Równanie prostej w postaci ogólnej oraz w postaci kierunkowej

Równanie prostej w postaci ogólnej oraz w postaci kierunkowej

Już wiesz

Wiesz już, że:

- prosta prostopadła do osi X nie jest wykresem żadnej funkcji.
- jeżeli na wykresie funkcji liniowej leżą dwa różne punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, (gdzie $x_A \neq x_B$), to współczynnik kierunkowy prostej, będącej wykresem funkcji, jest równy

$$a = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B},$$

natomiast wyraz wolny jest równy

$$b = y_A - ax_A;$$

- każda prosta, będąca wykresem funkcji liniowej, która przechodzi przez punkt $A = (x_A, y_A)$, ma równanie $y = ax + (y_A - ax_A)$, co zapisujemy w postaci

$$y = a(x - x_A) + y_A;$$

- każda prosta, będąca wykresem funkcji liniowej, która przechodzi przez dwa różne punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, ma równanie

$$y = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}(x - x_A) + y_A.$$

Polecenie 1

Uruchom aplet i wykonaj podane polecenia.

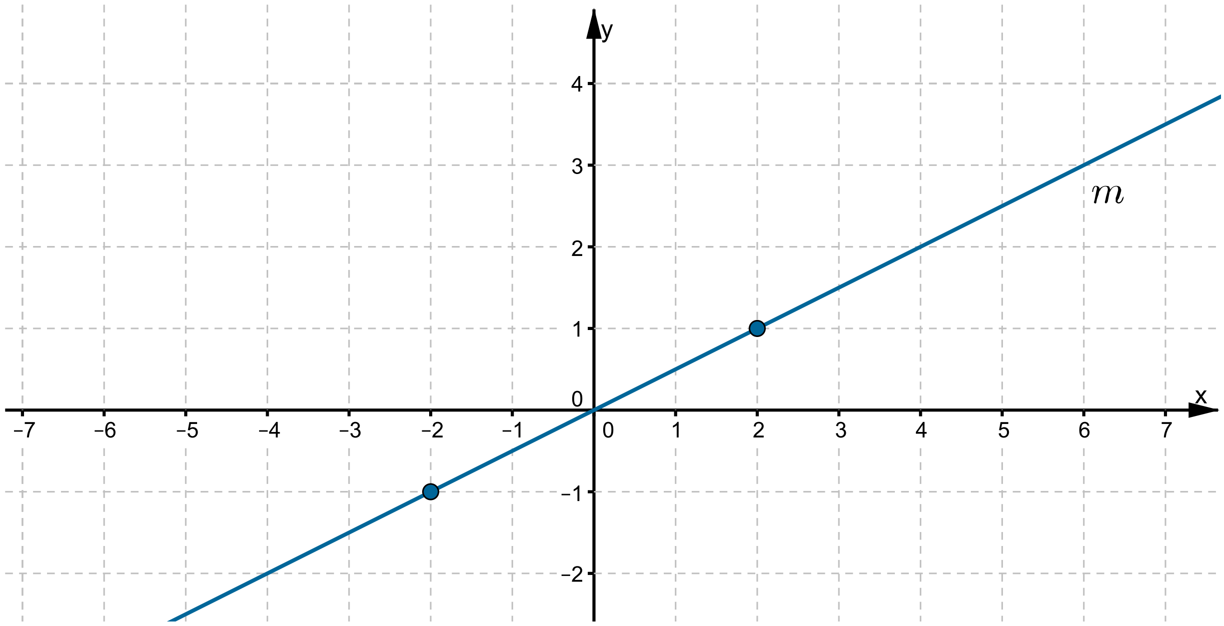
Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D16gDwq0w

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

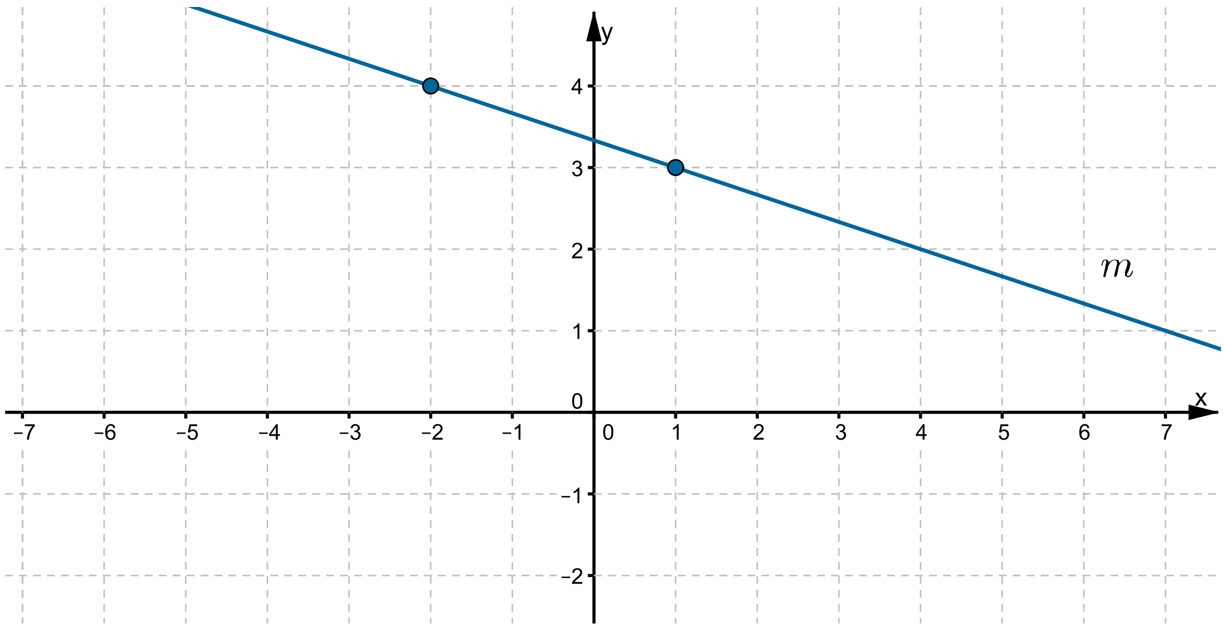
Dopasuj do każdego rysunku odpowiednie równanie prostej.

