



## Kąty między odcinkami w graniastosłupie

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Prezentacja multimedialna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



W tym materiale omówimy szczegółowo zagadnienia związane z kątami między odcinkami w graniastosłupie. Zagadnienie jest pojęciowo bardziej elementarne i nieco łatwiejsze niż pojęcie kąta między odcinkiem graniastosłupa a płaszczyzną. Jednak oba rodzaje kątów są bardzo przydatne przy rozważaniach przekrojów wielościanów. Często spojrzenie na zadanie z geometrii przestrzennej w odpowiedni sposób powoduje, że jego rozwiązanie sprowadza się do rozwiązania problemu z geometrii płaskiej. A to zwykle jest łatwiejsze do zrozumienia i odkrycia kluczowych dla zadania zależności.

### Twoje cele

- Wyznaczysz kąty między odcinkami w graniastosłupie.
- Zastosujesz wiadomości dotyczące kątów między odcinkami w graniastosłupie do rozwiązywania zadań dotyczących wielościanów.

# Przeczytaj

---

Przypomnijmy najpierw podstawowe pojęcie.

Kątem między odcinkami nazywamy kąt między prostymi zawierającymi te odcinki. Kąty rozważane w graniastosłupie zwykle zawarte są między odcinkami o wspólnym początku.

Spośród odcinków w graniastosłupie warto szczególnie zwrócić uwagę na przekątne ścian, przekątne graniastosłupa, krawędzie graniastosłupa, wysokości ścian oraz graniastosłupa.

## Graniastosłup trójkątny

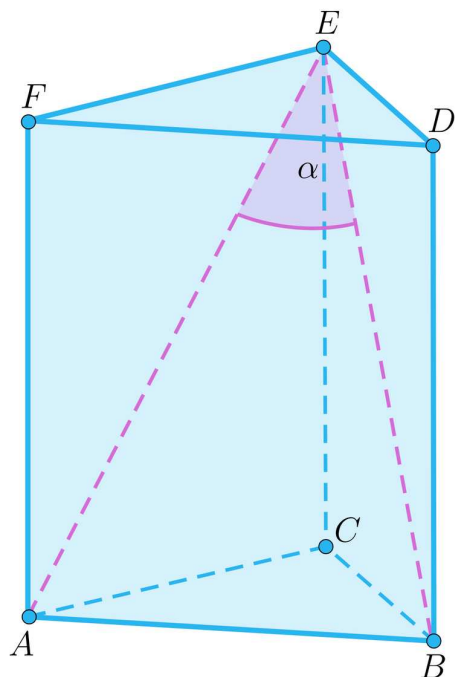
Na poniższych rysunkach zaznaczono kilka najczęściej rozważanych kątów między odcinkami graniastosłupa trójkątnego.

Zwróćmy jeszcze uwagę, że w niektórych graniastosłupach pewne odcinki pokrywają się, zaś w innych są zupełnie różne. Dobrym przykładem jest krawędź boczna i wysokość graniastosłupa, które pokrywają się w graniastosłupach prostych, ale są różnymi odcinkami w graniastosłupach pochyłych. Poniżej galeria kątów między odcinkami w graniastosłupie trójkątnym pochyłym. Porównaj je z kątami zaznaczonymi wyżej między odcinkami w graniastosłupie trójkątnym prostym.

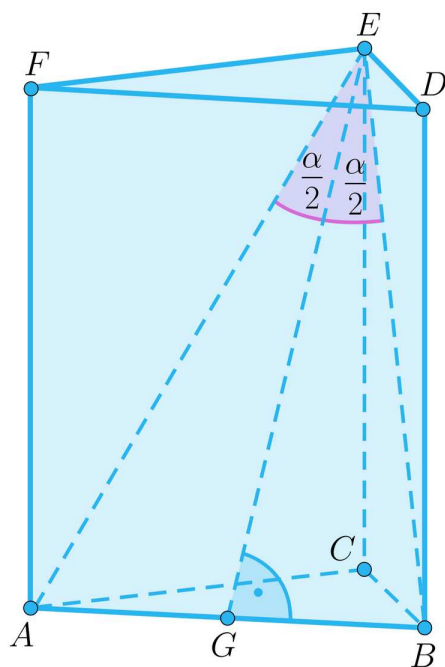
### Przykład 1

Dany jest **graniastosłup prawidłowy** trójkątny, w którym wysokość podstawy jest równa  $6\sqrt{3}$ . Kąt między przekątnymi ścian bocznych wychodzącymi z jednego wierzchołka ma miarę  $40^\circ$ . Obliczymy objętość tego graniastosłupa.

Zacznijmy od wykonania rysunku i zaznaczenia kąta między przekątnymi ścian bocznych.



