



Trójkąt opisany na okręgu

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Mamy zakupić narożną szafkę w kształcie graniastoslupa, którego podstawą jest trójkąt prostokątny równoramienny. Jakie mają być minimalne rozmiary podstawy tej szafki, żeby zmieściły się w niej okrągłe półmiski o średnicy 40 cm?

Pytanie powyższe sprowadza się do problemu znalezienia najmniejszego trójkąta spełniającego określone wymagania, w którym zmieści się dany okrąg. W języku planimetrii jest to problem opisanego trójkąta na okręgu.

Ten materiał poświęcony jest omówieniu własności trójkątów opisanych na okręgu.

Twoje cele

- Zastosujesz podobieństwo trójkątów i własności okręgu wpisanego w trójkąt do konstrukcji trójkąta opisanego na okręgu.
- Wyjaśnisz powiązanie trójkąta opisanego na okręgu z pojęciem stycznej do okręgu
- Określisz warunki, jakie musi spełnić trójkąt wpisany w okrąg, aby wierzchołki tego trójkąta były punktami styczności trójkąta opisanego na tym okręgu, Skonstruujesz trójkąt opisany na okręgu.
- Opiszysz na okręgu trójkąty o znanych własnościach i zastosujesz ich własności w problemach praktycznych i zagadnieniach matematycznych.

Przeczytaj

Definicja: Trójkąt opisany na okręgu

Trójkąt opisany na okręgu, jest to trójkąt, którego wszystkie boki są styczne do danego okręgu.

Trójkąt jest opisany na okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy ten okrąg jest wpisany w ten trójkąt.

W przypadku okręgu wpisanego w trójkąt, zwykle dany jest trójkąt i trzeba wpisać weń okrąg. Dla każdego trójkąta istnieje dokładnie jeden okrąg wpisany.

Natomiast w przypadku trójkąta opisanego, zwykle to okrąg jest dany i trzeba zbudować trójkąt tak, żeby ten okrąg był wpisany w trójkąt. Okazuje się, że na danym okręgu można opisać nieskończenie wiele trójkątów, a dokładniej dowolny trójkąt z dokładnością do podobieństwa.

Twierdzenie: Twierdzenie o trójkącie opisanym na okręgu

Dany jest okrąg o środku O i promieniu r oraz trójkąt $A'B'C'$. Wówczas na tym okręgu możemy opisać trójkąt ABC podobny do trójkąta $A'B'C'$.

Dowód

Opiszemy jak skonstruować trójkąt ABC podobny do trójkąta $A'B'C'$.

Zaczynamy od skonstruowania okręgu wpisanego w trójkąt $A'B'C'$ i przyjmijmy że promień tego okręgu wynosi r' .

Wówczas okrąg jest podobny do danego okręgu w skali $k = \frac{r'}{r}$. Przekształcamy figurę będącą trójkątem z wpisanym okręgiem na figurę podobną w skali $k_1 = \frac{r}{r'}$.

Nazywamy wierzchołki skonstruowanego trójkąta (odpowiednio) A, B, C .

Przykład 1

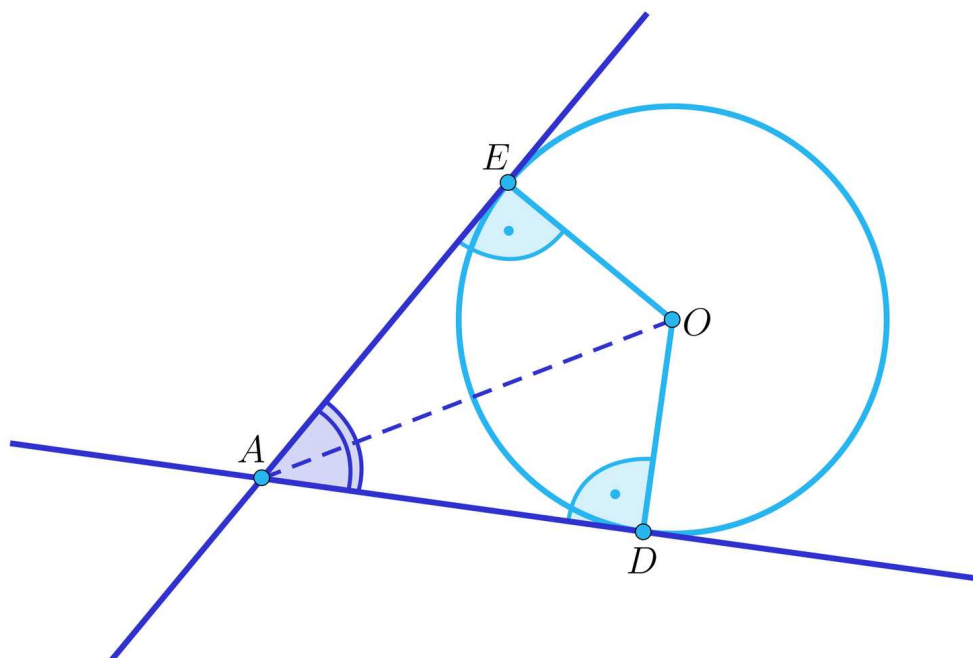
Okrąg wpisany w trójkąt egipski (trójkąt o bokach 3, 4, 5) ma promień równy 1.