1. A



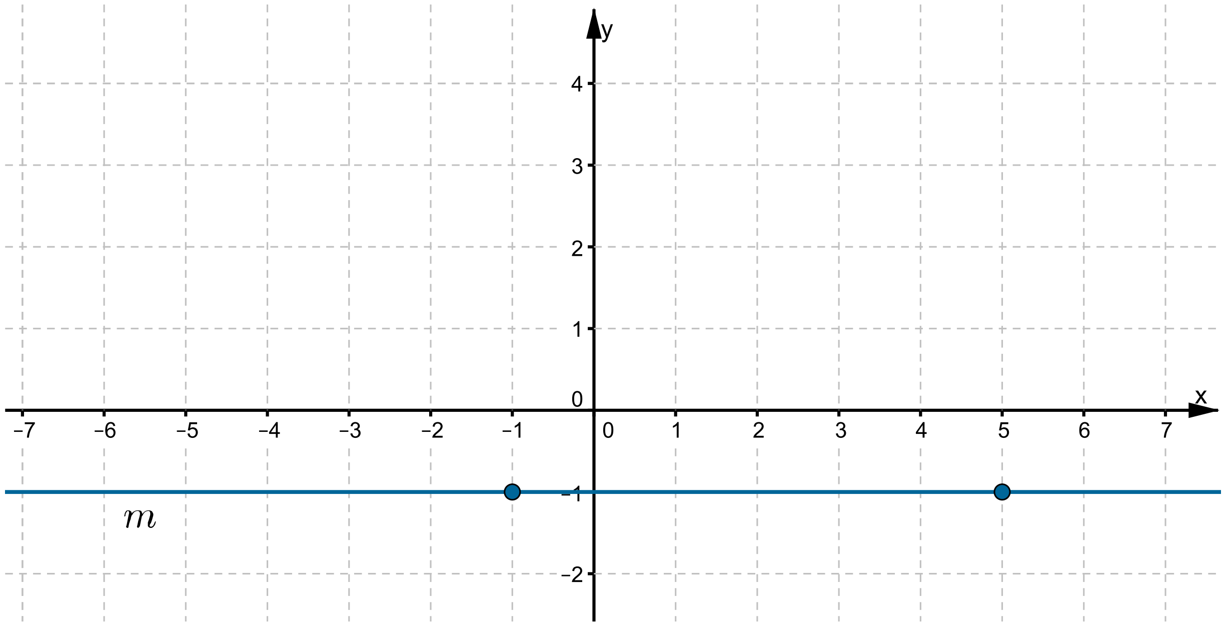
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

2. B



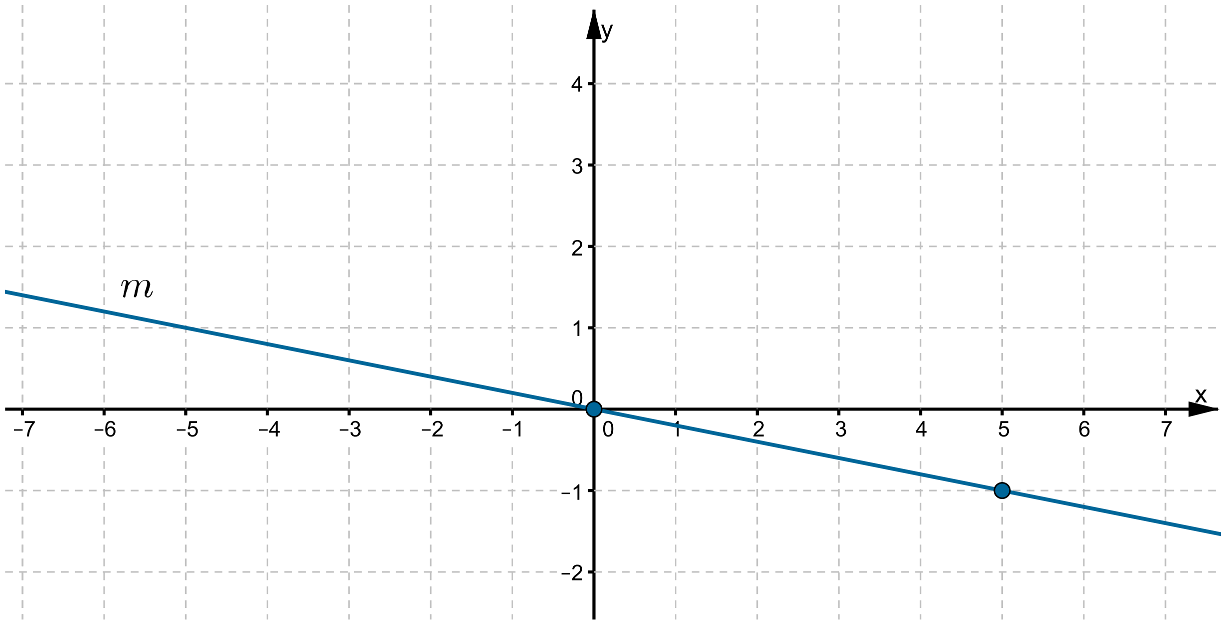
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

