



Kąty między odcinkami w graniastostupie

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Prezentacja multimedialna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



W tym materiale omówimy szczegółowo zagadnienia związane z kątami między odcinkami w graniastosłupie. Zagadnienie jest pojęciowo bardziej elementarne i nieco łatwiejsze niż pojęcie kąta między odcinkiem graniastosłupa a płaszczyzną. Jednak oba rodzaje kątów są bardzo przydatne przy rozważaniach przekrojów wielościanów. Często spojrzenie na zadanie z geometrii przestrzennej w odpowiedni sposób powoduje, że jego rozwiązanie sprowadza się do rozwiązania problemu z geometrii płaskiej. A to zwykle jest łatwiejsze do zrozumienia i odkrycia kluczowych dla zadania zależności.

Twoje cele

- Wyznaczysz kąty między odcinkami w graniastosłupie.
- Zastosujesz wiadomości dotyczące kątów między odcinkami w graniastosłupie do rozwiązywania zadań dotyczących wielościanów.

Przeczytaj

Przypomnijmy najpierw podstawowe pojęcie.

Kątem między odcinkami nazywamy kąt między prostymi zawierającymi te odcinki. Kąty rozważane w graniastosłupie zwykle zawarte są między odcinkami o wspólnym początku.

Spośród odcinków w graniastosłupie warto szczególnie zwrócić uwagę na przekątne ścian, przekątne graniastosłupa, krawędzie graniastosłupa, wysokości ścian oraz graniastosłupa.

Graniastosłup trójkątny

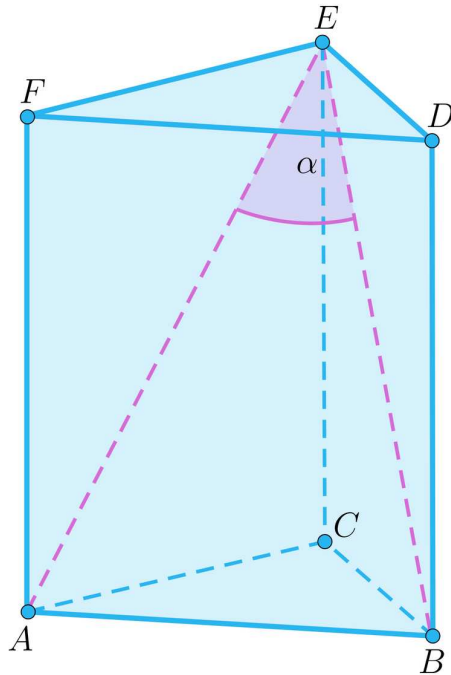
Na poniższych rysunkach zaznaczono kilka najczęściej rozważanych kątów między odcinkami graniastosłupa trójkątnego.

Zwróćmy jeszcze uwagę, że w niektórych graniastosłupach pewne odcinki pokrywają się, zaś w innych są zupełnie różne. Dobrym przykładem jest krawędź boczna i wysokość graniastosłupa, które pokrywają się w graniastosłupach prostych, ale są różnymi odcinkami w graniastosłupach pochyłych. Poniżej galeria kątów między odcinkami w graniastosłupie trójkątnym pochyłym. Porównaj je z kątami zaznaczonymi wyżej między odcinkami w graniastosłupie trójkątnym prostym.

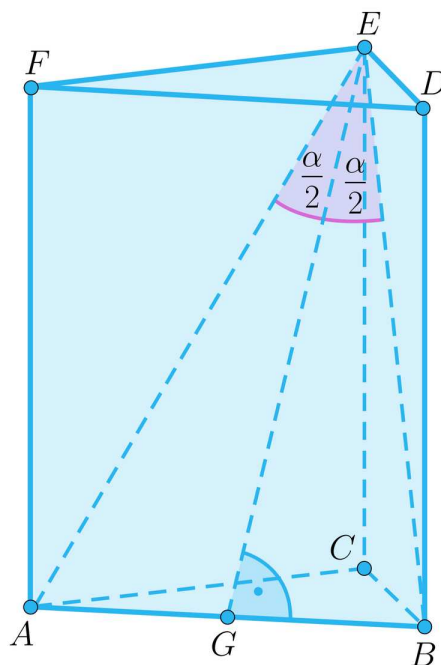
Przykład 1

Dany jest [graniastosłup prawidłowy](#) trójkątny, w którym wysokość podstawy jest równa $6\sqrt{3}$. Kąt między przekątnymi ścian bocznych wychodzącymi z jednego wierzchołka ma miarę 40° . Obliczymy objętość tego graniastosłupa.