Wyznamy długości boków **trójkąta podobnego** do trójkąta egipskiego opisanego na okręgu o promieniu r .

Z powyższego twierdzenia skala podobieństwa wynosi $k = \frac{r}{1} = r$. Stąd trójkąt podobny do trójkąta egipskiego opisanego na okręgu o promieniu r ma boki długości $3r, 4r, 5r$.

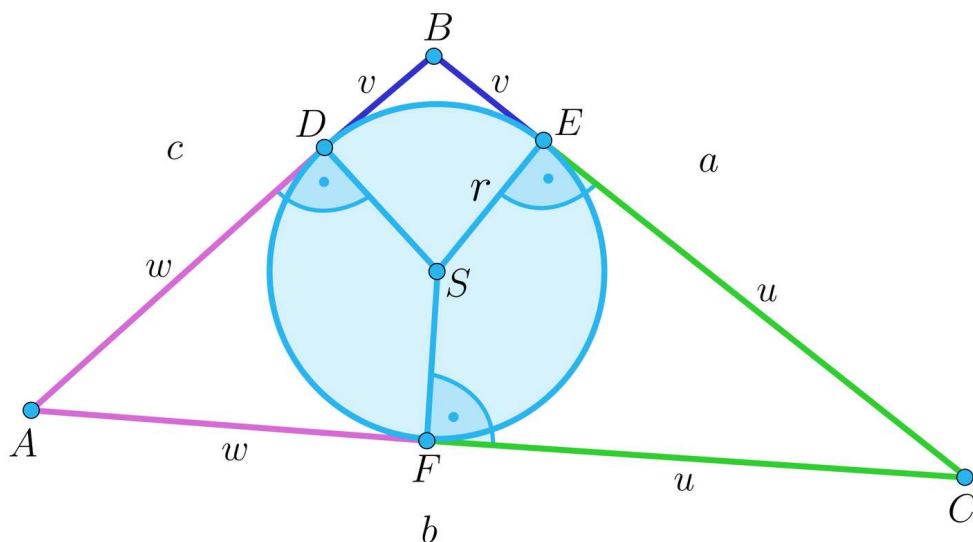
Prosta styczna do okręgu to prosta, która ma dokładnie jeden punkt wspólny z okręgiem.

Własność: Własności prostych stycznych do okręgu



1. Z dowolnego punktu A leżącego na zewnątrz okręgu można poprowadzić dokładnie dwie proste styczne do okręgu.
2. Promień okręgu poprowadzony do punktu styczności z prostą styczną jest prostopadły do tej prostej.
3. Jeśli z punktu A leżącego na zewnątrz okręgu poprowadzimy proste styczne do okręgu w punktach D i E , to trójkąty AOD i AOE są przystającymi trójkątami prostokątnymi. Stąd odcinki AD i AE mają równe długości. Odcinki te nazywamy **odcinkami stycznymi**. Natomiast półprosta AO jest dwusieczną kąta DAE .

Własność: Własność odcinków stycznych w trójkącie opisanym na okręgu



Niech D, E, F będą punktami styczności okręgu z bokami trójkąta. Wtedy przy oznaczeniach z rysunku:

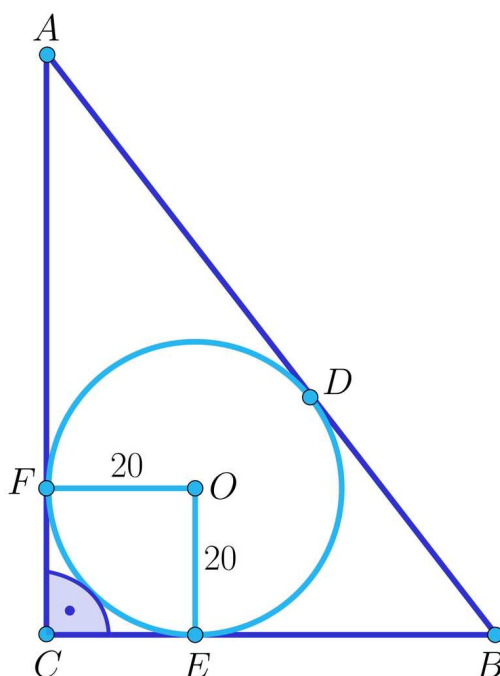
$$|CE| = |CF| = u = \frac{a+b-c}{2},$$

$$|BD| = |BE| = v = \frac{a+c-b}{2},$$

$$|AD| = |AF| = w = \frac{b+c-a}{2}$$

Przykład 2

Mamy zakupić narożną szafkę w kształcie graniastosłupa, którego podstawą jest trójkąt prostokątny taki, że stosunek długości przyprostokątnych jest 3:4. Wyznamy minimalne rozmiary podstawy tej szafki tak, żeby zmieściły się w niej okrągłe półmiski o średnicy 40 cm.



Ponieważ stosunek długości przyprostokątnych jest 3:4, to niech $|CB| = 3x$, $|CA| = 4x$. Wtedy $|AB| = 5x$.

Korzystając z własności odcinków stycznych dostajemy

$$5x = 3x - 20 + 4x - 20 = 7x - 40$$

$$2x = 40$$

$$x = 20$$

Ostatecznie, wymiary szafki wynoszą 60 cm, 80 cm, 100 cm.

Twierdzenie: Długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt

Promień okręgu wpisanego w trójkąt o bokach a, b, c i polu P wynosi $r = \frac{2P}{a+b+c}$.

Przykład 3

Wyznamy długości boków trójkąta opisanego na okręgu o promieniu $r = 10$, jeżeli wiadomo, że stosunek boków tego trójkąta wynosi 7:9:12.

Wyznamy promień okręgu wpisanego w trójkąt o bokach 7, 9, 12. Promień tego okręgu wyznaczymy ze wzoru wynosi $r' = \frac{2P}{a+b+c}$.

Pole wyznaczymy ze wzoru Herona

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{14 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2} = 14\sqrt{5}.$$

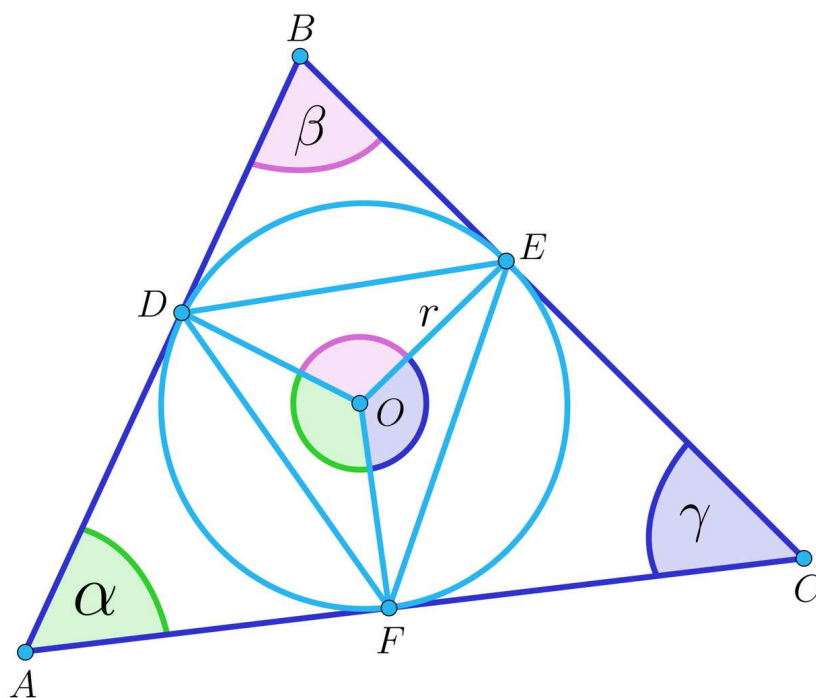
$$\text{Stąd } r' = \frac{2 \cdot 14\sqrt{5}}{28} = \sqrt{5}.$$

$$\text{Wyznamy skalę podobieństwa } k = \frac{r}{r'} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}.$$

Ostatecznie, trójkąt opisany na okręgu o promieniu $r = 10$, którego stosunek boków wynosi 7:9:12, ma boki długości $14\sqrt{5}, 18\sqrt{5}, 24\sqrt{5}$.