3. C



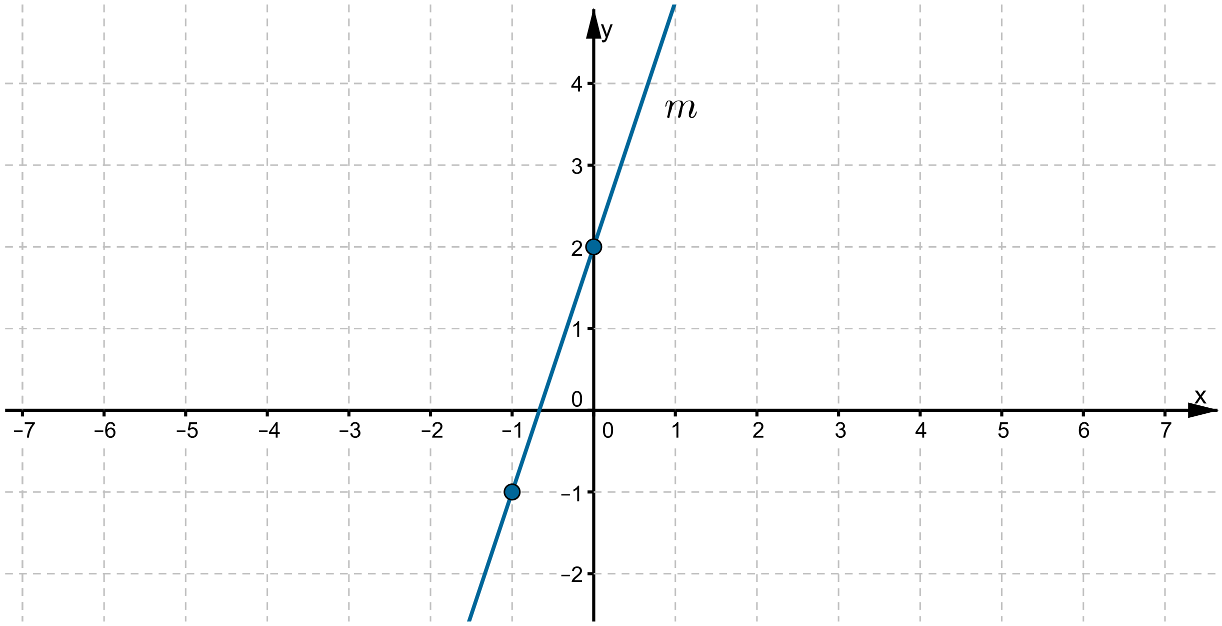
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

4. D



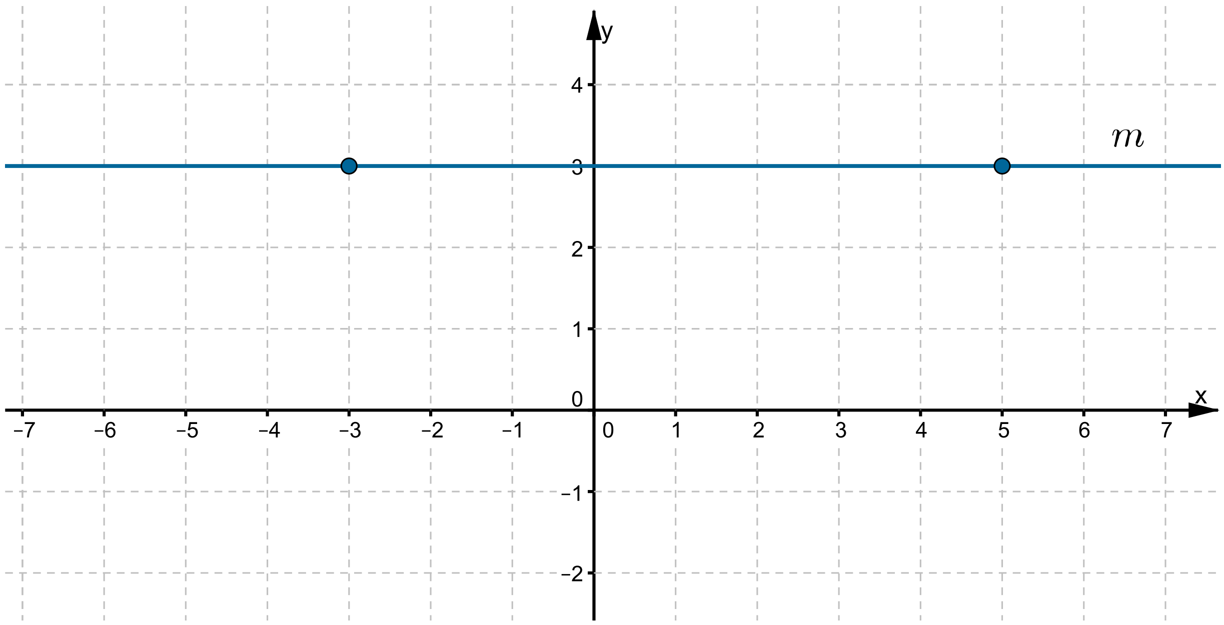
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

5. E



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

6. F



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3

Połącz w pary postać ogólną prostej z jej postacią kierunkową.

