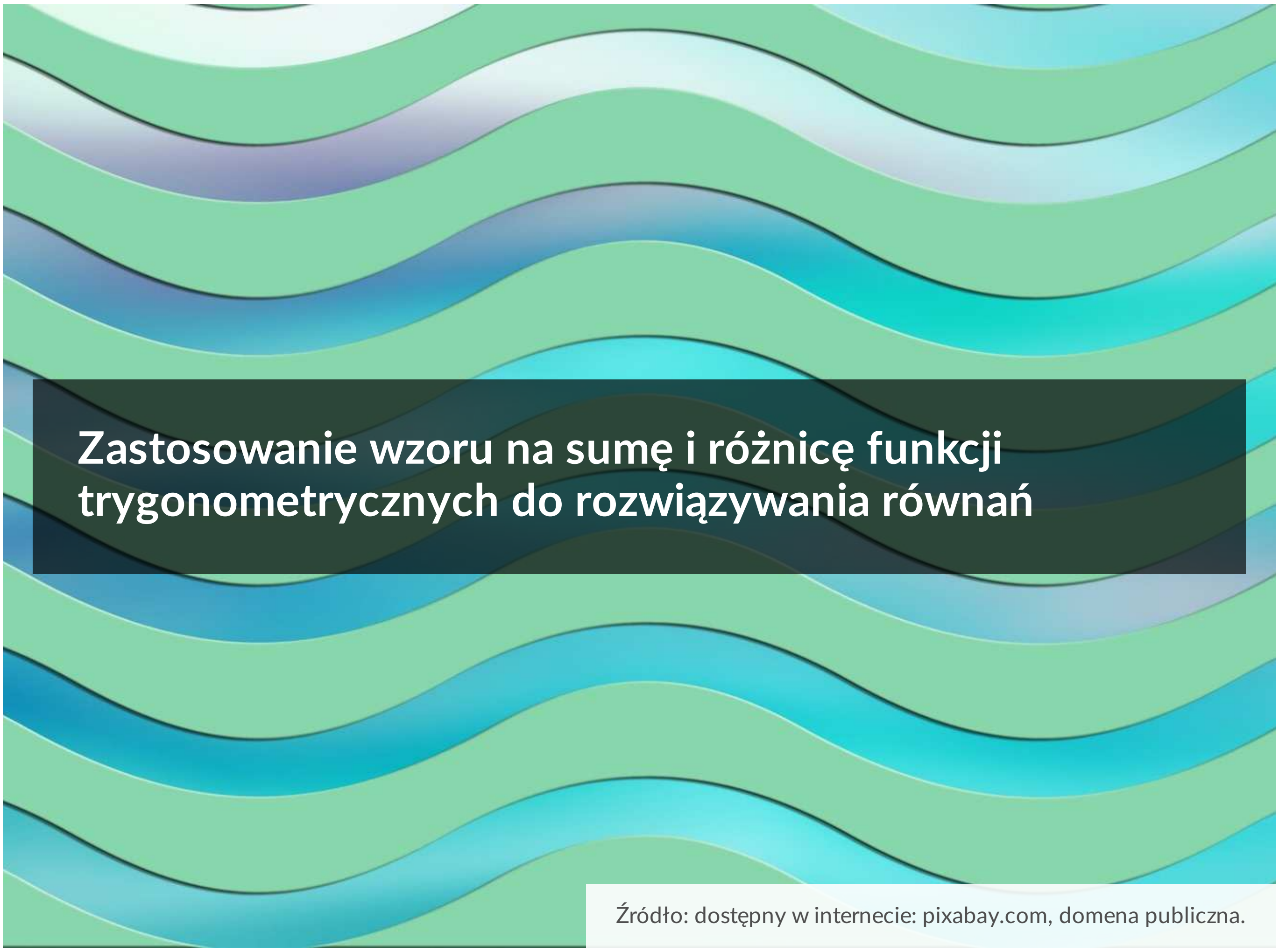
# Zastosowanie wzoru na sumę i różnicę funkcji trygonometrycznych do rozwiązywania równań

# Zastosowanie wzoru na sumę i różnicę funkcji trygonometrycznych do rozwiązywania równań



Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

W tym materiale poszerzysz swoje wiadomości dotyczące rozwiązywania równań trygonometrycznych. Dowiesz się, jak za pomocą wzorów na sumę i różnicę funkcji trygonometrycznych sprowadzić bardziej skomplikowane równania trygonometryczne do równań postaci: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$. Umiejętności, które rozwiniesz, dadzą Ci również podstawę do dowodzenia tożsamości trygonometrycznych.

