodobieństwa

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

W siedemanstowiecznej Francji bardzo popularna była gra w kości. Grali w nią wszyscy – żeglarze, żołnierze, arystokraci i zawodowi hazardziści. Jednym z nich był Antoine Gombaud, znany jako Chevalier de Méré, ekstrawagancki pisarz, matematyk – amator. Jak każdy hazardzista, chciał znaleźć pewny sposób na wygraną. W przeciwieństwie do większości graczy, prowadził systematyczne obserwacje wyrzucanych liczb oczek. Zauważył, że szansa wypadnięcia każdej z sześciu liczb oczek na kostce jest taka sama. Zatem szansa uzyskania szóstki w jednym rzucie wynosi $1 : 6$. Czyli w czterech rzutach szansa uzyskania szóstki będzie czterokrotnie większa, czyli wynosi $4 : 6$. Wyciągnął więc wniosek, że gdyby rozegrać wystarczającą liczbę gier, sukces będzie zapewniony. Gombaud co prawda zarobił na grze w kości mnóstwo pieniędzy, ale jak się okazuje powyższe rozumowanie nie było słuszne i w tym przypadku czekały go nieprzyjemne niespodzianki…

Pieter Quast
*Żołnierze grają w kości* (1643 r.)
Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

Niemniej jednak jego zmagania z hazardem zaowocowały obfitą korespondencją ze znanym ówczesnym matematykiem B. Pascalem, a dyskusje korespondencyjne zapoczątkowały rozwój nowej gałęzi matematyki, zwanej rachunkiem prawdopodobieństwa.

Jeśli zapoznasz się z treściami zawartymi w tym materiale, poznasz jedną z definicji określających prawdopodobieństwo, a także dowiesz się, jaki problem spędzał sen z oczu wspomnianemu wyżej kawalerowi de Méré.

**Twoje cele**

- Obliczysz częstość danego zdarzenia.
- Zbudujesz aksjomatyczną definicję prawdopodobieństwa.
- Określisz rozkład prawdopodobieństwa w danym doświadczeniu losowym.
- Obliczysz prawdopodobieństwo zdarzenia.

# Przeczytaj

## Częstość zdarzenia

Praktycznym wymiarem rachunku prawdopodobieństwa jest dostarczenie metod określenia, jak często zajdzie dane zdarzenie. Prawdopodobieństwo można więc uznać za liczbową charakterystykę możliwości zajścia zdarzenia losowego w warunkach nieskończonej powtarzalności.

Zatem prawdopodobieństwo będziemy określać tylko dla doświadczeń, które można powtarzać dowolną liczbę razy.

> **Ważne!**
>
> Jeśli wśród $n$ powtarzalnych doświadczeń dany wynik pojawia się $k$ razy ($k \leq n$, $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_+$), to liczbę $\frac{k}{n}$ nazwiemy częstością tego wyniku.

Dla niektórych doświadczeń losowych ich częstość, przy dużej liczbie doświadczeń, koncentruje się wokół pewnej liczby. Intuicyjnie można więc określić prawdopodobieństwo, jako liczbę, wokół której stabilizuje się częstość. Rachunek prawdopodobieństwa dotyczy więc zdarzeń występujących w powtarzalnych doświadczeniach, o stabilizującej się częstości, wraz ze wzrostem liczby powtórzeń doświadczenia.

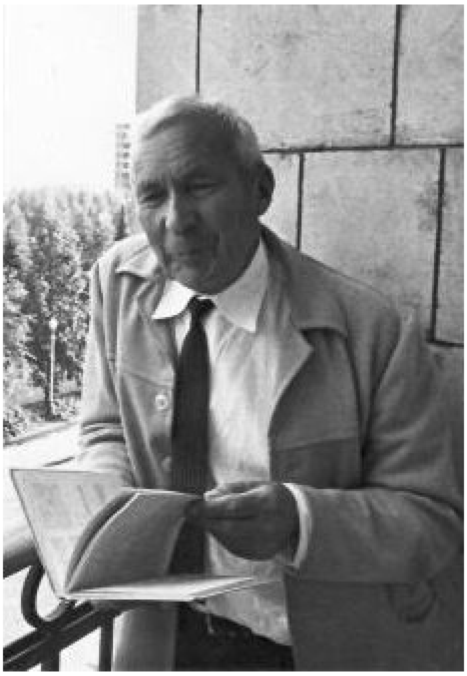
Każdemu takiemu zdarzeniu $A$ można więc przyporządkować pewną liczbę $P(A)$, określającą szansę zajścia tego zdarzenia w pojedynczym doświadczeniu. Przy czym liczba $P(A)$ musi być tak zdefiniowana, aby w dostatecznie długim ciągu powtórzeń tego samego doświadczenia losowego, przeprowadzonego w tych samych warunkach, częstość pojawienia się zdarzenia $A$ zbliżała się nieograniczenie do tej samej liczby.

