




Obliczanie długości odcinków w wielokątach z wykorzystaniem cech przystawania trójkątów

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)

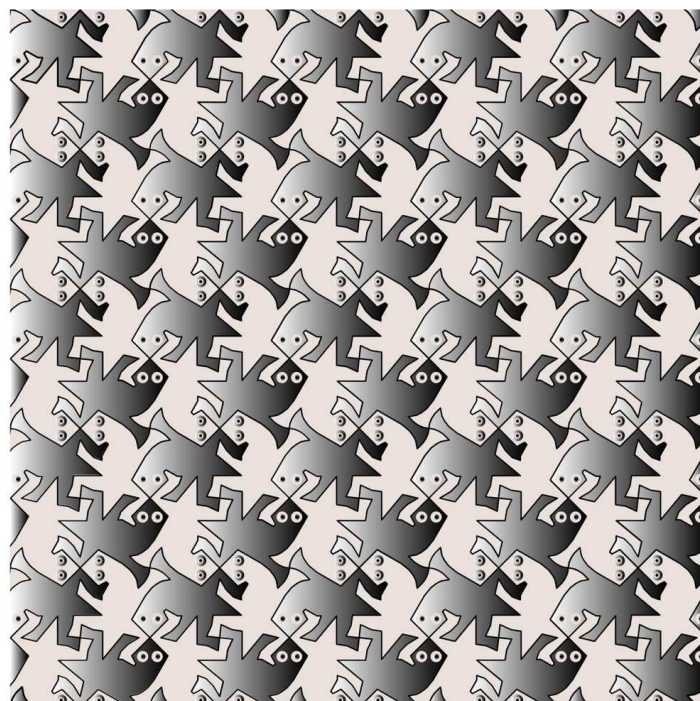


Obliczanie długości odcinków w wielokątach z wykorzystaniem cech przystawania trójkątów

Źródło: Robert Euro Djojoseputro, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

O figurach przystających

Niektóre pojęcia w matematyce szkolnej opierają się na intuicji. Taka sytuacja ma miejsce m.in. w przypadku przystawania figur. Mówiąc, że dwie figury są przystające, mamy na myśli, że są one identyczne, czyli, że dają się na siebie nawzajem nałożyć, w taki sposób, by się pokryły.



Figury przystające

Źródło: dostępny w internecie: www.pixabay.com, domena publiczna.

W przypadku wielokątów możemy porównywać boki i kąty – wtedy przystawanie oznacza równość odpowiednich boków i kątów. W praktyce wygodnie jest korzystać z obiektów, których własności są dobrze znane. Dlatego nie wprowadza się cech przystawania czworokątów, czy wielokątów o większej liczbie boków, dla badania związków miarowych, ale bada się trójkąty, które powstają przez wyróżnienie odpowiednich odcinków i punktów danego wielokąta.

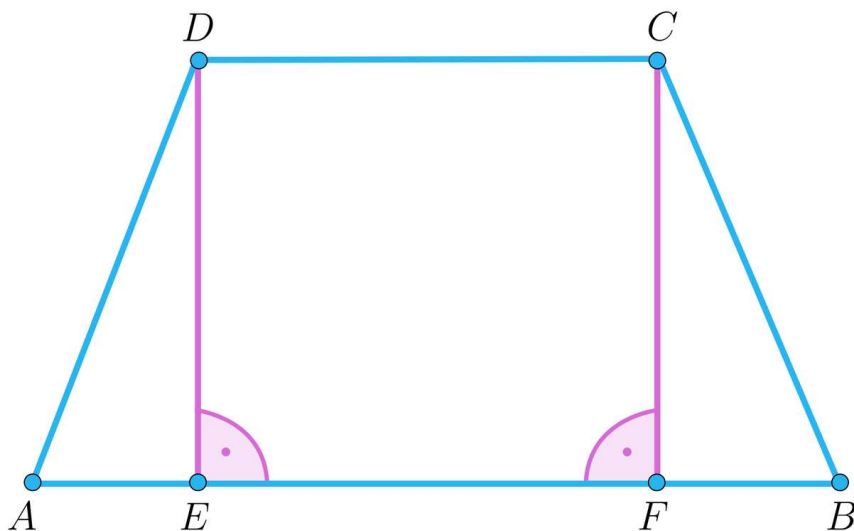
Twoje cele

- Zastosujesz cechy przystawania trójkątów, w tym trójkątów prostokątnych, do badania związków miarowych w wielokątach.
- Zastosujesz poznane zależności w sytuacjach typowych i problemowych.