**Twoje cele**

- Nauczysz się sprowadzać za pomocą wzorów na sumę i różnicę funkcji trygonometrycznych bardziej skomplikowane równania trygonometryczne do równań postaci: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$.
- Dowiesz się, jak wykorzystać podstawowe tożsamości trygonometryczne do rozwiązywania bardziej skomplikowanych równań.

# Przeczytaj

Przypomnijmy na początek wzory, z których będziemy korzystać.

**Twierdzenie: wzory na sumę i różnicę funkcji trygonometrycznych**

Dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zachodzą następujące wzory:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}$$

Dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ spełniających warunki: $\cos\alpha \neq 0$ i $\cos\beta \neq 0$, zachodzą następujące wzory:

$$\text{tg } \alpha + \text{ tg } \beta = \tfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\text{tg } \alpha - \text{ tg } \beta = \tfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

Poniżej przedstawimy przykłady, jak wykorzystać wzory na sumę i różnicę funkcji trygonometrycznych do rozwiązywania równań.

**Przykład 1**

Rozwiążemy równanie: $\sin 2x + \sin 4x = 0$.

**Rozwiązanie**

**Pierwszy sposób**

Najpierw skorzystamy ze wzoru na sumę sinusów:

$2\sin\tfrac{2x+4x}{2} \cdot \cos\tfrac{4x-2x}{2} = 0$.

Stąd otrzymujemy:

$\sin 3x \cdot \cos x = 0$.

Zatem $\sin 3x = 0$ lub $\cos x = 0$.

Otrzymujemy odpowiedź:

$x = \frac{k\pi}{3}$ lub $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

**Drugi sposób**

Przedstawimy drugi sposób, w którym nie odwołujemy się do wzorów na sumy i różnice funkcji trygonometrycznych. Jest to bardzo przydatna metoda opierająca się na porównywaniu wartości tej samej funkcji trygonometrycznej.

Zapiszmy równanie w postaci:

$\sin 2x = -\sin 4x$.

Wykorzystajmy nieparzystość funkcji sinus:

$\sin 2x = \sin(-4x)$.

Zatem z porównania wartości funkcji sinus otrzymujemy, że: $2x = -4x + 2k\pi$ lub $2x = \pi - (-4x) + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stąd dostajemy już odpowiedź:

$x = \frac{k\pi}{3}$ lub $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

**Przykład 2**

Rozwiążemy równanie: $\cos 4x - \sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

**Rozwiązanie**

**Pierwszy sposób**

Korzystając ze wzoru redukcyjnego, zapiszmy równanie tak, aby otrzymać różnicę cosinusów:

$\cos 4x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Korzystamy ze wzoru na różnicę cosinusów:

$-2\sin\frac{4x + \frac{\pi}{2} - 4x}{2}\sin\frac{4x - \frac{\pi}{2} + x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$-2\sin\frac{\pi}{4}\sin\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$-2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Wykorzystując wzór: $\sin\left(\frac{\pi}{2} + y\right) = -\cos y$, otrzymujemy:

$\sqrt{2}\cos\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\cos\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$.

Stąd otrzymujemy:

$4x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}+2\pi k$ lub $4x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{3}+2\pi k$, gdzie $k\in\mathbb{Z}$.

$4x=\frac{\pi}{12}+2k\pi$ lub $4x=-\frac{7\pi}{12}+2k\pi$, gdzie $k\in\mathbb{Z}$.

Odpowiedź:

$x=\frac{\pi}{48}+\frac{k\pi}{2}$ lub $x=-\frac{7\pi}{48}+\frac{k\pi}{2}$, gdzie $k\in\mathbb{Z}$.

**Drugi sposób**

Wykorzystamy tożsamość trygonometryczną: dla dowolnej liczby rzeczywistej $x$ zachodzi jedynka trygonometryczna: $\cos^2 4x+\sin^2 4x=1$.

