Własności ciągów monotonicznych

Własności ciągów monotonicznych

Źródło: Briam Cute z Pixabay, domena publiczna.

Być może zdarzyło ci się w młodszych klasach szkoły podstawowej tworzyć szlaczki składające się z figur geometrycznych.

Na poniższym rysunku szlaczek zbudowany jest z półkoli. Przyjrzyj się kolejnym półkolom – co zauważasz?

Każde następne półkole ma średnicę dwukrotnie mniejszą niż półkole poprzednie (oprócz oczywiście półkola pierwszego - figura 1) . Długości średnic tych półkoli tworzą więc ciąg malejący. O ciągu malejącym mówimy, że jest to ciąg monotoniczny.

Odkrywaniem zależności między wyrazami ciągów monotonicznych będziemy zajmować się właśnie w tym materiale.

> **Twoje cele**

- Odkryjesz niektóre własności ciągów monotonicznych.
- Udowodnisz wybrane własności ciągów monotonicznych.
- Wykorzystasz monotoniczność ciągów w zadaniach algebraicznych.

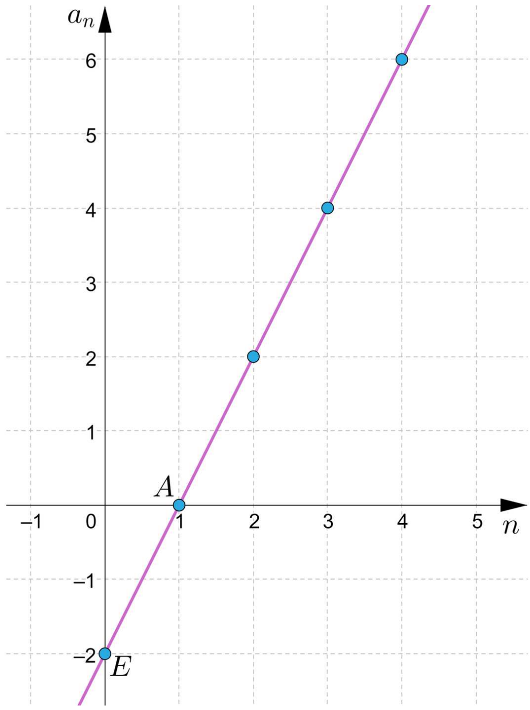
Przeczytaj

Ciąg, podobnie jak każdą funkcję, nazywamy monotonicznym, jeżeli jest rosnący, malejący, stały, nierosnący albo niemalejący.

W przypadku takich ciągów, z reguły łatwo zauważyć wyraźną zależność między wyrazami ciągu.

Przykład 1

Wykres nieskończonego ciągu (a_n) zawarty jest w wykresie funkcji liniowej f przedstawionym na rysunku.



Na podstawie wykresu możemy odczytać kolejne wyrazy ciągu:

$0, 2, 4, 6, \ldots$

Wnioskujemy, że różnica między kolejnymi wyrazami ciągu jest stała i równa 2, czyli ciąg jest rosnący.

Aby to udowodnić, określimy najpierw wzór funkcji f. Wykres tej funkcji przechodzi przez punkty

$A = (1, 0)$ i $E = (0, -2)$. Zatem współrzędne każdego z tych punktów spełniają równanie

$$f(x) = ax + b$$

Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} 0 = a + b \\ (-2) = b \end{cases}$$

Stąd $a = 2$ i $b = (-2)$.

Zatem $f(x) = 2x - 2$.

Wynika z tego, że wzór ogólny ciągu ma postać $a_n = 2n - 2$.