Ustalimy teraz kilka własności częstości, które pomogą nam zdefiniować prawdopodobieństwo.

- Zdarzenie pewne zachodzi zawsze, więc częstość tego zdarzenia jest równa $1$.
- Zdarzenie niemożliwe nie zachodzi nigdy, więc jego częstość jest równa $0$.
- Częstość zajścia danego zdarzenia elementarnego jest więc zawsze liczbą nieujemną i nie większą od $1$.
- Jeśli zdarzenia $A$ i $B$ są rozłączne, $A \cap B = \emptyset$, to nie ma zdarzeń elementarnych sprzyjających jednocześnie tym zdarzeniom. Zatem częstość zajścia zdarzenia $A \cup B$ będzie równa sumie zajścia zdarzenia $A$ i zajścia zdarzenia $B$.

## Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa

Opierając się na zaobserwowanych prawidłowościach, w 1933 r. uczony rosyjski Andriej Kołmogorow podał definicję, zwaną aksjomatyczną definicją prawdopodobieństwa.



Andriej Nikołajewicz Kołmogorow

Андрéй Николáевич Колмогóров

Źródło: Konrad Jacobs, dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, licencja: CC BY-SA 2.0.

**Definicja: Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa**

Niech $\Omega$ będzie skończoną przestrzenią zdarzeń elementarnych. Prawdopodobieństwem określonym na tej przestrzeni zdarzeń elementarnych nazywamy funkcję $P$, która każdemu zdarzeniu $A$, takiemu że $A \subset \Omega$ przyporządkowuje liczbę rzeczywistą $P(A)$ spełniającą warunki:

- $P(A) \geq 0$,
- $P(\Omega) = 1$,
- jeśli $B \subset \Omega$ i $A \cap B = \emptyset$ to $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Liczbę $P(A)$ nazywamy prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia $A$.

Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa nie jest zbyt wygodna w zastosowaniach praktycznych, gdyż nie określa dokładnie ani wyboru zbioru zdarzeń elementarnych, ani nie określa w sposób jednoznaczny funkcji przyporządkowującej zdarzeniom liczby rzeczywiste (takich funkcji może być wiele). Z definicji nie wynika też w jaki sposób należy liczyć prawdopodobieństwo poszczególnych zdarzeń.

## Rozkład prawdopodobieństwa

**Przykład 1**

Na stole leży 10 kartek. Na każdej kartce zapisane jest jedno pytanie. Na czterech kartkach są pytania z algebry, a na sześciu z geometrii. Uczeń losuje jedno pytanie.

Przyjmijmy, że prawdopodobieństwa wylosowania pytań z algebry i geometrii są proporcjonalne do liczby pytań z tych dziedzin matematyki. Możliwe wyniki losowania i ich prawdopodobieństwa przedstawia tabela.

| Pytanie | Algebra | Geometria |
|---|---|---|
| prawdopodobieństwo | $\frac{4}{10}$ | $\frac{6}{10}$ |

Mówimy, że w tabeli podaliśmy **rozkład prawdopodobieństwa**.

**Definicja: Rozkład prawdopodobieństwa**

Niech $\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n\}$ będzie zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych (wyników) pewnego doświadczenia losowego. Każdemu wynikowi $\omega_i$ $(1 \leq i \leq n)$ przyporządkowujemy nieujemną liczbę $p_i$ tak, aby spełniony był warunek

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$$

Liczba $p_i$ to prawdopodobieństwo zdarzenia $\omega_i$.

Mówimy, że na przestrzeni $\Omega$ został określony rozkład prawdopodobieństwa.

**Przykład 2**

Doświadczenie polega na rzucie kostką, na ściankach której zapisane są liczby 1, 1, 2, 2, 2 , 5.

Określimy rozkład prawdopodobieństwa w tym doświadczeniu.

$\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3\}$, gdzie:

$\omega_1$ – otrzymanie jedynki,

$\omega_2$ – otrzymanie dwójki,

$\omega_3$ – otrzymanie piątki.