Ponieważ podstawa jest trójkątem równobocznym o wysokości  $6\sqrt{3}$ , więc krawędź podstawy ma długość 12. Zauważmy, że trójkąt  $ABE$  jest równoramienny, zatem jego wysokość poprowadzona z wierzchołka  $E$  pada pod kątem prostym do  $AB$  i zawiera się w dwusiecznej kąta  $AEB$ .



Z funkcji trygonometrycznych w trójkącie  $BEG$  mamy  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{|GB|}{|BE|}$ , czyli  $\sin 20^\circ = \frac{6}{|BE|}$ .

Korzystając z tablic trygonometrycznych możemy przybliżyć wartość  $\sin 20^\circ \approx 0,342$ :

$$0,342 \approx \frac{6}{|BE|}$$

$$|BE| \approx 17,54$$

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie  $BDE$  mamy

$$|BD| = \sqrt{|BE|^2 - |ED|^2} \approx \sqrt{17,54^2 - 12^2} \approx 12,79.$$

Zatem objętość rozważanego graniastostupa to

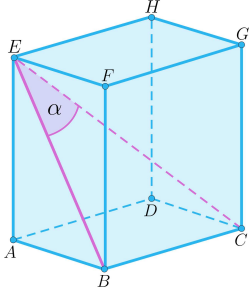
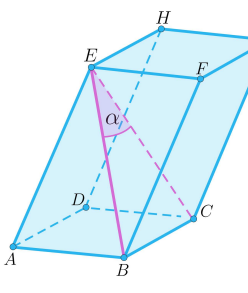
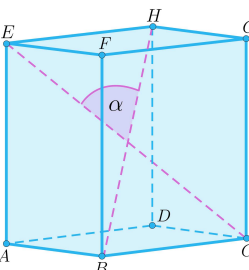
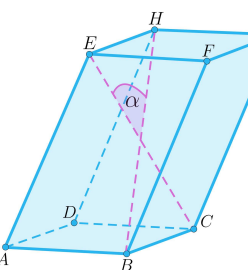
$$V = \frac{|AB|^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot |BD| \approx \frac{144\sqrt{3}}{4} \cdot 12,79 \approx 797,5$$

## Graniastostup czworokątny

W graniastostupie czworokątnym wysokość i krawędź boczna również mogą się pokrywać lub być różnymi odcinkami – w zależności od tego, czy graniastostup jest prosty, czy pochyły.

Przeanalizuj różnicę między obydwooma graniastostupami na poniższych rysunkach.

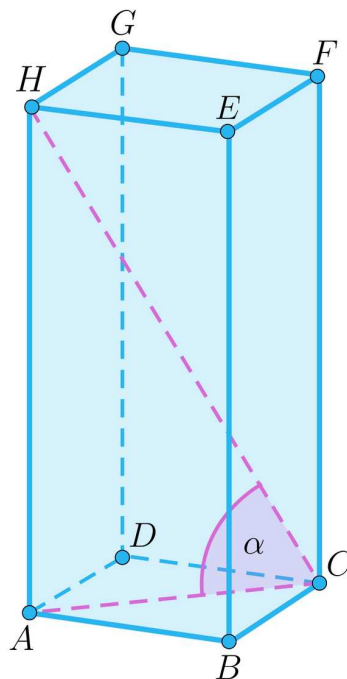
Opis	Graniastostup prosty	Graniastostup pochyły
Kąt $AEB$ między wysokością a przekątną ściany bocznej graniastostupa.		
Kąt $AEI$ między wysokością a krawędzią boczną graniastostupa.	$ \angle AEI  = 0^\circ$ 	
Kąt między przekątną ściany bocznej a krawędzią podstawy graniastostupa.		

Opis	Gnaniastosłup prosty	Gnaniastosłup pochyły
Kąt między przekątną gnaniastosłupa a przekątną ściany bocznej.		
Kąt między przekątnymi gnaniastosłupa.		

### Przykład 2

Objętość gnaniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa  $27\sqrt{6}$ . Kąt między przekątną gnaniastosłupa a przekątną podstawy wychodzącymi z tego samego wierzchołka ma miarę  $60^\circ$ . Obliczmy pole powierzchni całkowitej tego gnaniastosłupa.

Zacniemy od rysunku.



Jeśli przez  $x$  oznaczymy długość krawędzi podstawy gnaniastosłupa, to jej przekątna ma długość  $x\sqrt{2}$ . Ponieważ trójkąt  $ACH$  ma kąty o miarach  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ , więc  $|AH| = |AC| \cdot \sqrt{3} = x\sqrt{6}$ .