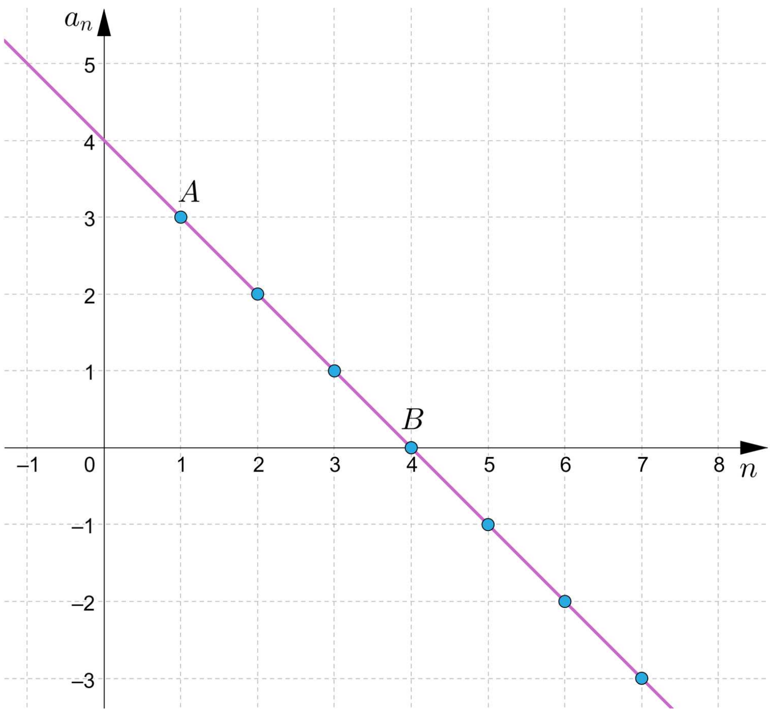
Obliczamy różnicę między kolejnymi wyrazami ciągu.

$a_{n+1} - a_n = 2(n+1) - 2 - 2n + 2 = 2 > 0$ - ciąg rosnący.

Zauważmy, że różnica między kolejnymi wyrazami ciągu jest równa współczynnikowi kierunkowemu prostej, w której zawarty jest wykres ciągu.

Przykład 2

Wykres nieskończonego ciągu (a_n) zawarty jest w wykresie funkcji liniowej f przedstawionym na rysunku.



Na podstawie wykresu możemy odczytać kolejne wyrazy ciągu:

$3, 2, 1, 0, (-1), (-2), \ldots$

Wnioskujemy, że różnica między kolejnymi wyrazami jest stała i równa (-1), czyli ciąg jest malejący.

Aby to udowodnić, określimy najpierw wzór funkcji f. Wykres tej funkcji przechodzi przez punkty $A = (1, 3)$ i $B = (4, 0)$. Zatem współrzędne każdego z tych punktów spełniają równanie

$$f(x) = ax + b$$

Rozwiązujemy układ równań.

$$\begin{cases} 3 = a + b \\ 0 = 4a + b \end{cases}$$

Stąd $a = (-1)$ i $b = 4$.

Zatem $f(x) = (-x) + 4$.

Wynika z tego, że wzór ogólny ciągu ma postać $a_n = (-n) + 4$.

Obliczamy różnicę między kolejnymi wyrazami ciągu.

$a_{n+1} - a_n = -(n + 1) + 4 + n - 4 = -1 < 0$ – ciąg malejący.

Zauważmy, że różnica między kolejnymi wyrazami ciągu jest równa współczynnikowi kierunkowemu prostej, w której zawarty jest wykres ciągu.

Korzystając z rozważań zawartych w powyższych przykładach, możemy zapisać:

jeśli wykres ciągu (a_n) jest zawarty w wykresie funkcji liniowej $f(x) = ax + b$, to dla $a > 0$ ciąg jest rosnący, a dla $a < 0$ ciąg jest malejący.

Podobny wniosek możemy zapisać, gdy znamy wzór ogólny ciągu.

Twierdzenie: monotoniczność ciągu $a_n = an + b$

Ciąg (a_n) określony wzorem ogólnym $a_n = an + b$ jest dla każdej liczby rzeczywistej b

- rosnący, gdy $a > 0$,
- malejący, gdy $a < 0$,
- stały, gdy $a = 0$.

Przykład 3

Rozważmy dwa ciągi. Ciąg (a_n) określony wzorem ogólnym $a_n = \frac{1}{n+1}$ i ciąg (b_n) określony wzorem ogólnym $b_n = \left(-\frac{1}{n+1}\right)$.

Początkowe wyrazy ciągu (a_n) to: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

Początkowe wyrazy ciągu (b_n) to: $(-\frac{1}{2}), (-\frac{1}{3}), (-\frac{1}{4}), (-\frac{1}{5}), \ldots$

Ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym, a ciąg (b_n) jest ciągiem rosnącym i $b_n = (-a_n)$.

