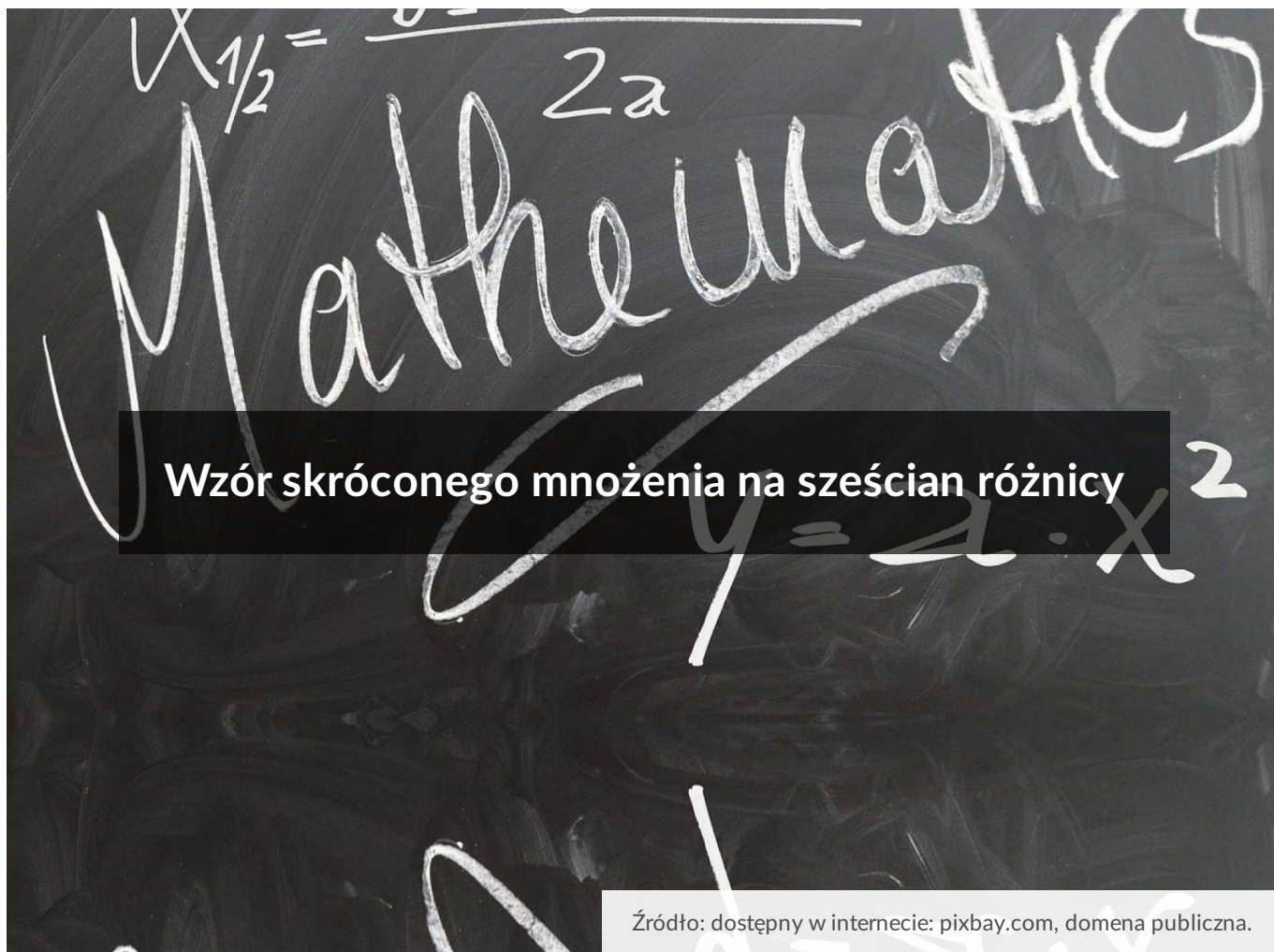


Wzór skróconego mnożenia na sześcián różnicy

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Wzór skróconego mnożenia na sześcián różnicy

Źródło: dostępny w internecie: pixbay.com, domena publiczna.

Omówimy teraz wzór skróconego mnożenia na sześcián różnicy dwóch wyrażeń. Wzór ten ma wiele zastosowań. Przede wszystkim pozwala szybciej wykonywać mnożenie niektórych wyrażeń algebraicznych, jak również zamieniać niektóre wyrażenia na iloczyny. Ma zastosowanie przy przekształcaniu wzorów, rozwiązywaniu równań i nierówności, znajdowaniu pierwiastków wielomianu.

Wykorzystanie **wzoru skróconego mnożenia na sześcián różnicy** pozwoli na obliczenie sześcianu różnicy dwóch wyrażeń, bez konieczności redukcji wyrazów podobnych.