Zacznijmy od wykonania rysunku i zaznaczenia kąta między przekątnymi ścian bocznych.



Ponieważ podstawa jest trójkątem równobocznym o wysokości $6\sqrt{3}$, więc krawędź podstawy ma długość 12. Zauważmy, że trójkąt ABE jest równoramienny, zatem jego wysokość poprowadzona z wierzchołka E pada pod kątem prostym do AB i zawiera się w dwusiecznej kąta AEB .



Z funkcji trygonometrycznych w trójkącie BEG mamy $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{|GB|}{|BE|}$, czyli $\sin 20^\circ = \frac{6}{|BE|}$.

Korzystając z tablic trygonometrycznych możemy przybliżyć wartość $\sin 20^\circ \approx 0,342$:

$$0,342 \approx \frac{6}{|BE|}$$

$$|BE| \approx 17,54$$

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie BDE mamy

$$|BD| = \sqrt{|BE|^2 - |ED|^2} \approx \sqrt{17,54^2 - 12^2} \approx 12,79.$$

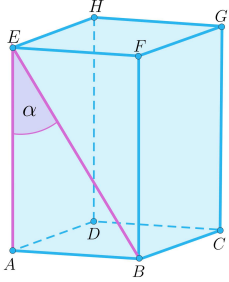
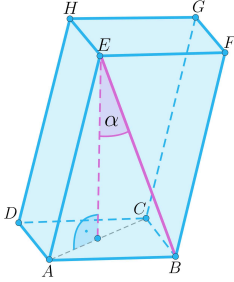
Zatem objętość rozważanego graniastosłupa to

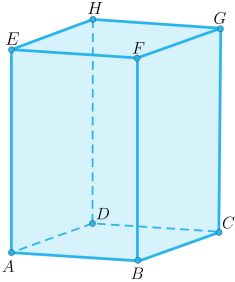
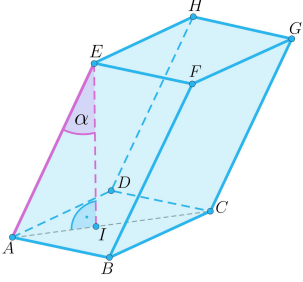
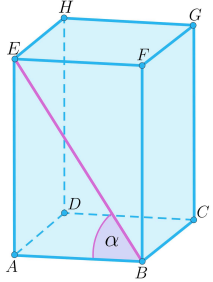
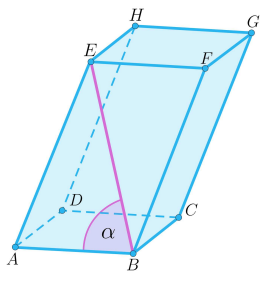
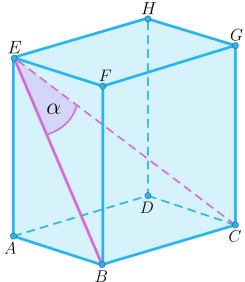
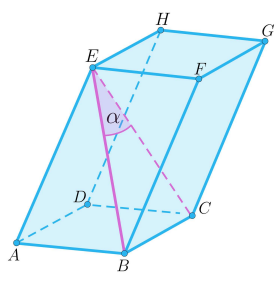
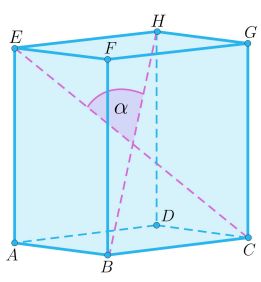
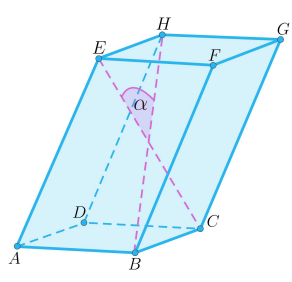
$$V = \frac{|AB|^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot |BD| \approx \frac{144\sqrt{3}}{4} \cdot 12,79 \approx 797,5$$