Wniosek

Jeżeli ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym, to ciąg (b_n) określony wzorem ogólnym $b_n = (-a_n)$ jest ciągiem rosnącym.

Istotnie, jeśli ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym, to $a_{n+1} < a_n$.

Mnożąc obie strony tej nierówności przez (-1), otrzymujemy

$(-a_{n+1}) > (-a_n)$, czyli to $b_{n+1} > b_n$,

co oznacza, że ciąg (b_n) jest ciągiem rosnącym.

Podobny wniosek można zapisać, gdy ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym.

Wniosek

Jeżeli ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym, to ciąg (b_n) określony wzorem ogólnym $b_n = (-a_n)$ jest ciągiem malejącym.

Definicja: ciągi ściśle monotoniczne

Ciągi rosnące i malejące nazywamy ciągami ściśle monotonicznymi.

Ciągi monotoniczne, to nie tylko ciągi ściśle monotoniczne, ale też ciągi nierosnące i niemalejące.

Przykład 4

Uzasadnimy, że ciąg określony wzorem ogólnym $a_n = \left[\frac{n}{2}\right]$ jest ciągiem niemalejącym.

Przypomnijmy, że $[x]$ to część całkowita liczby x. Czyli największa liczba całkowita nie większa od x.

Na przykład:

$[5] = 5$

$\left[7\frac{1}{3}\right] = 7$

Zatem jeśli n jest liczbą parzystą, to $\frac{n}{2}$ jest liczbą całkowitą i $\left[\frac{n}{2}\right] = \frac{n}{2}$.

Jeśli liczba n jest liczbą nieparzystą, to $\left[\frac{n+1}{2}\right] = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$.

Możemy więc zapisać, że jeśli $n \in \mathbb{N}_+$ i $k \in \mathbb{N}_+$ to

$$a_{n+1} - a_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ 1, & n = 2k - 1 \end{cases}$$

Czyli dla każdej liczby naturalnej dodatniej n prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} - a_n \geq 0$, co dowodzi, że ciąg jest niemalejący.

Ciąg rosnący posiada wyraz najmniejszy. Czyli każdy wyraz takiego ciągu jest większy od pewnej liczby rzeczywistej. O takim ciągu mówimy, że jest ograniczony z dołu.

Definicja: ciąg ograniczony z dołu

Mówimy, że ciąg (a_n) jest ograniczony z dołu, jeżeli istnieje taka liczba rzeczywista m, że dla każdej liczby naturalnej dodatniej n spełniona jest nierówność $a_n \geq m$.

Ciąg malejący posiada wyraz największy. Czyli każdy wyraz takiego ciągu jest mniejszy od pewnej liczby rzeczywistej. O takim ciągu mówimy, że jest ograniczony z góry.

Definicja: ciąg ograniczony z góry

Mówimy, że ciąg (a_n) jest ograniczony z góry, jeżeli istnieje taka liczba rzeczywista M, że dla każdej liczby naturalnej dodatniej n spełniona jest nierówność $a_n \leq M$.

Definicja: ciąg ograniczony

Ciąg (a_n) nazywamy ograniczonym, jeśli istnieją dwie takie liczby rzeczywiste m i M, że dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}_+$ spełniona jest nierówność:

$$m \leq a_n \leq M$$

Liczby m i M nazywamy odpowiednio ograniczeniem dolnym i górnym ciągu.

Przykład 5

Wykażemy, że ciąg (a_n) określony wzorem

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n(n+1)}, x \geq 1 \end{cases}$$

jest ograniczony.

Wypisujemy kilka początkowych wyrazów ciągu.

$$3, 3\tfrac{1}{2}, 3\tfrac{2}{3}, 3\tfrac{3}{4}, 3\tfrac{4}{5}, \ldots$$

Możemy zapisać przypuszczalny wzór na n–ty wyraz ciągu

$$a_n = 3 + \frac{n-1}{n} = 3 + 1 - \frac{1}{n} = 4 - \frac{1}{n}.$$

Sprawdzamy swoje przypuszczenia.