Przeczytaj

Przystawanie trójkątów w trapezie równoramiennym

Rozważmy **trapez** równoramienny niebędący równoległobokiem, w którym $AB \parallel CD$ oraz $|AD| = |BC|$, jak na rysunku.



Trapez równoramienny

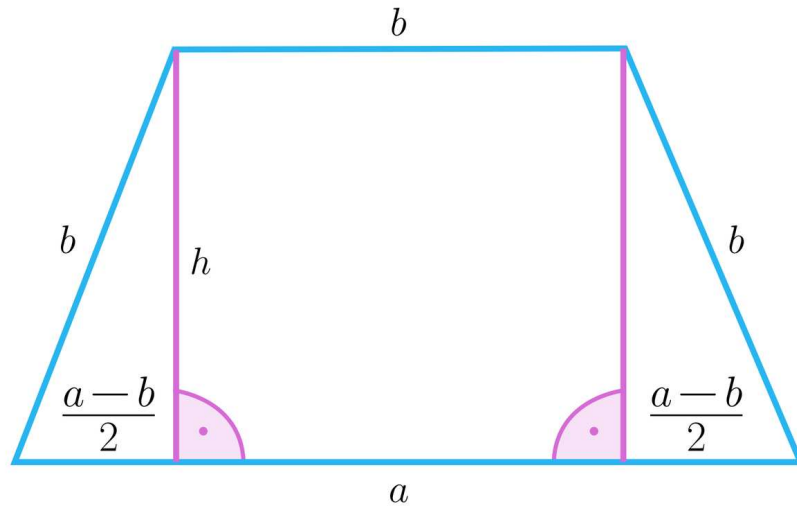
Przez punkty odpowiednio E, F leżące na podstawie AB , poprowadźmy odcinki CF oraz DE prostopadłe do tej podstawy. Wtedy czworokąt $CDEF$ jest prostokątem i w szczególności $|CD| = |EF|$ oraz $|CF| = |DE|$. Oczywiście odcinki CF, DE są wysokościami trapezu poprowadzonymi z wierzchołków odpowiednio C oraz D .

Udowodnimy teraz równość odcinków AE oraz BF , którą „łatwo widać” i zazwyczaj korzysta się z niej bez wcześniejszego udowodnienia. Zauważmy, że trójkąty ADE oraz BCF są trójkątami prostokątnymi, których przeciwprostokątne są równe (trapez równoramienny). Ponadto równe są przyprostokątne CF oraz DE . Zatem na mocy **cechy przystawiania trójkątów** prostokątnych mamy, że $\triangle ADE \equiv \triangle BCF$. Oznacza to, że również odcinki AE oraz BF są równe. Ponadto, z faktu, że $|AE| + |EF| + |BF| = |AB|$ i wcześniej wskazanych równości wynika, że $|AE| = |BF| = \frac{|AB| - |CD|}{2}$.

Przykład 1

Pokażemy, korzystając z wykazanej wcześniej równości, że w trapezie równoramiennym, w którym dłuższa podstawa ma długość a , a ramiona i krótsza podstawa mają długości b , wysokość poprowadzona na dłuższą podstawę jest równa $\frac{\sqrt{(3b-a)(a+b)}}{2}$.

Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku.