Kąty w trójkącie opisanym na okręgu

Na rysunku przedstawiony jest trójkąt ABC opisany na okręgu o środku O i promieniu r . Punkty D, E, F są punktami styczności. Tym samym kolorem oznaczone są kąty trójkąta i odpowiadające im kąty środkowe w okręgu.



Wówczas kąty środkowe mają miary:

1. Kąt $\sphericalangle DOF$ ma miarę $\sphericalangle DOF = 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \alpha$, bo suma miar kątów w czworokącie wynosi 360° oraz promienie okręgu poprowadzone do punktów styczności są prostopadłe do boków.
2. Analogicznie, $\sphericalangle DOE = 180^\circ - \beta$ i $\sphericalangle EOF = 180^\circ - \gamma$.

Powyższa własność prowadzi do konstrukcji trójkąta opisanego na podstawie określenia punktów styczności:

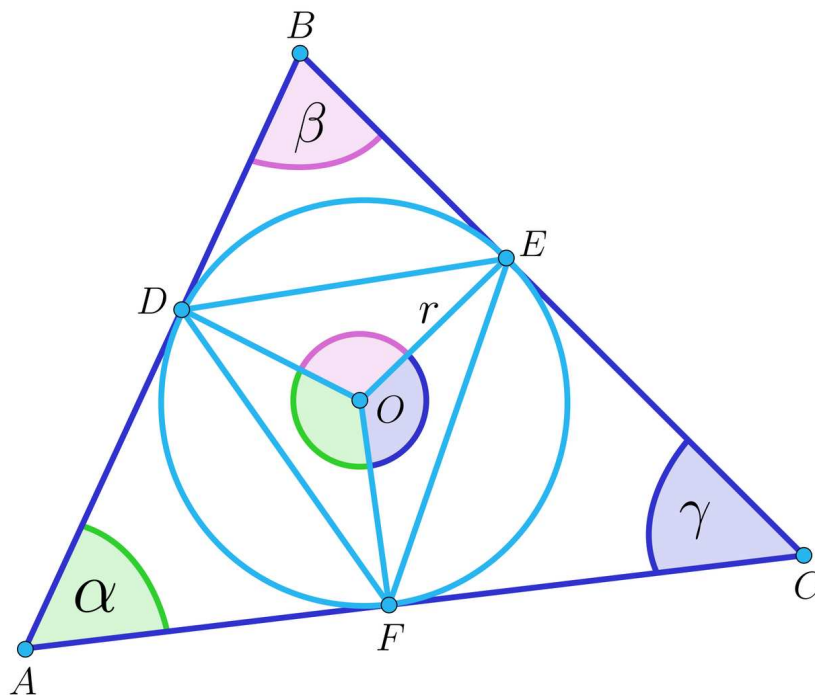
Własność: Konstrukcja trójkąta opisanego na podstawie określenia punktów styczności

Jeżeli na okręgu zaznaczone są trzy punkty D, E, F takie, że kąty środkowe oparte na cięciwach DE, EF, FD mają miary mniejsze od 180° , to trójkąt, którego wierzchołkami są punkty przecięcia stycznych do okręgu w punktach D, E, F , jest trójkątem opisanym na tym okręgu. Ponadto, każdy trójkąt opisany na okręgu można otrzymać w ten sposób.

Przykład 4

Pokażemy, że jeśli kąty środkowe oparte na cięciwach DE, EF, FD mają miary równe 120° , to trójkąt opisany na okręgu, styczny do tego okręgu w punktach D, E, F jest trójkątem równobocznym.

Przy oznaczeniach z powyższego rysunku:

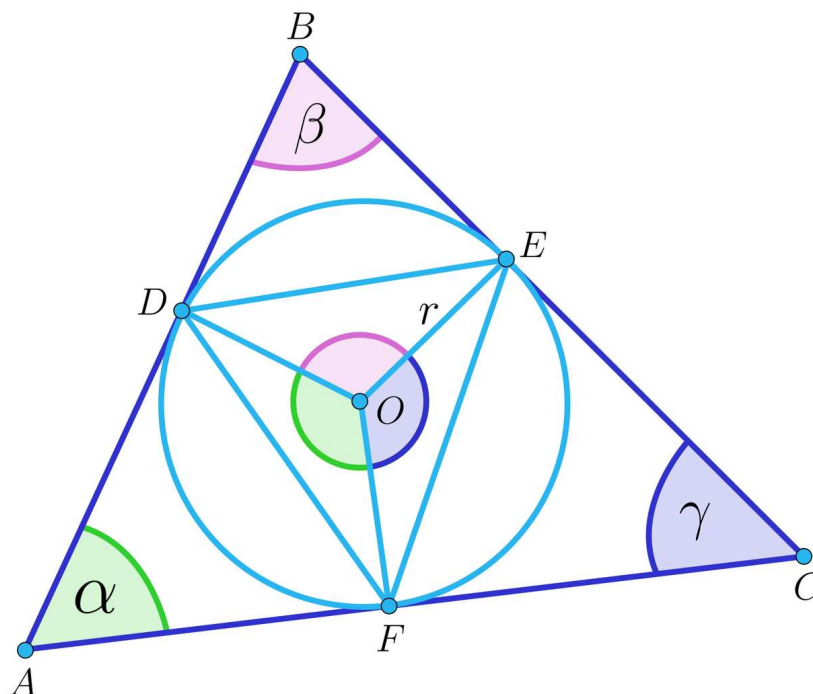


$\sphericalangle DOF = 180^\circ - \alpha$, więc $\alpha = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Analogicznie pozostałe kąty.

Stąd trójkąt opisany na okręgu jest równoboczny.

Kąty w trójkącie, którego wierzchołkami są punkty styczności okręgu i trójkąta opisanego na okręgu

Rozważmy trójkąt DEF , gdzie punkty D, E, F są punktami styczności okręgu i trójkąta opisanego na okręgu.



Wówczas kąty trójkąta DEF mają miary:

$\sphericalangle DEF = \frac{1}{2}\sphericalangle DOF = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, bo jest to kąt wpisany w okrąg oparty na tej samej cięciwie co kąt środkowy DOF .

Analogicznie, $\sphericalangle DFE = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$ i $\sphericalangle EDF = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$.

Wniosek:

Trójkąt DEF , gdzie punkty D, E, F są punktami styczności okręgu i trójkąta opisanego na okręgu jest trójkątem ostrokątnym. Ponadto, każdy trójkąt ostrokątny DEF wpisany w okrąg wyznacza trójkąt opisany na tym okręgu taki, że punkty D, E, F są punktami styczności okręgu i tego trójkąta.

Przykład 5

W okrąg wpisany jest trójkąt DEF o kątach $50^\circ, 60^\circ, 70^\circ$. Wyznamy kąty trójkąta opisanego na tym okręgu takiego, że punkty D, E, F są punktami styczności okręgu i tego trójkąta.

Niech α, β, γ oznaczają kąty tego trójkąta. Wtedy $50^\circ = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, więc

$\alpha = 2 \cdot 90^\circ - 2 \cdot 50^\circ = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$ oraz $\beta = 180^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 60^\circ$ oraz

$$\gamma = 180^\circ - 2 \cdot 70^\circ = 40^\circ.$$

Zatem trójkąt ten ma kąty 40° , 60° , 80° .

Słownik

podobieństwo figur

dwie figury nazywamy podobnymi, gdy istnieje podobieństwo o skali $k > 0$, które przekształca jedną figurę w drugą.

cechy podobieństwa trójkątów

warunki konieczne i wystarczające na to, aby dwa trójkąty były podobne

kąt środkowy okręgu o środku O oparty na cięciwie AB

kąt AOB oparty na łuku AB znajdujący się wewnątrz okręgu

kąt wpisany okręgu o środku O oparty na cięciwie AB

kąt APB , gdzie P jest punktem na okręgu leżącym po tej samej stronie cięciwy AB co środek okręgu

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją, starając się przyswoić treści w niej zawarte. Możesz wracać do niej wielokrotnie.

Trwa wczytywanie danych ..

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DSRunjjU7>




Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego trójkąta opisanego na okręgu.

Polecenie 2

Zaznacz prawidłową odpowiedź.