Twoje cele

- Poznasz wzór skróconego mnożenia na sześcián różnicy dwóch wyrażeń.
- Zapiszesz sześcián różnicy dwóch wyrażeń w postaci sumy.
- Przekształcisz wyrażenia algebraiczne, wykorzystując wzór skróconego mnożenia na sześcián różnicy dwóch wyrażeń.

Przeczytaj

Wyprowadzimy teraz wzór na sześcian różnicy dwóch wyrażeń. W tym celu sześcian zapiszemy w postaci iloczynu dwumianu oraz kwadratu dwumianu i wykonamy mnożenie.

$$(a - b)^3 = (a - b)(a - b)^2 = (a - b)(a^2 - 2ab + b^2)$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Stąd:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Otrzymana równość zwana jest wzorem skróconego mnożenia na **sześcian różnicy dwóch wyrażeń**.

Ważne!

Wzór skróconego mnożenia na sześcian różnicy dwóch wyrażeń.

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Sześcian różnicy dwóch wyrażeń jest równy sześcianowi pierwszego wyrażenia minus potrojony iloczyn kwadratu pierwszego wyrażenia przez drugie, plus potrojony iloczyn pierwszego wyrażenia przez kwadrat drugiego, minus sześcian drugiego wyrażenia.

Korzystając ze wzoru na sześcian różnicy, można podnosić do sześcianu dwumiany, nie wykonując mnożenia.

Przykład 1

Zapiszemy każde z wyrażeń w postaci sumy.

$$(x - 1)^3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 - 1^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$
$$(a - \sqrt[3]{3})^3 = a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot \sqrt[3]{3} + 3 \cdot a \cdot \sqrt[3]{9} - 3 = a^3 - 3\sqrt[3]{3}a^2 + 3\sqrt[3]{9}a - 3$$
$$(x^2 - 4)^3 = x^6 - 3 \cdot x^4 \cdot 4 + 3 \cdot x^2 \cdot 4^2 - 4^3 = x^6 - 12x^4 + 48x^2 - 64$$
$$(2x - 3a)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot 4x^2 \cdot 3a + 3 \cdot 2x \cdot (3a)^2 - (3a)^3 =$$
$$= 8x^3 - 36ax^2 + 54xa^2 - 27a^3$$

Przykład 2

Przekształcimy potęgę na sumy algebraiczne, wykorzystując wzór na sześcian różnicy.

$$\begin{aligned}(xy - 2\sqrt{3})^3 &= (xy)^3 - 3 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot 2\sqrt{3} + 3 \cdot xy(2\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^3 = \\ &= x^3y^3 - 6\sqrt{3}x^2y^2 + 36xy - 24\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a^4x^3 - 0,1)^3 &= a^{12}x^9 - 3 \cdot a^8x^6 \cdot 0,1 + 3 \cdot a^4x^3(0,1)^2 - 0,001 = \\ &= a^{12}x^9 - 0,3a^8x^6 + 0,03a^4x^3 - 0,001\end{aligned}$$

Wykorzystanie wzoru na sześcian różnicy dwóch wyrażeń znacznie ułatwia przekształcanie wyrażeń algebraicznych.

Przykład 3

Zapiszemy wyrażenie $(1 - x)^3 - (1 + x)^3 + 2x^3$ w najprostszej postaci, a następnie obliczymy jego wartość dla $x = -0,5$.

$$(1 - x)^3 - (1 + x)^3 = (1 - 3x + 3x^2 - x^3) - (1 + 3x + 3x^2 + x^3) + 2x^3$$

$$(1 - x)^3 - (1 + x)^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3 - 1 - 3x - 3x^2 - x^3 + 2x^3$$

$$(1 - x)^3 - (1 + x)^3 = -6x$$

$$-6 \cdot 0,5 = -3$$

Odpowiedź:

Wartość wyrażenia jest równa (-3) .

Ważnym zastosowaniem wzoru skróconego mnożenia na sześcian różnicy jest zapisywanie sum algebraicznych w postaci iloczynu.

$$\square^3 - 3\square^2\bigcirc + 3\square\bigcirc^2 - \bigcirc^3 = (\square - \bigcirc)(\square - \bigcirc)(\square - \bigcirc)$$

Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Przykład 4

Zapiszemy sumy algebraiczne w postaci iloczynów.

$$125a^3 - 75a^2 + 15a - 1 = (5a - 1)(5a - 1)(5a - 1)$$

$$27x^3 - 135x^2y + 225xy^2 - 125y^3 = (3x - 5y)(3x - 5y)(3x - 5y)$$

$$3a^3 - 9a^2c + 9ac^2 - 3c^3 = 3(a - c)(a - c)(a - c)$$

$$k^3 - 3\sqrt{3}k^2 + 9k - 3\sqrt{3} = (k - \sqrt{3})(k - \sqrt{3})(k - \sqrt{3})$$

Wzór skróconego mnożenia na sześcián różnicy można zastosować, obliczając wartości wyrażeń zawierających pierwiastki.