Z równania danego w zadaniu wyliczamy np. $\cos 4x=\sin 4x+\frac{\sqrt{2}}{2}$ i podstawiamy do jedynki trygonometrycznej:

$\left(\sin 4x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\sin^2 4x=1$. Stąd otrzymujemy równanie:

$2\sin^2 4x+2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin 4x-\frac{1}{2}=0$.

Podstawiając nową zmienną $t=\sin 4x$ otrzymujemy równanie kwadratowe:

$2t^2+\sqrt{2}t-\frac{1}{2}=0$. $\Delta=2-4\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=6$.

Zatem $t=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ lub $t=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. Rozwiązaniami równania $2\sin^2 4x+2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin 4x-\frac{1}{2}=0$ są zatem:

$\sin 4x=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ lub $\sin 4x=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

Jeżeli $\sin 4x=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$, to $\cos 4x=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

Jeżeli $\sin 4x=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, to $\cos 4x=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

Pozostaje najtrudniejsza część rozwiązania: ustalenie wartości, jakie przyjmuje $x$; są to: $4x=-\frac{7\pi}{12}+2k\pi$ lub $4x=\frac{\pi}{12}+2k\pi$, gdzie $k\in\mathbb{Z}$.

Odpowiedź:

$x=-\frac{7\pi}{48}+\frac{k\pi}{2}$ lub $x=\frac{\pi}{48}+\frac{k\pi}{2}$, gdzie $k\in\mathbb{Z}$.

**Ważne!**

Drugi sposób rozwiązywania przykładu 2 opiera się na podstawowym pojęciu jakim jest jedynka trygonometryczna, jednak może powodować trudności w ostatniej fazie rozwiązania, gdy trzeba wskazać konkretne wartości zmiennej. Zatem w zadaniach podobnych do przykładu 2 rekomendujemy pierwszy sposób.

**Przykład 3**

Rozwiążemy równanie: $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$.

**Rozwiązanie**

Zmieniamy kolejność składników:

$\sin x + \sin 5x + \sin 3x = 0$.

Stosujemy wzór na sumę sinusów:

$2 \sin \frac{x+5x}{2} \cdot \cos \frac{x-5x}{2} + \sin 3x = 0$,

$2 \sin 3x \cdot \cos 2x + \sin 3x = 0$.

Wyciągamy wspólny czynnik przed nawias:

$2 \sin 3x \cdot \left(\cos 2x + \frac{1}{2}\right) = 0$.

Otrzymujemy alternatywę równań:

$\sin 3x = 0$ lub $\cos 2x = -\frac{1}{2}$.

Otrzymujemy rozwiązania:

$3x = \pi k$ lub $2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$
lub $2x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Zatem:

$x = \frac{\pi}{3} k$ lub $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

W uproszczeniu możemy zapisać:

Odpowiedź:

$x = \frac{k\pi}{3}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

**Przykład 4**

Rozwiążemy równanie: $\operatorname{tg} x + \sin(x + 45^\circ) = -1$.

**Rozwiązanie**

Aby istniał tangens, zakładamy, że $\cos x \neq 0$.

Zapisujemy składniki w innej kolejności:

$1 + \operatorname{tg} x + \sin(x + 45^\circ) = 0$.

Podstawiamy za liczbę 1 wartość funkcji tangens dla odpowiedniego argumentu:

$\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} x + \sin(x + 45^\circ) = 0$.

Wykorzystujemy wzór na sumę tangensów:

$\frac{\sin(x+45^\circ)}{\cos x \cos 45^\circ} + \sin(x + 45^\circ) = 0$.

Wyciągamy wspólny czynnik przed nawias:

$\sin(x + 45^\circ)\left(\frac{1}{\cos x \cos 45^\circ} + 1\right) = 0$.

Zapisujemy alternatywę równań:

$\sin(x + 45^\circ) = 0$ lub $\frac{1}{\cos x \cos 45^\circ} = -1$.

Rozwiązaniem równania $\sin(x + 45^\circ) = 0$ jest każda liczba postaci $x + 45^\circ = k \cdot 180^\circ$, czyli $x = -45^\circ + k \cdot 180^\circ$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Równanie $\frac{1}{\cos x \cos 45^\circ} = -1$ jest równoważne równaniu $\cos x = -\sqrt{2}$, które jest równaniem sprzecznym.

