Zadania na dowodzenie z wykorzystaniem tożsamości trygonometrycznych

Źródło: Kelly Lacy, dostępny w internecie: www.pexels.com.

Tożsamością algebraiczną nazywamy takie równanie, które jest spełnione niezależnie od wartości podstawianych pod zmienne. Wartości, które podstawiamy do równania muszą należeć do dziedziny równania. Dziedziną równania jest taki zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, dla których równanie ma sens.

Na lekcji dowiesz się, jak dowodzimy specjalnego typu tożsamości, czyli tożsamości trygonometrycznych. W dowodach będziemy opierać się na dwóch poznanych tożsamościach trygonometrycznych:

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ dla dowolnych $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ dla dowolnych $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Twoje cele

- Nauczysz się wykorzystywać podstawowe tożsamości trygonometryczne do dowodzenia złożonych tożsamości trygonometrycznych.
- Dowiesz się, jakie stosujemy techniki dowodzenia tożsamości trygonometrycznych.

Przeczytaj

Tożsamością algebraiczną, jak zdefiniowaliśmy to we wprowadzeniu, nazywamy takie równanie, które jest spełnione niezależnie od wartości podstawianych pod zmienne.

Tożsamość trygonometryczna to szczególny rodzaj tożsamości algebraicznej. Jest to tożsamość, w której występują funkcje trygonometryczne.

Zwykle spotykamy się z dwoma rodzaj zadań związanych z tożsamościami trygonometrycznymi. Pierwszy rodzaj, to zadania typu: udowodnij, że równanie jest tożsamością. Drugi rodzaj, to zadania typu: sprawdź, czy podane równanie jest tożsamością. Drugi rodzaj zadań jest zwykle trudniejszy, gdyż nie jest podany kierunek naszych działań. Jeżeli równanie nie jest tożsamością, to wystarczy podać jeden przykład (kontrprzykład), który po podstawieniu do równania pokazuje, że lewa strona nie jest równa prawej. Jeżeli równanie jest tożsamością, to należy to udowodnić poprzez takie przekształcanie obu stron równania, aby otrzymać takie same wyrażenia. Uwaga: czasami wystarcza przekształcanie tylko jednej strony równania tak długo, aż otrzymamy drugą stronę równania.

W dowodach będziemy opierać się na dwóch poznanych tożsamościach trygonometrycznych:

1. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ dla dowolnych $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ dla dowolnych $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 1

Udowodnimy, że równanie $\operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{\cos x}{1-\cos x} = \frac{1+\cos x}{\cos x}$ jest tożsamością.

Rozwiązanie:

Zacznijmy od określenia dziedziny równania. Do dziedziny równania należą takie liczby rzeczywiste x, że $\operatorname{tg} x$ ma sens, $\cos x \neq 0$ i $\cos x \neq 1$.

Zatem dziedziną równania jest zbiór takich liczb rzeczywistych x, że $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ i $x \neq k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Rozpoczniemy przekształcanie lewej strony, gdyż wygląda na bardziej skomplikowaną i będzie można uprościć jej postać.

Najpierw wykorzystamy tożsamość trygonometryczną $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$:

$L = \operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{\cos x}{1-\cos x} = \frac{\sin^2 x \cos x}{\cos^2 x - \cos^3 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos x - \cos^2 x}$

następnie wykorzystamy jedynkę trygonometryczną:

$= \frac{1-\cos^2 x}{\cos x-\cos^2 x} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\cos x(1-\cos x)} = \frac{1+\cos x}{\cos x} = P.$

Zatem wykorzystując dwie podstawowe tożsamości trygonometryczne przekształciliśmy lewą stronę równania w taki sposób, że otrzymaliśmy stronę prawą tego równania, co oznacza, że równość jest tożsamością.

Przykład 2

Udowodnimy, że równanie $\frac{\sin^6\alpha-\cos^6\alpha}{(1-\sin\alpha\cdot\cos\alpha)(\sin\alpha-\cos\alpha)} = (\sin\alpha + \cos\alpha)(1 + \sin\alpha \cdot \cos\alpha)$ jest tożsamością.

Rozwiązanie:

Zapiszmy założenia:

1. $\sin\alpha \neq \cos\alpha$ skąd wynika, że $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + \pi k$, dla $k \in \mathbb{Z}$.
2. $\sin\alpha \cdot \cos\alpha \neq 1$, które zachodzi dla dowolnej liczby rzeczywistej α.