<math><mi>y</mi><mo>=</mo><mfrac><mn>1</mn><mn>7</mn></mfrac><mi>x</mi><mo>+</mo><mfrac><mn>5</mn><mn>7</mn></mfrac></math>, <math><mi>y</mi><mo>=</mo><mn>5</mn><mi>x</mi><mo>-</mo><mfrac><mn>1</mn><mn>3</mn></mfrac></math>, <math><mi>y</mi><mo>=</mo><mn>3</mn><mi>x</mi><mo>+</mo><mn>1</mn></math>, <math><mi>x</mi><mo>+</mo><mi>y</mi><mo>+</mo><mn>3</mn><mo>=</mo><mn>0</mn></math>, <math><mi>y</mi><mo>=</mo><mfrac><mn>1</mn><mn>3</mn></mfrac><mi>x</mi><mo>-</mo><mfrac><mn>3</mn><mn>4</mn></mfrac></math>

$-3x+y-1=0$	
$-4x+12y+9=0$	
$-15x+3y+1=0$	
$x-7y+5=0$	
$y=-x-3$	

Ćwiczenie 4

- $y = -3x + 1$
- $y = 3x - 1$
- $y = -3x - 1$
- $y = 3x + 1$

Przykład 1

Wyznaczymy równanie prostej, przechodzącej przez punkty $A = (4, 2)$ i $B = (-3, 1)$.

Współczynnik kierunkowy tej prostej jest równy

$$a = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{2 - 1}{4 + 3} = \frac{1}{7}.$$

Równanie prostej możemy zapisać w postaci

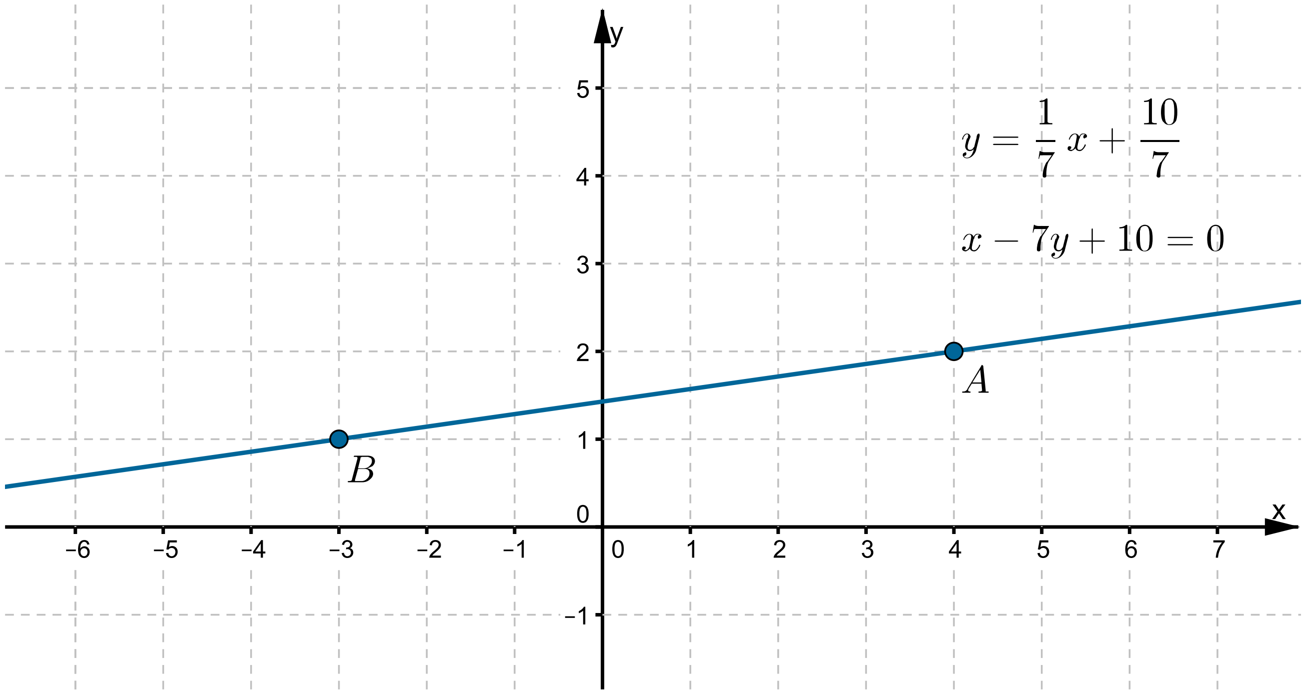
$$y = \frac{1}{7}x + b.$$

Współczynnik b obliczymy, wstawiając do równania współrzędne dowolnego punktu należącego do tej prostej, np. $A = (4, 2)$