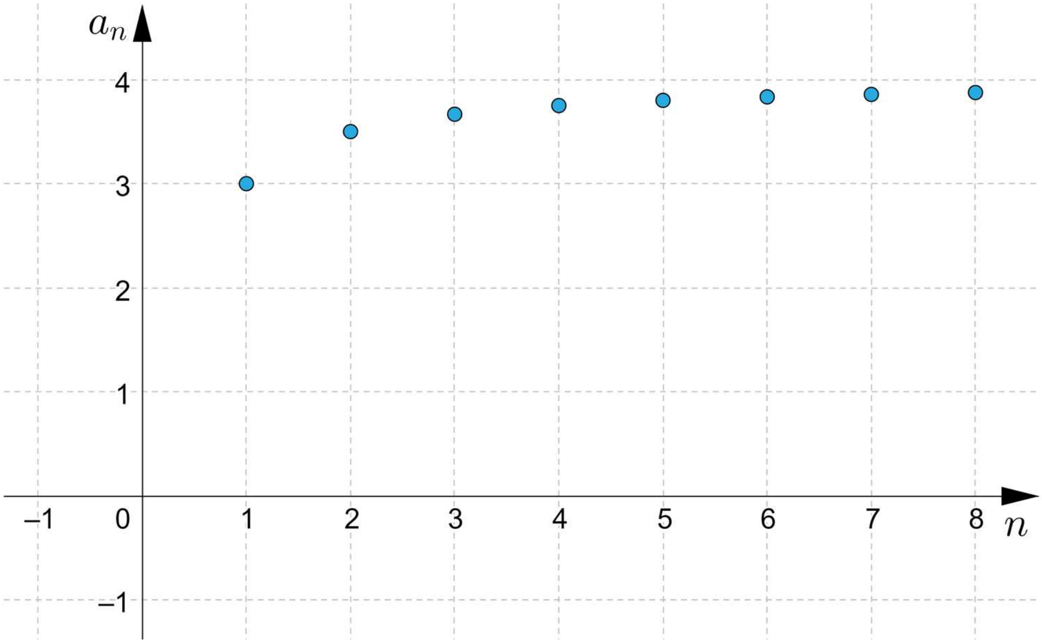
$a_1 = 3$

$a_{n+1} - a_n = 4 - \frac{1}{n+1} - 4 + \frac{1}{n}$

$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$

$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n(n+1)}$

Czyli znaleziony wzór jest poprawny.



Na podstawie powyższych rozważań zauważamy, że ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym. Najmniejszy wyraz tego ciągu to 3, a największy to 4. A zatem jest to ciąg ograniczony.

$3 \leq a_n \leq 4$

Liczba ograniczająca ten ciąg z góry to na przykład 4, a liczba ograniczająca ciąg z dołu to na przykład 3.

Słownik

monotoniczność ciągu

ciąg (a_n) określony wzorem ogólnym $a_n = an + b$ jest dla każdej liczby rzeczywistej b

- rosnący, gdy $a > 0$,
- malejący, gdy $a < 0$,
- stały, gdy $a = 0$

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z galerią zdjęć interaktywnych. Spróbuj najpierw samodzielnie rozwiązać zapisany tam przykład, a następnie porównaj z rozwiązaniem.

Polecenie 2

Wykaż, że ciąg (a_n) określony wzorem

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = (-3a_n) - 1, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

nie jest monotoniczny.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ciąg (a_n) określony wzorem $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 3a_n - 1, n \geq 1 \end{cases}$

- jest ciągiem stałym
- jest ciągiem rosnącym
- nie jest ciągiem monotonicznym
- jest ciągiem malejącym

Ćwiczenie 2

Ciąg (a_n) określony wzorem $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = ka_n, \quad n \geq 1 \end{cases}$ nie jest ciągiem monotonicznym. Zatem liczba k może być równa:

- 0
- 1
- -2
- $\frac{1}{5}$

Ćwiczenie 3

Uzupełnij zdania, przeciągając odpowiednie wyrazy.

Każdy ciąg rosnący jest ciągiem ______.

Ciąg (a_n) jest ciągiem ______, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej dodatniej n prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} \leq a_n$.

Ciąg, który jest ciągiem niemalejącym i nierosnącym jest ciągiem ______.

nierosnącym | stałym | niemalejącym

Ćwiczenie 4

Wiadomo, że ciąg (a_n) o wyrazach dodatnich jest ciągiem malejącym. Ciągi (b_n), (c_n), (d_n), (e_n), (g_n) określone są podanymi wzorami. Przeciągnij wzory tych ciągów do odpowiednich pól.