Objętość graniastosłupa to iloczyn pola podstawy i wysokości, więc mamy równanie:

$$27\sqrt{6} = x^2 \cdot x\sqrt{6}$$

$$x = 3$$

Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa to:

$$P_{pc} = 2 \cdot x^2 + 4 \cdot x \cdot x\sqrt{6} = 2 \cdot 9 + 4 \cdot 9\sqrt{6} = 18(1 + 2\sqrt{6}).$$

## Słownik

### **przekątna graniastosłupa**

odcinek łączący dwa wierzchołki graniastosłupa, który nie jest zawarty w żadnym wielokącie tworzącym powierzchnię tego graniastosłupa (nie jest zawarty ani w żadnej ścianie bocznej, ani w żadnej podstawie)

### **graniastosłup prawidłowy**

graniastosłup prosty, w którego podstawie znajduje się wielokąt foremny

# Prezentacja multimedialna

---

## Polecenie 1

Przeanalizuj kąty między odcinkami graniastosłupów. Na ich podstawie wykonaj polecenie 2.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DA9j1Skic>



## Polecenie 2

Rozwiąż test.

Zaznacz poprawną odpowiedź. Kąt między przekątnymi graniastosłupa prawidłowego pięciokątnego wychodzącymi z tego samego wierzchołka może mieć miarę:




$36^\circ$

$37^\circ$

$35^\circ$

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

| Ćwiczenie 1



| Ćwiczenie 2



### Ćwiczenie 3



Oceń, czy podane zdania są prawdziwe czy fałszywe.

	Prawda	Falsz
Dwie różne przekątne graniastosłupa prawidłowego czworokątnego zawsze się przecinają.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Dwie różne przekątne graniastosłupa prawidłowego pięciokątnego zawsze się przecinają.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Jeżeli podstawa graniastosłupa prawidłowego trójkątnego się nie zmienia, to wraz z wydłużeniem wysokości graniastosłupa rośnie miara kąta między przekątnymi ścian bocznych wychodzącymi ze wspólnego wierzchołka.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Jeżeli podstawa graniastosłupa prawidłowego czworokątnego się nie zmienia, to wraz z wydłużeniem wysokości graniastosłupa rośnie miara kąta między przekątną ściany bocznej a przekątną podstawy wychodzącymi ze wspólnego wierzchołka.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

#### Ćwiczenie 4



Rozwiąż test.

Zaznacz poprawną odpowiedź. Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny. Kąt między przekątnymi ścian bocznych wychodzącymi z tego samego wierzchołka może mieć miarę:

$70^\circ$

$50^\circ$

$60^\circ$

#### Ćwiczenie 5



Przekątne graniastosłupa prawidłowego czworokątnego przecinają się w punkcie I pod kątem o mierze  $60^\circ$ . Oblicz odległość punktu I od płaszczyzny podstawy, jeśli krawędź podstawy ma długość 6.

#### Ćwiczenie 6



Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny. Kąt między przekątnymi o długości 10 ścian bocznych wychodzącymi z tego samego wierzchołka ma miarę  $50^\circ$ . Oblicz wysokość graniastosłupa.

#### Ćwiczenie 7



Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny o krawędzi podstawy  $a$  i wysokości  $2a\sqrt{2}$ . Wyznacz miarę kąta między dłuższą przekątną graniastosłupa i krótszą przekątną podstawy wychodzącymi z tego samego wierzchołka.

## Ćwiczenie 8



Dany jest graniastosłup prawidłowy pięciokątny o krawędzi podstawy 2. Kąt między przekątnymi tego graniastosłupa wychodzącymi z tego samego wierzchołka ma miarę  $30^\circ$ .  
Oblicz wysokość graniastosłupa.

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Sebastian Guz

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Kąty między odcinkami w graniastosłupie

**Grupa docelowa:**

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

3) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów;

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- wyznacza kąty między odcinkami w graniastosłupie,
- stosuje wiadomości dotyczące kątów między odcinkami w graniastosłupie do rozwiązywania zadań dotyczących wielościanów.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

**Metody i techniki nauczania:**

- dyskusja;
- metoda tekstu przewodniego.

## **Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

## **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

## **Przebieg lekcji**

### **Faza wstępna:**

1. Nauczyciel określa temat lekcji: „Kąty między odcinkami w graniastosłupie” oraz cele, wybrana osoba formułuje kryteria sukcesu.

### **Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie indywidualnie zapoznają się z treścią w sekcji „Przeczytaj” i zapisują w zeszyte minimum dwa pytania. Następnie nauczyciel dzieli uczniów na dwie grupy. Grupy na przemian zadają przygotowane wcześniej pytania grupie przeciwnej, która udziela odpowiedzi. Nauczyciel uzupełnia wyjaśnienia.
2. Uczniowie w zespołach dwuosobowych zapoznają się z treścią zawartą w sekcji „Prezentacja multimedialna”, rozwiązują polecenia tam umieszczone.
3. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 3-8 w sekcji „Sprawdź się”.

### **Faza podsumowująca:**

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

### **Praca domowa:**

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”.

### **Materiały pomocnicze:**

- [Graniastosłup prosty i jego własności. Związki miarowe w graniastosłupach](#)

### **Wskazówki metodyczne:**

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Prezentacja multimedialna” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania w temacie „Kąty między odcinkami w graniastosłupie”.