Polecenie 3

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

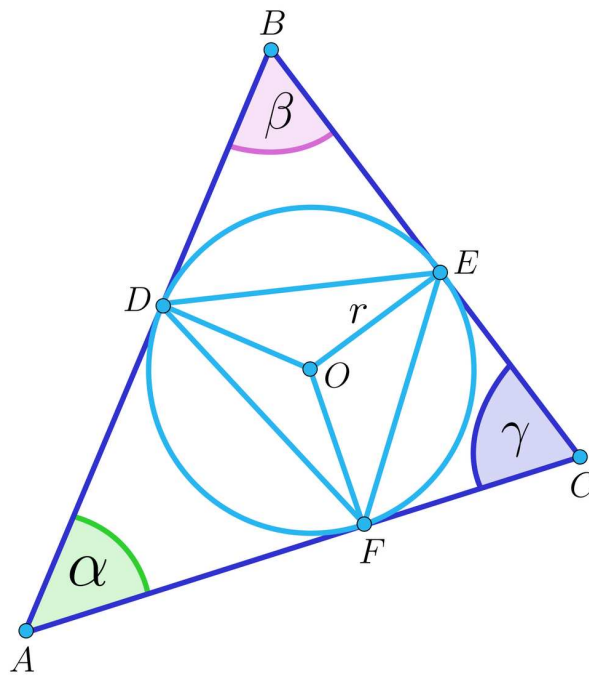
Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Na rysunku przedstawiony jest okrąg i trójkąt ABC opisany na tym okręgu. Jeżeli dwa kąty trójkąta ABC mają miary 90° i 60° oraz przeciwprostokątna AB ma długość 20, to:



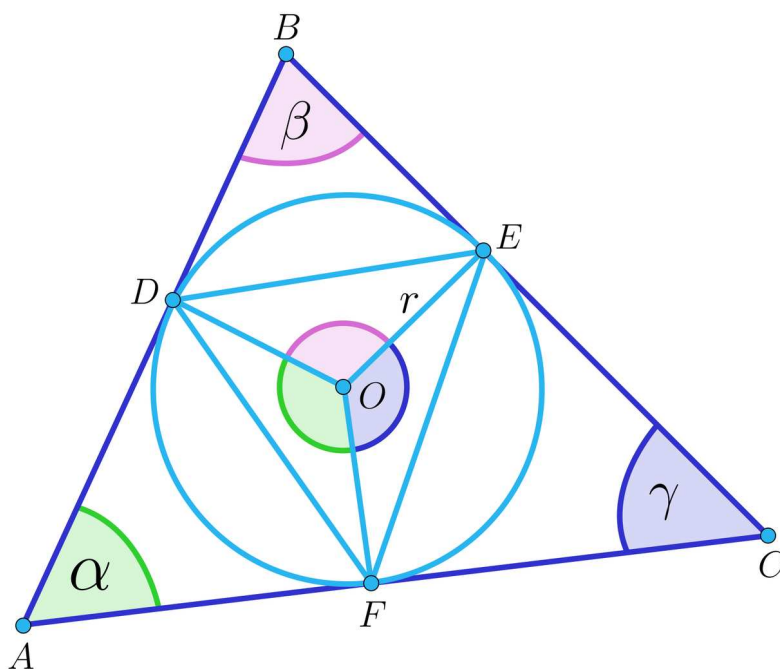
Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



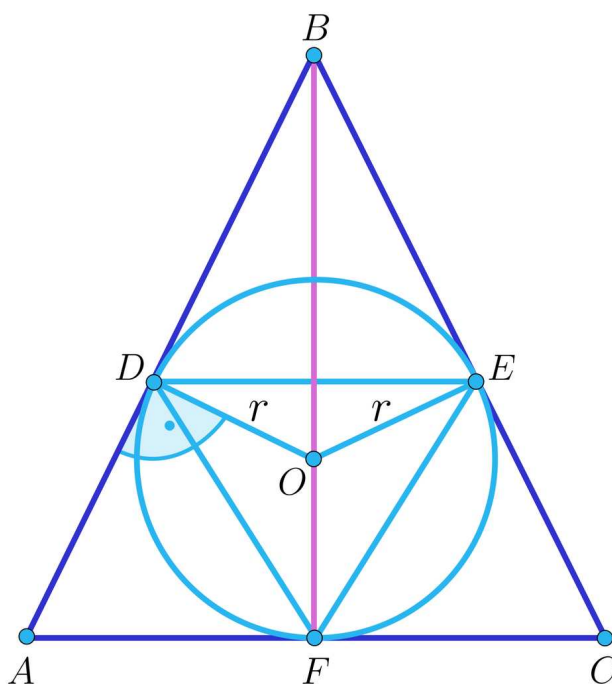
Jakie warunki powinny spełniać kąty środkowe oparte na cięciwach DE , EF , FD , żeby trójkąt ABC opisany na okręgu o środku O i promieniu r był prostokątny?