Ostatecznie zatem $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Wykorzystajmy wzór skróconego mnożenia: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

$L = \frac{\sin^6\alpha-\cos^6\alpha}{(1-\sin\alpha\cdot\cos\alpha)(\sin\alpha-\cos\alpha)} = \frac{\left(\sin^3\alpha-\cos^3\alpha\right)\left(\sin^3\alpha+\cos^3\alpha\right)}{\left(\cos^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha\right)\left(\sin\alpha-\cos\alpha\right)}.$

Teraz skorzystajmy ze wzorów skróconego mnożenia na różnicę sześcianów $a^3 - b^3 = \left(a-b\right)\left(a^2+ab+b^2\right)$ i $a^3 + b^3 = \left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2\right)$:

1. $\frac{\sin^3\alpha-\cos^3\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha} = \frac{\left(\sin\alpha-\cos\alpha\right)\left(\sin^2\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha\right)}{\sin\alpha-\cos\alpha} =$
   $= \sin^2\alpha + \sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha = 1 + \sin\alpha\cdot\cos\alpha,$
2. $\frac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha} =$

$= \frac{\left(\sin\alpha+\cos\alpha\right)\left(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha\right)}{\sin^2\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha} = \cos\alpha + \cos\alpha.$

A zatem lewa strona równania po przekształceniach jest równa:

$L = (\sin\alpha + \cos\alpha)(1 + \sin\alpha \cdot \cos\alpha) = P$, co kończy dowód tożsamości.

Przykład 3

Sprawdź, czy równanie: $\left(\frac{1}{\sin x} + \operatorname{tg} x\right) : \left(\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\operatorname{tg}x}\right) = \frac{\frac{7}{4}+\cos x-2\cos^2 x}{\frac{1}{2}+2\sin x-\sin^2 x}$ jest tożsamością.

Rozwiązanie:

Najpierw spróbujemy sprawdzić, czy dla wybranych charakterystycznych wartości α równość zachodzi.

Wybierzmy wartość: $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Wówczas:

$$L = \left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right) : \left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}\right) = \frac{2+\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}} = \frac{6+\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{5} = \frac{2\sqrt{3}+1}{5}$$

oraz

$$P = \frac{\frac{7}{4}+\cos\frac{\pi}{6}-2\cos^2\frac{\pi}{6}}{\frac{1}{2}+2\sin\frac{\pi}{6}-\sin^2\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{7}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}-2\cdot\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{5}{4}} = \frac{2\sqrt{3}+1}{5}.$$

W takim razie podstawienie $\alpha = \frac{\pi}{6}$ nie daje rozstrzygnięcia, czy równość jest tożsamością, czy nie jest.

Wybierzmy inną wartość:$\alpha = \frac{\pi}{4}$. Wówczas:

$$L = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = 1.$$

$$P = \frac{\frac{7}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}-2\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\sqrt{2}-\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{2}.$$

Oznacza to, że $L \neq P$, a zatem równość nie jest tożsamością.

W przypadku przykładu 3. okazało się, że równość nie jest tożsamością. Udowodniliśmy to, korzystając z kontrprzykładu, czyli takiej wartości zmiennej, dla której równość nie zachodzi.

Słownik

tożsamość

równanie, które jest spełnione dla dowolnej wartości zmiennej lub zmiennych, dla których równanie ma sens.

tożsamość trygonometryczna

zależność między funkcjami trygonometrycznymi, która jest spełniona dla dowolnej wartości zmiennej lub zmiennych, dla których zależność ma sens.

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją, a następnie w oparciu o nią wykonaj polecenia.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D9aczWu0U

Film dotyczący zadań na dowodzenie z wykorzystaniem tożsamości trygonometrycznych.

Polecenie 2

Udowodnimy, że dla każdej takiej liczby rzeczywistej α, że $|\sin\alpha| \neq 1$ zachodzi tożsamość: $\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} + \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} = \frac{2}{|\cos\alpha|}$.

Polecenie 3

Udowodnij tożsamość

$\frac{\sqrt{1+\cos\alpha}-\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}} = \frac{\cos\alpha}{1+|\sin\alpha|}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Udowodnij tożsamość $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - \sin^6\alpha - \cos^6\alpha = \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$.

Ćwiczenie 8

Sprawdź, czy poniższe równanie jest tożsamością:

$$\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{1 + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{\mathrm{tg}\alpha + 1}{\mathrm{tg}\alpha - 1}.$$

Dla nauczyciela

Autor: Karol Nowakowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zadania na dowodzenie z wykorzystaniem tożsamości trygonometrycznych

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Cele nauczania – wymagania szczegółowe:
VII. Trygonometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

4) korzysta z wzorów $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $tg\alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$;

Zakres rozszerzony
4) stosuje wzory redukcyjne dla funkcji trygonometrycznych;
5) korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje techniki dowodzenia tożsamości trygonometrycznych,
- dowodzi złożone tożsamości trygonometryczne wykorzystując podstawowe tożsamości trygonometryczne.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- metoda projektów;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj".

Faza wstępna:

1. Wskazanie przez nauczyciela tematu: „Zadania na dowodzenie z wykorzystaniem tożsamości trygonometrycznych" i celów zajęć, przejście do wspólnego ustalenia kryteriów sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj". Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Wybrani uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1-2 na forum klasy. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami na bieżąco. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają odpowiedzi, a reszta klasy wspólnie ustosunkowuje się do nich. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia nr 3 i 7, a następnie porównują swoje odpowiedzi z kolegą lub koleżanką.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się".

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenie nr 8 z sekcji „Sprawdź się".

Materiały pomocnicze:

Wykresy i własności funkcji trygonometrycznych

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja" można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Zadania na dowodzenie z wykorzystaniem tożsamości trygonometrycznych".