$$2 = \frac{1}{7} \cdot 4 + b,$$

więc $b = \frac{10}{7}$. Wynika z tego, że równanie prostej, przechodzącej przez punkty A i B, ma postać:

$$y = \frac{1}{7}x + \frac{10}{7}.$$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zauważmy, że mnożąc obie strony równania prostej przez 7, otrzymamy inną postać tego równania:

$$7y = x + 10.$$

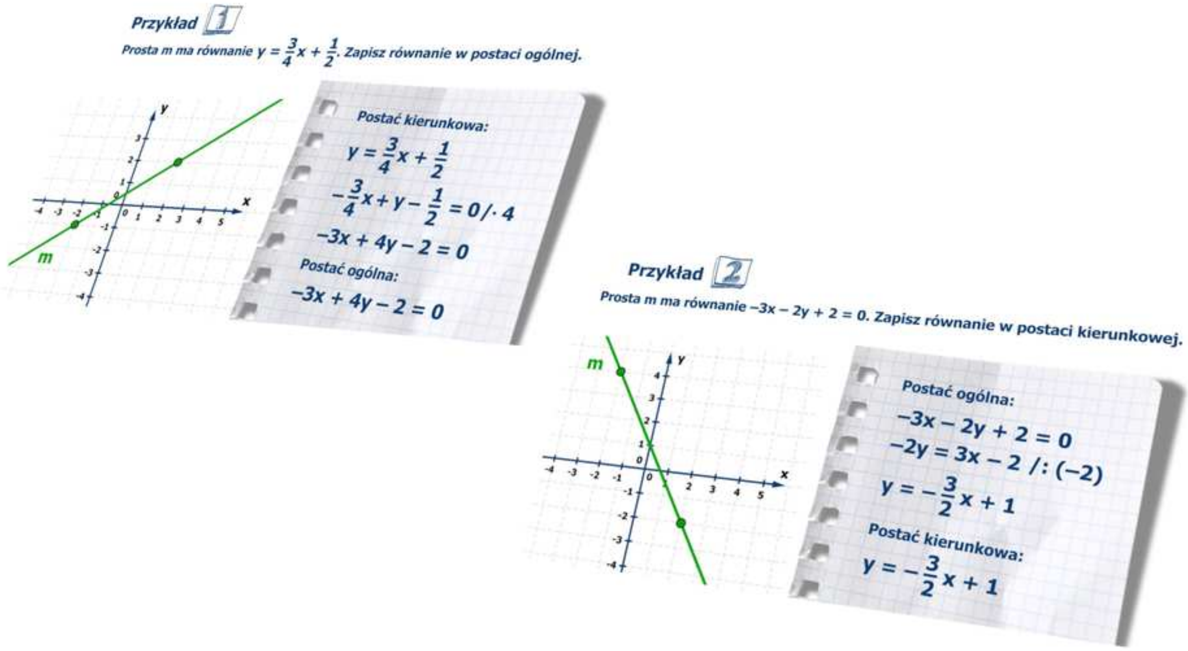
Po uporządkowaniu możemy zapisać

$$x - 7y + 10 = 0.$$

Jest to równanie tej samej prostej, przechodzącej przez punkty A i B, zapisane w postaci ogólnej.

Definicja: Równanie ogólne prostej

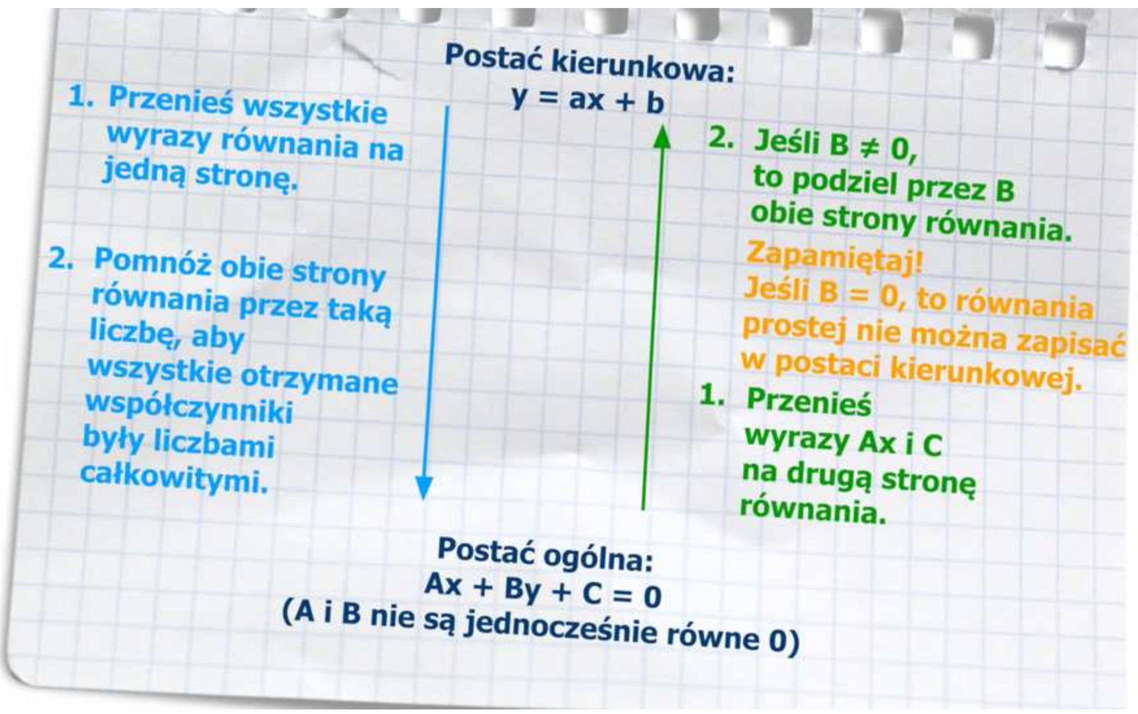
Równanie $Ax + By + C = 0$, gdzie A, B i C są liczbami rzeczywistymi oraz A i B nie są jednocześnie równe zero, nazywamy równaniem ogólnym prostej.