Ciągi rosnące

Ciągi malejące

$c_n = \frac{1}{2} \cdot a_n$

$g_n = -\frac{1}{a_n}$

$b_n = -2a_n$

$d_n = -\frac{1}{2} \cdot a_n$

$e_n = \frac{1}{a_n}$

Ćwiczenie 5

Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = \begin{cases} n+1, \text{dla } n \text{ parzystych} \\ n, \text{dla } n \text{ nieparzystych} \end{cases}$

Zaznacz, które zdanie jest prawdziwe, a które fałszywe.

	Prawda	Fałsz
Ten ciąg jest nierosnący.	○	○
Ciąg jest ograniczony z dołu liczbą 1.	○	○
Najmniejszy wyraz ciągu to 1.	○	○
Wyrazy $a_3 = a_4$.	○	○
Ten ciąg jest nieograniczony z góry.	○	○

Ćwiczenie 6

Każdy z ciągów (a_n), (b_n), (c_n) określonych odpowiednio wzorem ogólnym $a_n = \frac{n}{n+5}$, $b_n = 9$, $c_n = \frac{6}{n}$ jest ciągiem ograniczonym.

Uzupełnij nierówności, wpisując odpowiednio: największą liczbę naturalną ograniczającą dany ciąg z dołu i najmniejszą liczbę naturalną ograniczającą dany ciąg z góry.

[ ] $\leq a_n \leq$ [ ]

[ ] $\leq b_n \leq$ [ ]

[ ] $\leq c_n \leq$ [ ]

Ćwiczenie 7

Wyznacz wszystkie nieujemne wyrazy ciągu (a_n) określonego wzorem ogólnym

$$a_n = \frac{(n-1)! - n!}{(n-1)! + n!}$$

Ćwiczenie 8

Znajdź najmniejszy wyraz ciągu (a_n) określonego wzorem ogólnym

$$a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Własności ciągów monotonicznych

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;

2) oblicza początkowe wyrazy ciągów określonych rekurencyjnie, jak w przykładach
$$\begin{cases} a_1 = 0,001 \\ a_n = a_n + \frac{1}{2} \cdot a_n(1 - a_n) \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases};$$

3) w prostych przypadkach bada, czy ciąg jest rosnący, czy malejący.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- odkrywa niektóre własności ciągów monotonicznych,
- udowadnia wybrane własności ciągów monotonicznych,
- wykorzystuje monotoniczność ciągów w zadaniach algebraicznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- tak – nie,
- kartki z kalendarza.

Formy zajęć:

- praca w grupach,
- praca w parach,
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer.

Przebieg lekcji

Faza wprowadzająca:

1. Uczniowie w parach metodą tak – nie powtarzają wiadomości na temat ciągów (jeden z uczniów podaje stwierdzenie na temat ciągów, drugi określa czy jest to stwierdzenie prawdziwe czy fałszywe).
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w małych grupach metodą kartki z kalendarza pracują nad przykładami opisanymi w sekcji Przeczytaj (uczniowie najpierw czytają treść danego zadania, a następnie opierając się na znanych zadaniach podobnego typu, próbują samodzielnie rozwiązać problem. W razie problemów, korzystają z „kartek z kalendarza” – czyli zapisków w zeszycie z poprzednich lekcji. Na koniec porównują swoje rozwiązania z przedstawionymi w przykładach).
2. Podsumowaniem tego etapu lekcji jest wspólna dyskusja na temat sposobów rozwiązywania zadań dotyczących monotoniczności ciągów, a w szczególności ciągów określonych rekurencyjnie.
3. Uczniowie wspólnie opracowują algorytm rozwiązywania takich zadań.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności. Liderzy grup opowiadają o ciekawych pomysłach, ale też problemach pracy w grupach.

2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup.

Praca domowa:

Rozwiązanie zadań interaktywnych.

Materiały pomocnicze:

Monotoniczność. Przykłady

Pojęcie ciągu. Ciąg jako funkcja zmiennej naturalnej

Wskazówki metodyczne:

Galerię zdjęć interaktywnych można wykorzystać na zajęciach dotyczących ciągów rekurencyjnych.