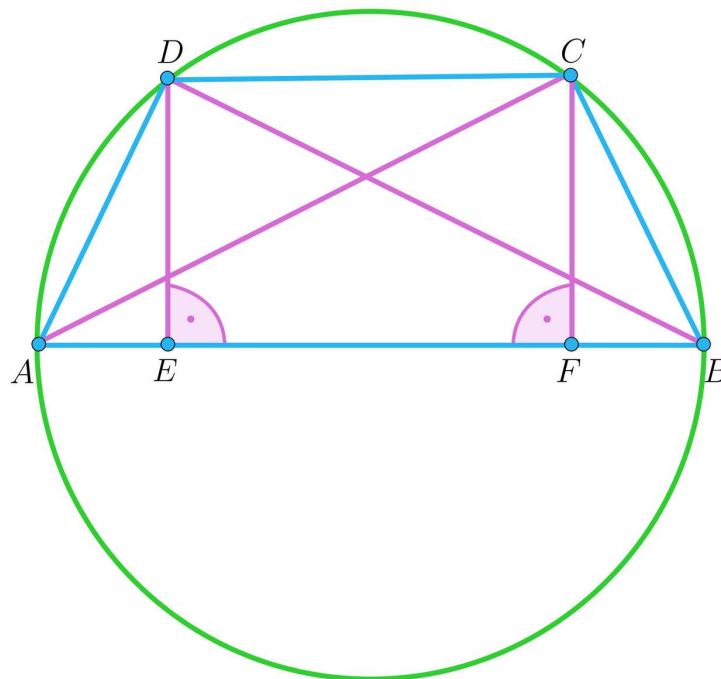
Z twierdzenia Pitagorasa mamy $b^2 = h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$. Zatem

$$\begin{aligned} h^2 &= b^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left[b - \left(\frac{a-b}{2}\right)\right] \cdot \left[b + \left(\frac{a-b}{2}\right)\right] = \\ &= \left(\frac{2b-a+b}{2}\right) \cdot \left(\frac{2b+a-b}{2}\right) = \left(\frac{3b-a}{2}\right) \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right) \end{aligned}$$

Stąd $h = \frac{\sqrt{(3b-a)(a+b)}}{2}$.

Przykład 2

W okrąg o promieniu 10 wpisano trapez $ABCD$, którego ramię AD ma długość 6, a podstawa AB jest średnicą tego okręgu, jak na rysunku.



Wyznamy pole tego trapezu.

Na początek udowodnimy, że $\triangle ABC \equiv \triangle BAD$. Przystawanie tych trójkątów pozwoli stwierdzić, że trapez ten jest równoramienny (jak każdy trapez wpisany w okrąg) – wówczas będziemy mogli skorzystać ze związków miarowych wyznaczonych wcześniej.

Trójkąty ABC oraz BAD są trójkątami prostokątnymi, gdyż każdy trójkąt, którego jednym z boków jest średnica okręgu na nim opisanego, jest prostokątny. Zauważmy, że kąty ABD oraz BDC , jako naprzemianległe, są równe. Ale kąt wpisany BAC jest rozpięty na tym samym łuku, co kąt BDC , zatem są one równe. Oznacza to, że trójkąty ABC oraz BAD mają równe kąty ostre i wspólną przeciwprostokątną, co na mocy cech przystawania trójkątów prostokątnych dowodzi, iż są one przystające. Przystawanie to oznacza w szczególności, że $|AD| = |BC|$. Zatem trapez jest równoramienny.