Film dostępny pod adresem /preview/resource/ROGdrUlYNxzO3

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia jak przekształcić równanie prostej w postaci kierunkowej w równanie prostej w postaci ogólnej oraz odwrotnie.



Film dostępny pod adresem /preview/resource/R1AeBeD3ifDSu

Rownanie prostej. Proste rownolegle, proste prostop_atrapa_animacji_6101
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia schemat postępowania, który ułatwia zamianę postaci równania prostej z kierunkowej na ogólną i odwrotnie.

Przykład 2

Wyznaczymy równanie ogólne prostej, przechodzącej przez punkty $A=(x_A, y_A)$ i $B=(x_B, y_B)$, gdzie $x_A \neq x_B$. Zauważmy, że korzystając ze wzoru

$$y=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}(x-x_A)+y_A,$$

otrzymamy postać kierunkową prostej.

Możemy jednak przekształcić wzór tak, aby można było otrzymać również postać ogólną prostej.

Od obu stron równania odejmiemy wyrażenie

$$\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}(x-x_A)+y_A$$

$$y-y_A-\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}(x-x_A)=0.$$

Mnożymy obie strony przez

$$x_A-x_B\,(x_A-x_B\neq 0)$$

$$(y-y_A)(x_A-x_B)-(y_A-y_B)(x-x_A)=0.$$

Zauważmy, że jeżeli $x_A=x_B$, to otrzymany wzór opisuje prostą równoległą do osi Y, przechodzącą przez punkty A i B. Ponieważ $(x_A, y_A) \neq (x_B, y_B)$ i $x_A=x_B$, to $y_A \neq y_B$. Wówczas mamy

$$(y - y_A) \cdot 0 - (y_A - y_B)(x - x_A) = 0 \mid : (y_A - y_B)$$

$$x - x_A = 0$$

$$x = x_A.$$

Zapamiętaj!

Równanie prostej, przechodzącej przez dwa punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, ma postać

$$(y - y_A)(x_A - x_B) - (y_A - y_B)(x - x_A) = 0.$$

Przykład 3

- Wyznaczymy równanie prostej, przechodzącej przez punkty $A = (-3,\ 4)$ i $B = (2, -1)$.