Odpowiedź:

$x = -45^\circ + k \cdot 180^\circ$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

# Słownik

**jedynka trygonometryczna**

Dla dowolnej liczby rzeczywistej $x$ zachodzi tożsamość: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

**wzory na sumę i różnicę funkcji trygonometrycznych**

Dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zachodzą następujące wzory

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ spełniających warunki: $\cos\alpha \neq 0$ i $\cos\beta \neq 0$, zachodzą następujące wzory:

$\text{tg}\ \alpha + \text{tg}\ \beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

$\text{tg}\ \alpha - \text{tg}\ \beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

# Animacja

**Polecenie 1**

Zapoznaj się uważnie z animacją, a następnie wykonaj polecenia umieszczone pod nią.

Trwa wczytywanie danych ..

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D2VaZHupw

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej zastosowania wzoru na różnicę cosinusów. Opowiada Piotr Kryszkiewicz.

---

**Polecenie 2**

**Polecenie 3**

Zapisz równanie

$$\cos 5x - \sin 5x = \sin 7x - \cos 7x$$

jako alternatywę dwóch równań.

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

## Ćwiczenie 1

## Ćwiczenie 2

## Ćwiczenie 3

## Ćwiczenie 4

## Ćwiczenie 5

## Ćwiczenie 6

## Ćwiczenie 7

Rozwiąż równanie: $\cos 5x + \cos x = -2\cos 3x$.

## Ćwiczenie 8

Rozwiąż równanie: $\sin x + \cos x = \sin 3x + \cos 3x$.

# Dla nauczyciela

**Autor:** Jacek Dymel

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat: Zastosowanie wzoru na sumę i różnicę funkcji trygonometrycznych do rozwiązywania równań**

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

**Podstawa programowa:**

VII. Trygonometria.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

5. korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych;
6. rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładach: $4\cos 2x \cos 5x = 2\cos 7x + 1$, $2\sin^2 x \leq 1$.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- sprowadza za pomocą wzorów na sumę i różnicę funkcji trygonometrycznych bardziej skomplikowane równania trygonometryczne do równań postaci: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$.
- wykorzystuje podstawowe tożsamości trygonometryczne do rozwiązywania bardziej skomplikowanych równań.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

**Metody i techniki nauczania:**

- dyskusja;

- metoda tekstu przewodniego.

**Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

**Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

**Przebieg lekcji**

**Faza wstępna:**

1. Przedstawienie tematu zajęć: „Zastosowanie wzoru na sumę i różnicę funkcji trygonometrycznych do rozwiązywania równań” oraz wspólne z uczniami ustalenie kryteriów sukcesu.
2. Nauczyciel zadaje uczniom pytanie dotyczące ich aktualnego stanu wiedzy w zakresie poruszanej tematyki. Prosi wybranego ucznia lub uczennicę o zapisywanie propozycji.

**Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie metodą tekstu przewodniego analizują przykłady przedstawione w sekcji „Przeczytaj”. Ewentualne wątpliwości wyjaśniane są na forum klasy.
2. Nauczyciel wyświetla zawartość sekcji „Animacja”, wybrany uczeń czyta treść polecenia nr 1 „Obejrzyj uważnie animację, a następnie wykonaj polecania umieszczone pod nią”. Po zaznajomieniu się z treściami nauczyciel komentuje, i w razie potrzeby wyjaśnia, najważniejsze etapy realizacji polecenia.
3. W kolejnym kroku uczniowie realizują w parach ćwiczenia 3-5, po ich wykonaniu porównują otrzymane wyniki z inną parą.
4. Ćwiczenia numer 6, 7 i 8 uczniowie wykonują indywidualnie, a następnie omawia je nauczyciel.

**Faza podsumowująca:**

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

**Praca domowa:**

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”.

**Materiały pomocnicze:**

- Wykresy i własności funkcji trygonometrycznych

**Wskazówki metodyczne:**

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Animacja” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania w temacie „Zastosowanie wzoru na sumę i różnicę funkcji trygonometrycznych do rozwiązywania równań”.