Graniastosłup czworokątny

W graniastosłupie czworokątnym wysokość i krawędź boczna również mogą się pokrywać lub być różnymi odcinkami – w zależności od tego, czy graniastosłup jest prosty, czy pochyły.

Przeanalizuj różnicę między obydwoma graniastosłupami na poniższych rysunkach.

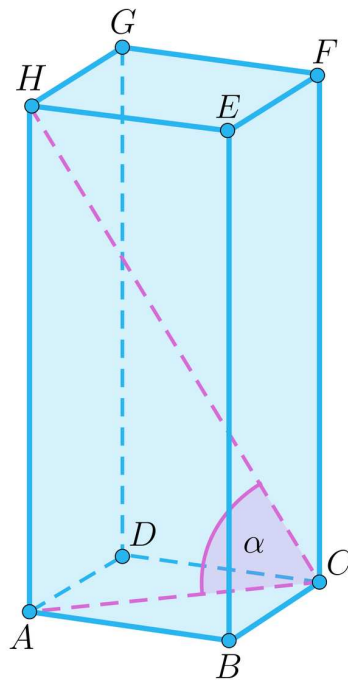
Opis	Graniastosłup prosty	Graniastosłup pochyły
<p>Kąt AEB między wysokością a przekątną ściany bocznej graniastosłupa.</p>		

Opis	Graniastosłup prosty	Graniastosłup pochyły
<p>Kąt AEI między wysokością a krawędzią boczną graniastosłupa.</p>	<p>$\sphericalangle AEI = 0^\circ$</p> 	
<p>Kąt między przekątną ściany bocznej a krawędzią podstawy graniastosłupa.</p>		
<p>Kąt między przekątną graniastosłupa a przekątną ściany bocznej.</p>		
<p>Kąt między przekątnymi graniastosłupa.</p>		

Przykład 2

Objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa $27\sqrt{6}$. Kąt między przekątną graniastosłupa a przekątną podstawy wychodzącymi z tego samego wierzchołka ma miarę 60° . Obliczymy pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

Zaczniemy od rysunku.



Jeśli przez x oznaczymy długość krawędzi podstawy graniastosłupa, to jej przekątna ma długość $x\sqrt{2}$. Ponieważ trójkąt ACH ma kąty o miarach 30° , 60° , 90° , więc $|AH| = |AC| \cdot \sqrt{3} = x\sqrt{6}$.

Objętość graniastosłupa to iloczyn pola podstawy i wysokości, więc mamy równanie:

$$27\sqrt{6} = x^2 \cdot x\sqrt{6}$$

$$x = 3$$

Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa to:

$$P_{pc} = 2 \cdot x^2 + 4 \cdot x \cdot x\sqrt{6} = 2 \cdot 9 + 4 \cdot 9\sqrt{6} = 18(1 + 2\sqrt{6}).$$

Słownik

przekątna graniastosłupa

odcinek łączący dwa wierzchołki graniastosłupa, który nie jest zawarty w żadnym wielokącie tworzącym powierzchnię tego graniastosłupa (nie jest zawarty ani w żadnej ścianie bocznej, ani w żadnej podstawie)