Po podstawieniu współrzędnych punktów A i B do wzoru

$$(y - y_A)(x_A - x_B) - (y_A - y_B)(x - x_A) = 0$$

otrzymamy

$$(y - 4)(-3 - 2) - [4 - (-1)][x - (-3)] = 0$$

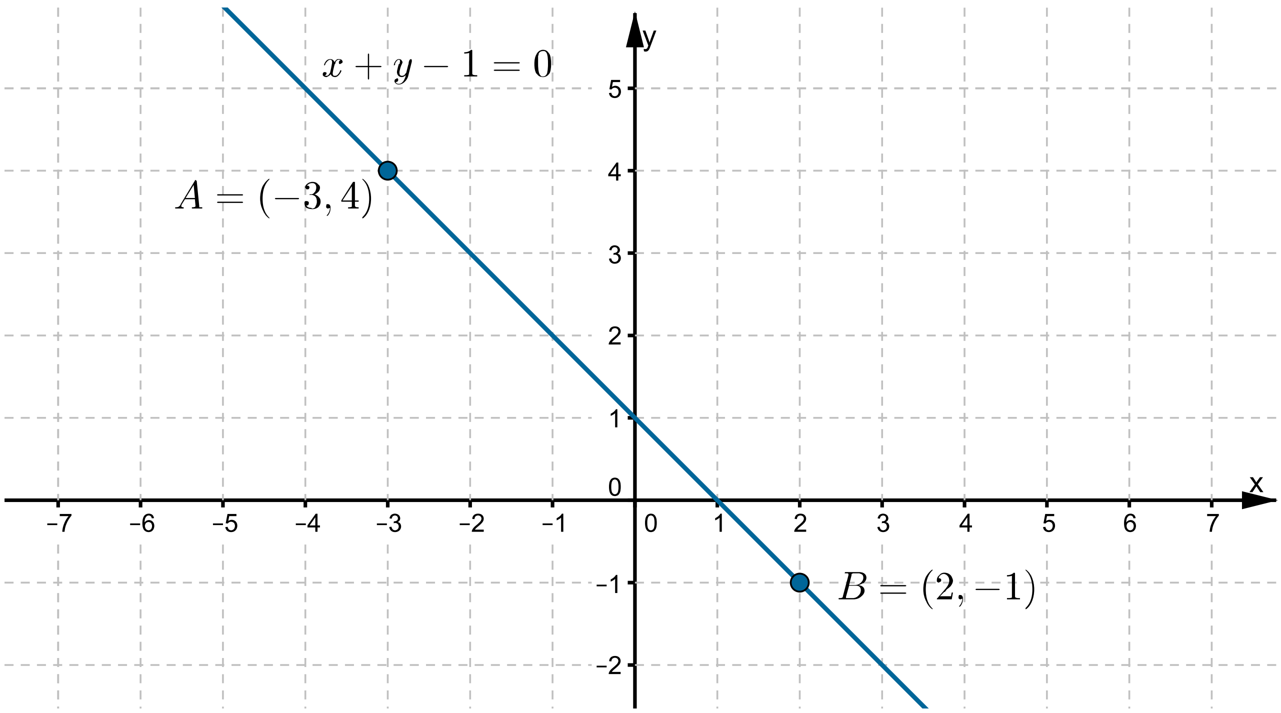
$$-5(y - 4) - 5(x + 3) = 0$$

$$-5y + 20 - 5x - 15 = 0.$$

Po uporządkowaniu

$$-5x - 5y + 5 = 0 \mid : (-5)$$

$$x + y - 1 = 0.$$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- Wyznaczymy równanie prostej, przechodzącej przez punkty $A = (5,\ 2)$ i $B = (5, -3)$.

Po podstawieniu współrzędnych punktów A i B do wzoru

$$(y - y_A)(x_A - x_B) - (y_A - y_B)(x - x_A) = 0$$

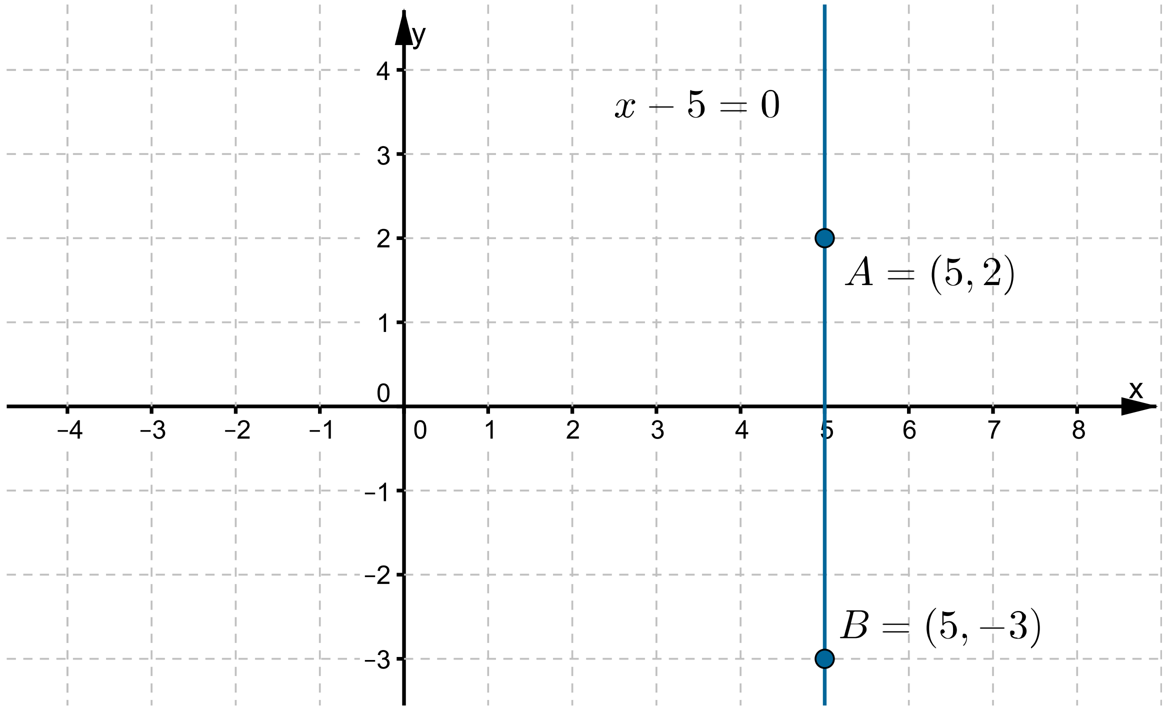
otrzymamy

$$(y - 2)(5 - 5) - (2 + 3)(x - 5) = 0$$

$$0 \cdot (y - 2) - 5(x - 5) = 0.$$

Po uporządkowaniu otrzymaliśmy równanie prostej w postaci ogólnej

$$x - 5 = 0.$$



Jest to prosta prostopadła do osi X. Tej prostej nie można opisać równaniem w postaci kierunkowej, ponieważ nie jest ona wykresem funkcji liniowej.

Uwaga

Równanie tej prostej wyznaczymy szybciej, jeśli zauważymy, że pierwsze współrzędne obu punktów są jednakowe i równe 5, a drugie są różne. Oznacza to, że równanie prostej, przechodzącej przez te punkty, ma postać $x = 5$, czyli $x - 5 = 0$.