Ćwiczenie 5



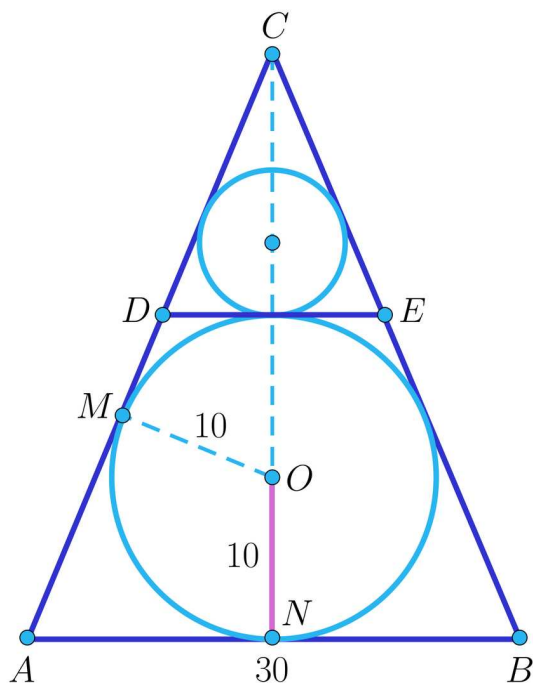
Na okręgu o środku O i promieniu r opisano trójkąt równoramienny taki, że odległość środka okręgu od wierzchołka przy ramionach tego trójkąta jest równa średnicy okręgu. Pokaż, że trójkąt ten jest równoboczny.



Ćwiczenie 6



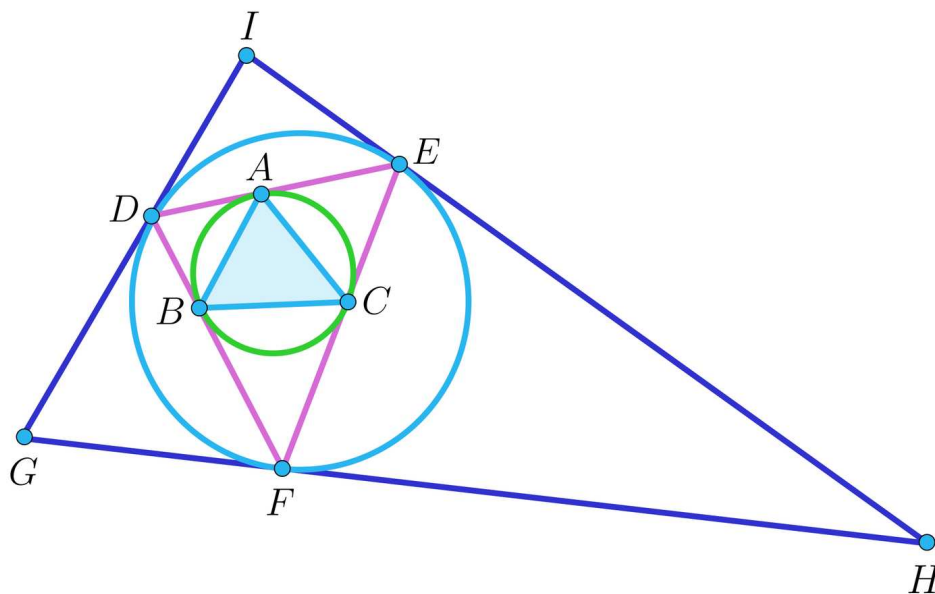
Na okręgu o promieniu 10 opisano trójkąt równoramienny o podstawie 30. Następnie poprowadzono odcinek DE styczny do okręgu i równoległy do podstawy trójkąta. W powstały trójkąt CDE wpisano okrąg. Wyznacz promień tego okręgu.