Zatem:

$p(\omega_1) = \frac{2}{6}$,

$p(\omega_2) = \frac{3}{6}$,

$p(\omega_3) = \frac{1}{6}$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Wynik rzutu $(\omega_i)$ | 1 | 2 | 5 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Prawdopodobieństwo $p(\omega_i)$ | $\frac{2}{6}$ | $\frac{3}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

$p(\omega_1) + p(\omega_2) + p(\omega_3) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = 1$

Znając rozkład prawdopodobieństwa na zbiorze możliwych wyników $\Omega$, możemy zdefiniować prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$.

**Definicja: Prawdopodobieństwo zdarzenia**

Niech $A \subset \Omega$ i $A = \{\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_k\}$. Prawdopodobieństwem $P(A)$ zdarzenia $A$ nazywamy sumę prawdopodobieństw zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu $A$.

$$P(A) = p_1 + p_a + \ldots + p_k$$

Zauważmy, że $0 \leq P(A) \leq 1$.

**Przykład 3**

W tabeli przedstawiony jest rozkład prawdopodobieństwa doświadczenia losowego polegającego na rzucie niesymetryczną kostką do gry.

| $\omega_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{9}$ |

Obliczymy prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby oczek, będącej liczbą pierwszą.

Oznaczmy:
$A$ – zdarzenie polegające na wyrzuceniu liczby oczek, będącej liczbą pierwszą.

Wtedy $A = \{2,\ 3,\ 5\}$.

$P(A) = \frac{2}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{4+6+3}{18} = \frac{13}{18}$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby oczek, będącej liczbą pierwszą jest równe $\frac{13}{18}$.

**Przykład 4**

Rzucamy dwa razy symetryczną monetą.

Rozpatrujemy doświadczenie, którego wynikiem jest liczba wyrzuconych orłów.

W tym doświadczeniu:

$\Omega = \{0,\ 1,\ 2\}$

Rozkład prawdopodobieństwa:

| Liczba orłów | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| Prawdopodobieństwo | $\frac{1}{4}$ | $\frac{2}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |

Obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia: $A$ – wypadł co najmniej jeden orzeł.

$P(A) = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo, że co najmniej raz wypadł orzeł jest równe $\frac{3}{4}$.

## Słownik

**aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa**

niech $\Omega$ będzie skończoną przestrzenią zdarzeń elementarnych; prawdopodobieństwem określonym na tej przestrzeni zdarzeń elementarnych nazywamy funkcję $P$, która każdemu zdarzeniu $A$, takiemu że $A \subset \Omega$ przyporządkowuje liczbę rzeczywistą $P(A)$ spełniającą warunki:

- $P(A) \geq 0$
- $P(\Omega) = 1$
- jeśli $B \subset \Omega$ i $A \cap B = \emptyset$ to $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

# Infografika

**Polecenie 1**

Być może nigdy nie zdarzyło Ci się grać w kości, ale możesz mi wierzyć – ta gra była przez kilka stuleci pasjonującą rozrywką nie tylko dla zawodowych graczy. Wybitne umysły europejskie poszukiwały odpowiedzi na pytanie *Jak grać, żeby wygrać?* Wiemy już, że jednym z nich był Francus Antoine Gombaud.

Wiemy też, że Antoine Gombaud uważał, iż szansa wyrzucenia co najmniej jednej szóstki przy czterech rzutach kostką wynosi: $4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$. A ponieważ wykorzystywał jedynie „regułę trzech”, doszedł do wniosku, że jeśli dorzuci jedną kostkę i będzie stawiał na podwójną szóstkę przy rzucie dwiema kostkami, to szansa na wygraną będzie taka sama jak w poprzednim przypadku. Bowiem dodatkowa kostka to $6$ razy więcej możliwości. Żeby jednak  szansa na wygraną nie zmniejszyła się, powinien rzucać $6$ razy dłużej, czyli $24$ razy. Wyliczył zatem takie samo prawdopodobieństwo: $24 \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$. Rozumowanie to nie jest jednak poprawne. Dlaczego – pozostawiamy Twojej dociekliwości.

Na razie podamy prostszy przykład innego błędnego rozumowania, opartego na dociekaniach kawalera de’Mere.

**Polecenie 2**

Rzucamy dwiema kostkami do gry i dodajemy liczby oczek, które wypadły na kostkach. Czy  częściej wypadnie suma oczek równa $5$ czy $9$? Odpowiedź uzasadnij.