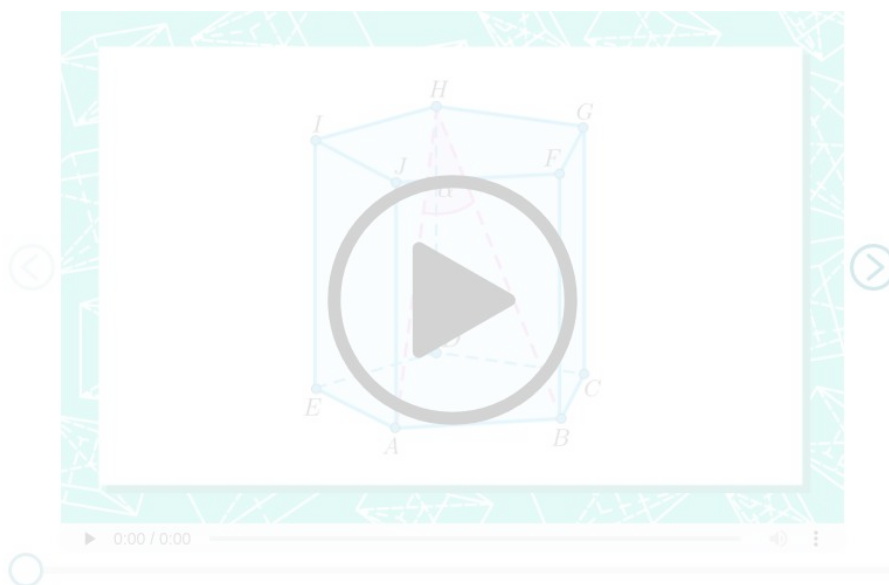
graniastosłup prawidłowy

graniastosłup prosty, w którego podstawie znajduje się wielokąt foremny

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Przeanalizuj kąty między odcinkami graniastosłupów. Na ich podstawie wykonaj polecenie 2.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DA9j1Skic>

Polecenie 2

Rozwiąż test.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4

Rozwiąż test.



Ćwiczenie 5



Przekątne graniastostupa prawidłowego czworokątnego przecinają się w punkcie I pod kątem o mierze 60° . Oblicz odległość punktu I od płaszczyzny podstawy, jeśli krawędź podstawy ma długość 6.

Ćwiczenie 6



Dany jest graniastostup prawidłowy trójkątny. Kąt między przekątnymi o długości 10 ścian bocznych wychodzącymi z tego samego wierzchołka ma miarę 50° . Oblicz wysokość graniastostupa.

Ćwiczenie 7



Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny o krawędzi podstawy a i wysokości $2a\sqrt{2}$. Wyznacz miarę kąta między dłuższą przekątną graniastosłupa i krótszą przekątną podstawy wychodzącymi z tego samego wierzchołka.

Ćwiczenie 8



Dany jest graniastosłup prawidłowy pięciokątny o krawędzi podstawy 2. Kąt między przekątnymi tego graniastosłupa wychodzącymi z tego samego wierzchołka ma miarę 30° . Oblicz wysokość graniastosłupa.

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Kąty między odcinkami w graniastosłupie

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

3) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza kąty między odcinkami w graniastosłupie,
- stosuje wiadomości dotyczące kątów między odcinkami w graniastosłupie do rozwiązywania zadań dotyczących wielościanów.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda tekstu przewodniego.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel określa temat lekcji: „Kąty między odcinkami w graniastosłupie” oraz cele, wybrana osoba formułuje kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie zapoznają się z treścią w sekcji „Przeczytaj” i zapisują w zeszyte minimum dwa pytania. Następnie nauczyciel dzieli uczniów na dwie grupy. Grupy na przemian zadają przygotowane wcześniej pytania grupie przeciwnej, która udziela odpowiedzi. Nauczyciel uzupełnia wyjaśnienia.
2. Uczniowie w zespołach dwuosobowych zapoznają się z treścią zawartą w sekcji „Prezentacja multimedialna”, rozwiązują polecenia tam umieszczone.
3. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 3-8 w sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Graniastosłup prosty i jego własności. Związki miarowe w graniastosłupach](#)

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Prezentacja multimedialna” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania w temacie „Kąty między odcinkami w graniastosłupie”.