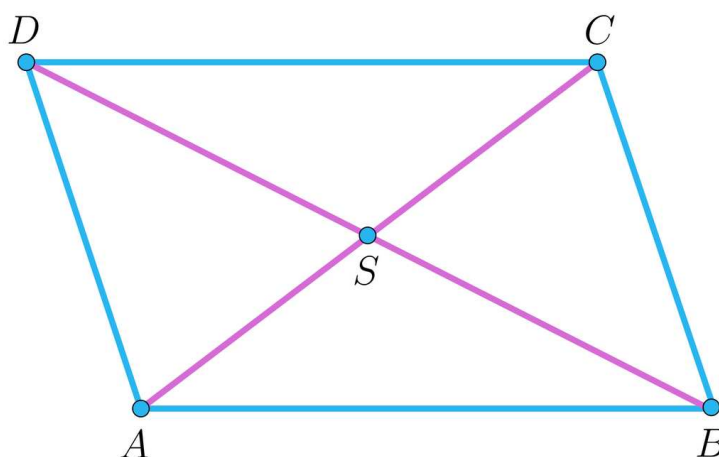
Teraz przejdźmy do obliczeń. Zauważmy, że $|BD|^2 = |AB|^2 - |AD|^2 = 64$, zatem $|BD| = 8$. Pole trójkąta ABD jest więc równe $P_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |BD| = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$. Pole to możemy wyrazić także jako $P_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |DE| = 5|DE|$. Stąd $|DE| = 4,8$ oraz $|BE|^2 = |BD|^2 - |DE|^2 = 8^2 - (4,8)^2 = 40,96$. Czyli $|BE| = 6,4$.

Skoro trapez jest równoramienny, to $|AE| = \frac{|AB|-|CD|}{2}$. Zauważmy ponadto, że $|BE| = |AB| - |AE| = |AB| - \frac{|AB|-|CD|}{2} = \frac{|AB|+|CD|}{2}$, czyli odcinek ten jest równy linii środkowej trapezu. Pozostaje zauważyć, że ostatnia równość pozwala obliczyć krótszą podstawę trapezu, ale nie jest to konieczne, bo otrzymane wyrażenie możemy podstawić do wzoru na pole trapezu:

$$P_{ABCD} = \frac{|AB|+|CD|}{2} \cdot |DE| = |BE| \cdot |DE| = 6,4 \cdot 4,8 = 30,72.$$

Trójkąty przystające w równoległoboku

Jeśli w dowolnym równoległoboku poprowadzimy przekątnę, to ich punkt przecięcia dzieli je na połowy. Fakt ten jest powszechnie wykorzystywany i zgodny z intuicją. W tym miejscu tę zależność udowodnimy. Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku.

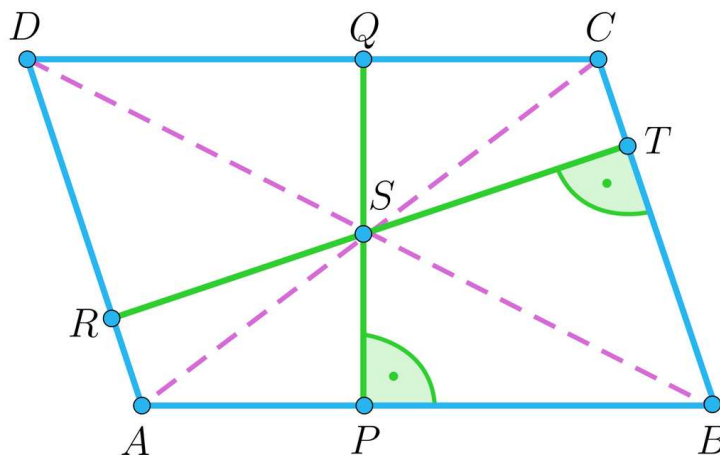


Przekątne w równoległoboku

Zauważmy, że kąty ABD i BDC oraz BAC i ACD , jako naprzemianległe, są równe. Ponadto $|AB| = |CD|$. Zatem na mocy cechy kąt-bok-kąt mamy, że $\triangle ABS \equiv \triangle CDS$. Stąd w szczególności $|BS| = |DS|$ oraz $|AS| = |CS|$, co oznacza, że punkt S dzieli przekątne BD oraz AC na połowy.

Pozostaje dodać, że otrzymane równości $|BS| = |DS|$ oraz $|AS| = |CS|$, przy równości kątów wierzchołkowych, pozwalają stwierdzić, że również trójkąty ASD oraz CSB są przystające.

Jako wniosek warto podać, że punkt S dzieli każdą z wysokości PQ oraz RT tego równoległoboku na połowy, jak na rysunku.