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

**Ćwiczenie 1**

Rzucono niesymetryczną kostką. Prawdopodobieństwo otrzymania danej liczby oczek wpisano do tabelki.

| Liczba oczek | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Prawdopodobieństwo | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{6}$ |

**Ćwiczenie 2**

**Ćwiczenie 3**

**Ćwiczenie 4**

**Ćwiczenie 5**

**Ćwiczenie 6**

**Ćwiczenie 7**

Pewna sześcienna kostka do gry jest tak skonstruowana, że prawdopodobieństwo wypadnięcia każdej ściany jest proporcjonalne do liczby oczek zapisanych na tej ścianie. Znajdź prawdopodobieństwo wyrzucenia $3$ lub $5$ oczek.

## Ćwiczenie 8

Rzucamy dwiema sześciennymi kostkami do gry. Gdy suma liczb otrzymanych oczek na obu kostkach jest równa $5$, wygrywa gracz $A$. Gdy suma liczb otrzymanych oczek na obu kostkach jest równa $10$, wygrywa gracz $B$.

Gracz $A$ twierdzi, że szanse wygranej dla każdego z nich są równe, bo

$5 = 4 + 1 = 3 + 2$ – dwie możliwości,

$10 = 6 + 4 = 5 + 5$ – dwie możliwości.

Czy gracz $A$ ma rację? Uzasadnij odpowiedź.

# Dla nauczyciela

**Autor:** Justyna Cybulska

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat: Pojęcie prawdopodobieństwa**

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony, klasa III lub IV

**Podstawa programowa:**

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- oblicza częstość danego zdarzenia
- buduje aksjomatyczną definicję prawdopodobieństwa
- określa rozkład prawdopodobieństwa w danym doświadczeniu losowym
- oblicza prawdopodobieństwo zdarzenia

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm

**Metody i techniki nauczania:**

- symulacja doświadczalna
- oszukaj oszusta

**Formy pracy:**

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

**Środki dydaktyczne:**

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- sześcienne kostki do gry, monety, niesymetryczne kostki do gry

**Przebieg lekcji**

**Faza wstępna:**

1. Jeden z uczniów prezentuje (przygotowany wcześniej w domu) materiał przybliżający postać A. Gombauda, z podkreśleniem jego związków z rozwojem rachunku prawdopodobieństwa.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

**Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie pracują w małych grupach metodą symulacji doświadczalnej. Wykonują rzuty kostkami do gry, zapisują wyniki. Na ich podstawie ustalają własności częstości zdarzeń i budują własną, intuicyjną definicję prawdopodobieństwa.
2. Liderzy prezentują wyniki prac swoich grup. Uczniowie wspólne uzgadniają i zapisują aksjomatyczną definicję prawdopodobieństwa (nauczyciel musi przy tym tak kierować dyskusją uczniów, aby zapisana definicja była zgodna z ogólnie przyjętą).
3. Uczniowie zapoznają się z materiałem z sekcji „Przeczytaj” i bazując nadal na rzutach kośćmi, tworzą rozkłady prawdopodobieństwa wyników zaplanowanych i przeprowadzonych przez siebie doświadczeń.
4. Końcowym elementem tej części zajęć jest gra – oszukaj oszusta. Zadaniem każdej z grup jest wymyślenie z pozoru prawdziwego twierdzenia (opartego np. na problemie kawalera de’Mere, zamieszczonym w infografice), które można zaprezentować hipotetycznym partnerom gry w kości, aby ich wprowadzić w błąd.
5. Grupy przedstawiają swoje pomysły.
6. Najciekawszy pomysł (który musi być uzasadniony z wykorzystaniem np. aparatu kombinatorycznego), może zostać nagrodzony przez nauczyciela.

**Faza podsumowująca:**

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności. Liderzy grup dzielą się refleksjami na temat współpracy w grupie, rozważanych problemów.

2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup.

**Praca domowa:**

1. Uczniowie wykonują w domu ćwiczenia interaktywne.
2. Zadaniem dla chętnych uczniów jest znalezienie w dostępnych źródłach przykładu paradoksu związanego z rachunkiem prawdopodobieństwa i zaprezentowanie go na następnej lekcji.

**Materiały pomocnicze:**

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa. Własności prawdopodobieństwa. Obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń losowych

**Wskazówki metodyczne:**

Infografikę można wykorzystać również na zajęciach z kombinatoryki.