Przykład 5

$$(3 - \sqrt{3})^3 + 30\sqrt{3} = 27 - 27\sqrt{3} + 27 - 3\sqrt{3} + 30\sqrt{3} = 54$$

$$(\sqrt{2} - 2\sqrt{5})^3 - (62\sqrt{2} - 52\sqrt{5}) = (\sqrt{2} - 2\sqrt{5})^3 - (\sqrt{2} - 2\sqrt{5})^3 = 0$$

Słownik

wzór skróconego mnożenia na sześcián różnicy

sześcián różnicy dwóch wyrażeń jest równy sześciánowi pierwszego wyrażenia minus potrojony iloczyn kwadratu pierwszego wyrażenia przez drugie, plus potrojony iloczyn pierwszego wyrażenia przez kwadrat drugiego, minus sześcián drugiego wyrażenia

Infografika

Polecenie 1




Zapoznaj się z infografiką. Rozwiąż najpierw samodzielnie podane przykłady.

Następnie porównaj rozwiązania.

Polecenie 2

Zapisz $(x - 2\sqrt{3})^3$ w postaci sumy algebraicznej.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Wykaż, że suma sześciątów trzech kolejnych liczb naturalnych dodatnich dzieli się przez 3.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wzór skróconego mnożenia na sześćcian różnicy

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne.

Uczeń:

1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$, $(a + b)^3$, $(a - b)^3$, $a^3 - b^3$, $a^n - b^n$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zapisuje sześćcian różnicy w postaci sumy, wykorzystując odpowiedni wzór skróconego mnożenia
- zamienia sumę algebraiczną na iloczyn, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na sześćcian różnicy
- przekształca wyrażenia algebraiczne, z zastosowaniem wzoru skróconego mnożenia na sześćcian różnicy

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- kula śniegowa
- matematyczne drzewko

Formy pracy:

- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda grupa uczniów i każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- kartony, mazaki

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

Praca w parach. Uczniowie przypominają sposób mnożenia różnic dwumianów, podają przykłady obliczania potęg, również liczb niewymiernych. Przedstawiają graficznie wzór skróconego mnożenia na sześcian sumy dwóch wyrażeń, podają przykłady wyrażeń (w tym liczb dodatnich i ujemnych), jakie można podstawić w miejsce zaproponowanych ikon.

W razie wątpliwości uczniowie proszą o pomoc nauczyciela.

Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, wspólnie z uczniami ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

Uczniowie pracują metodą kuli śniegowej.

Ćwiczenie 1

Praca w 4 grupach. Każda z grup ma za zadanie wyprowadzenie wzoru na sześcian różnicy dwóch wyrażeń: $(a - b)^3$. Uczniowie mogą skorzystać ze wzoru skróconego mnożenia na sześcian sumy, albo pomnożyć trzy jednakowe różnice, itp.

Ćwiczenie 2

Teraz grupy łączą się – grupa 1 z 2 oraz grupa 3 z 4. Zadaniem grup jest wspólne ustalenie poprawnego wzoru i określenie go słownie.

Ćwiczenie 3

Wszystkie grupy łączą się – zapisują wspólnie ustalony wzór algebraicznie i słownie.

Ćwiczenie 4

Uczniowie w parach oglądają infografikę, rozwiązują samodzielnie podane tam przykłady

i porównują między sobą rozwiązania, a następnie porównują z wynikami przedstawionymi w infografice.

Ćwiczenie 5

Uczniowie wspólnie tworzą „matematyczne drzewko”, na którego gałęziach zapisują typy zadań związanych z obliczaniem sześcianu różnicy.

Faza podsumowująca:

Praca indywidualna uczniów – uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne.

Końcowy element zajęć to podsumowanie przez uczniów pracy grup, określenie czy postawione cele zostały osiągnięte, wskazanie przez nauczyciela ważnych elementów zajęć, ocena pracy uczniów.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest stworzenie *Tablicy zastosowań wzoru skróconego mnożenia na sześcian różnicy*.

Mogą się przy tym wzorować na poznanych wcześniej przykładach zastosowania wzoru skróconego mnożenia na sześcian sumy.

Materiały pomocnicze:

Działania na wyrażeniach algebraicznych - przykłady

Wskazówki metodyczne:

Infografikę można wykorzystać jako przygotowanie do mini – sprawdzianu. Po obejrzeniu rozwiązanych przykładów, nauczyciel może poprosić uczniów o rozwiązanie podobnych, właśnie w ramach krótkiego sprawdzianu.