Ćwiczenie 7



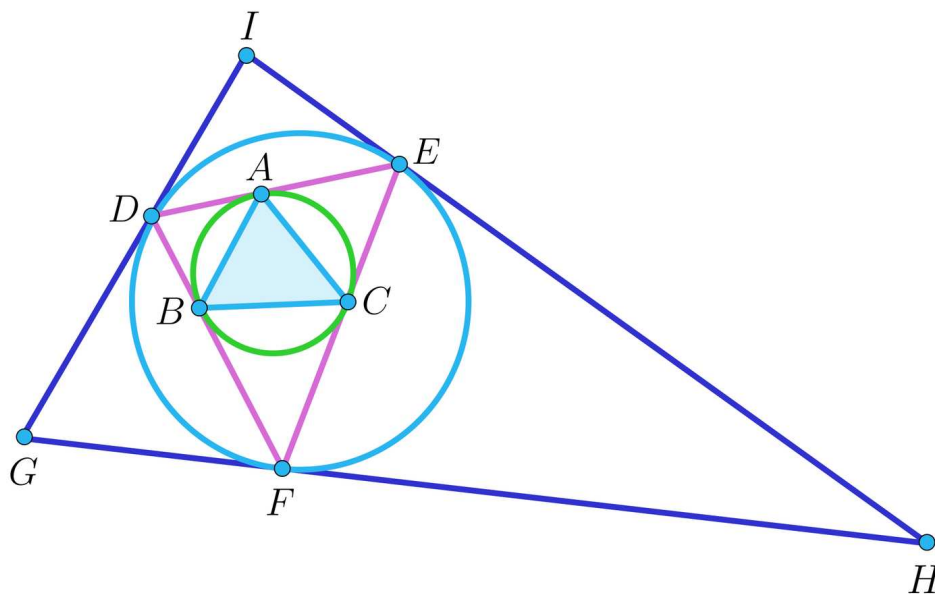
Na rysunku trójkąt ABC jest wpisany w okrąg zielony. Na tym okręgu opisano trójkąt DEF tak, żeby punkty A, B, C były punktami styczności. Następnie opisano okrąg niebieski na trójkącie DEF i opisano trójkąt GHI na tym okręgu tak, żeby punkty D, E, F były punktami styczności. Wyznacz kąty trójkątów DEF i ABC , jeżeli trójkąt GHI ma kąty $120^\circ, 40^\circ, 20^\circ$.



Ćwiczenie 8



Na rysunku trójkąt ABC jest wpisany w okrąg zielony. Na tym okręgu opisano trójkąt DEF tak, żeby punkty A, B, C były punktami styczności. Następnie opisano okrąg niebieski na trójkącie DEF i opisano trójkąt GHI na tym okręgu tak, żeby punkty D, E, F były punktami styczności. Jakie warunki muszą spełniać kąty trójkąta ABC , żeby opisana konstrukcja była możliwa?



Dla nauczyciela

Autor: Bogdan Staruch

Przedmiot: Matematyka

Temat: Trójkąt opisany na okręgu

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa;

5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych;

8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów;

10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności;

12) przeprowadza dowody geometryczne.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykorzystuje podobieństwo trójkątów i własności okręgu wpisanego w trójkąt do konstrukcji trójkąta opisanego na okręgu
- stosuje powiązanie trójkąta opisanego na okręgu z pojęciem stycznej do okręgu

- określa warunki, jakie musi spełnić trójkąt wpisany w okrąg, aby wierzchołki tego trójkąta były punktami styczności trójkąta opisanego na tym okręgu i konstruuje trójkąt opisany na tym okręgu
- opisuje na okręgu trójkąty o danych własnościach i stosuje ich własności w problemach praktycznych i zagadnieniach matematycznych

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- mapa myśli
- metoda tekstu przewodniego
- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń lub para uczniów miała do dyspozycji komputer; lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym

Przebieg zajęć:

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia temat lekcji, wyznacza cele i kryteria sukcesu.
2. Uczniowie tworzą mapy myśli dotyczące własności okręgów i stycznych do okręgów oraz okręgu wpisanego w trójkąt.

Faza realizacyjna:

1. Dyskusja - na czym polega różnica między wpisywaniem okręgu w trójkąt i opisywaniem trójkąta na okręgu.
2. Uczniowie w parach zapoznają się z animacją i rozwiązują zadania zawarte w Problemach.
3. Uczniowie metodą tekstu przewodniego analizują w parach przykłady zawarte w sekcji Przeczytaj.
4. Uczniowie formułują warunki, jakie powinien spełniać trójkąt wpisany w okrąg, aby wierzchołki tego trójkąta były punktami styczności trójkąta opisanego na tym okręgu. Ustalają kolejne kroki konstrukcji takiego okręgu.

Faza podsumowująca:

1. Uczniowie sprawdzają umiejętności i wiedzę, rozwiązując wskazane ćwiczenia 1 – 8.
2. Nauczyciel podsumowuje lekcję, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów.

Praca domowa

Uczniowie wykonują pomiar promienia największego okrągłego talerza/półmiska, jaki posiadają w domu. Wyznaczają minimalne rozmiary podstawy szafki trójkątnej (wiedząc, że podstawa jest prostokątnym trójkątem równoramiennym), w której zmieści się ten talerz.

Materiały pomocnicze:

[Okrąg wpisany w trójkąt](#)

Wskazówki metodyczne:

Uczeń może wykorzystać animację:

- podczas przygotowywania się do zajęć,
- do utrwalania wiedzy,
- jako inspiracja do stworzenia własnego samouczka lub prezentacji.

Materiał w animacji można wykorzystać w lekcji „Okrąg wpisany i opisany na trójkącie prostokątnym”.