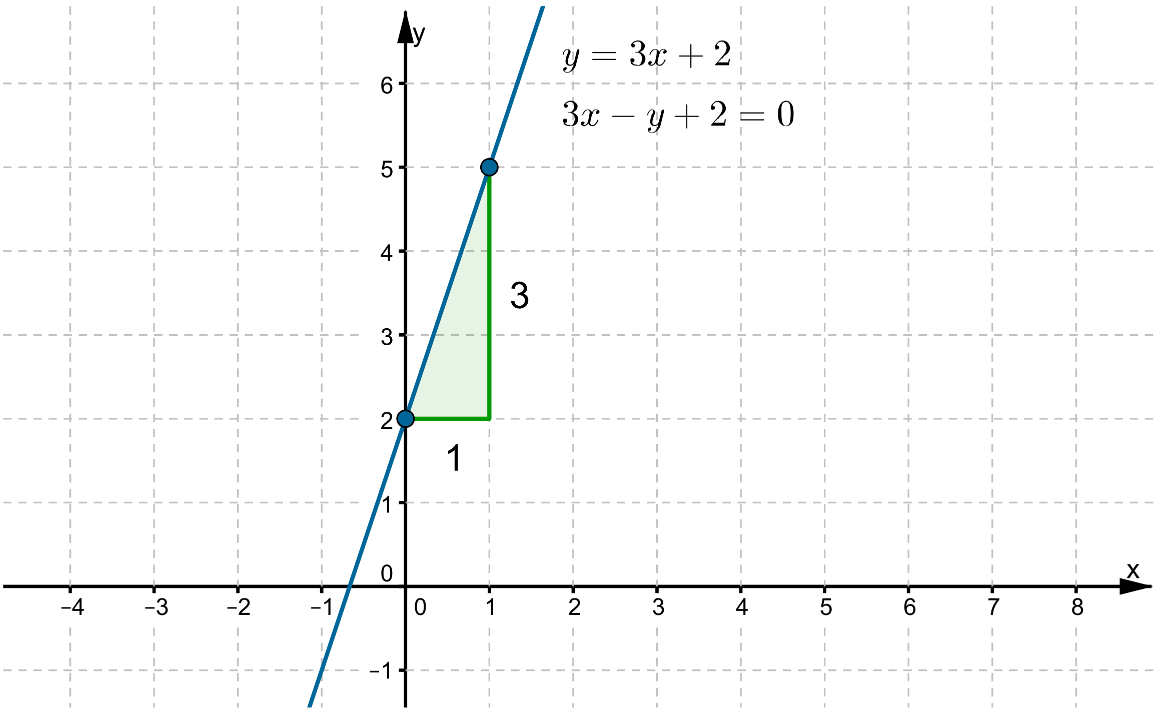
Ćwiczenie 5

Przykład 4

Narysujemy prostą o równaniu ogólnym $3x - y + 2 = 0$.

Narysowanie tej prostej będzie łatwiejsze, jeśli zapiszemy ją w postaci kierunkowej: $y = 3x + 2$.

Z własności funkcji liniowej pamiętamy, że wykres funkcji $y = 3x + 2$ przecina oś Y w punkcie o współrzędnych $(0, 2)$, a współczynnik kierunkowy jest równy 3.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6

- przecina oś Ox w punkcie $(-5,\ 0)$
- przecina oś Oy w punkcie $(0,\ 2)$
- przechodzi przez punkt $A = (2,\ 3)$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8

- $\frac{1}{6}$
- -6
- 6
- $-\frac{1}{6}$

Ćwiczenie 9

- $y = \sqrt{2}$
- $x = -\sqrt{3}$
- $y = -\sqrt{2}$
- $x = \sqrt{3}$

Ćwiczenie 10

- $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$
- $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$
- $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$
- $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

Ćwiczenie 11

- $B = -4$
- $B = 4$
- $B = 2$
- $B = -2$

Ćwiczenie 12

- $m = -3$
- $m = 7$
- $m = 3$
- $m = -7$

Ćwiczenie 13

- $-2x - 3y + 6 = 0$
- $16x + 24y - 48 = 0$
- $2x + 3y - 6 = 0$
- $-8x + 12y + 24 = 0$

Ćwiczenie 14

- $S = (-1{,}4)$
- $S = (3{,}2)$
- $S = (-5{,}7)$
- $S = (-3{,}7)$

Ćwiczenie 15

- $B = (-4, -1)$
- $B = (3, -1)$
- $B = (2{,}2)$
- $B = (2, -2)$

Ćwiczenie 16

- $\mathrm{AC} : y = -x, \mathrm{BC} : y = -2x + 150$
- $AC : y = x, \mathrm{BC} : y = -2x + 150$
- $\mathrm{AC} : y = -x, \mathrm{BC} : \ y = 2x + 150$
- $\mathrm{AC} : y = x, \mathrm{BC} : \ y = 2x + 150$

Ćwiczenie 17

- $\mathrm{AC}: x+1=0, \mathrm{BD}: y-4=0$
- $\mathrm{AC}: x-1=0, \mathrm{BD}: y+4=0$
- $\mathrm{AC}: x+1=0, \mathrm{BD}: y+4=0$
- $\mathrm{AC}: x-1=0, \mathrm{BD}: y-4=0$

Ćwiczenie 18

Ćwiczenie 19

Ćwiczenie 20

Ćwiczenie 21

Ćwiczenie 22

Ćwiczenie 23

Uzasadnij, że nie istnieje wartość m, dla której prosta $\left(m^2-9\right)x+(m-3)y+m+3=0$ jest prostopadła do osi X.