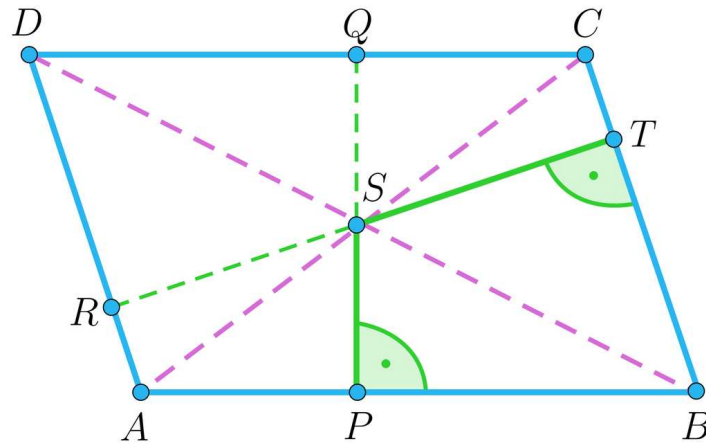
Wysokości równoległoboku

Ostatnią własność wykorzystamy do rozwiązania poniższego problemu.

Przykład 3

Odległości punktu przecięcia się przekątnych równoległoboku $ABCD$ od jego boków AB i BC są równe odpowiednio 3 i 4. Obwód tego równoległoboku jest równy 28. Oblicz pole równoległoboku.

Przyjrzyjmy się rysunkowi.



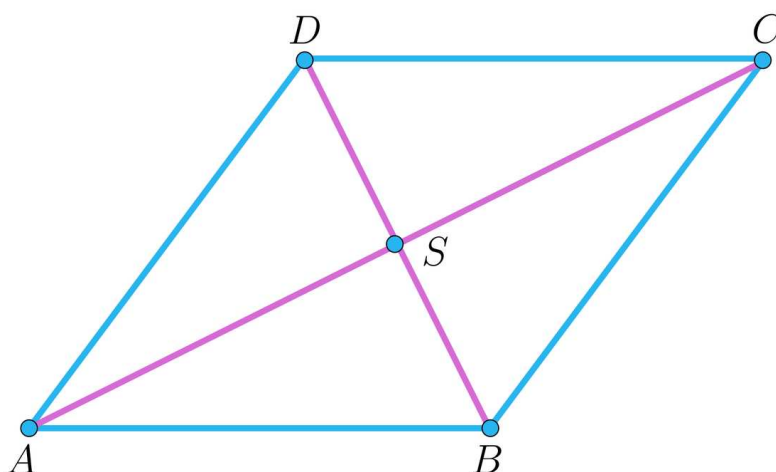
Zauważmy, że odległość punktu S od boku AB jest równa długości odcinka PS , czyli jest połową wysokości poprowadzonej na ten bok. Podobnie, odległość punktu S od boku BC jest równa długości odcinka TS , czyli jest połową wysokości poprowadzonej na ten bok. Pole P_{ABCD} można wyrazić jako iloczyn $|AB| \cdot |PQ|$ lub jako iloczyn $|BC| \cdot |RT|$, stąd $|BC| \cdot |RT| = |AB| \cdot |PQ|$. Zatem $|BC| \cdot (2 \cdot |ST|) = |AB| \cdot (2 \cdot |PS|)$, stąd $4|BC| = 3|AB|$.

Ale $2|AB| + 2|BC| = 28$, zatem $2|AB| + 2\left(\frac{3}{4}|AB|\right) = 28$. Stąd $|AB| = 8$ oraz $P_{ABCD} = 8 \cdot 6 = 48$.

Pozostaje nadmienić, że szukany równoległobok okazał się być prostokątem.

Trójkąty przystające w rombie

Romb jest oczywiście równoległobokiem, ale istnieje zasadniczy powód, dla którego warto ten czworokąt wyróżnić i omówić oddzielnie. Na początek udowodnimy własność, z której korzysta się bardzo często, nie wglębiając się w jej uzasadnienie – przekątne rombu dzielą go na cztery trójkąty przystające.



Triangulacja rombu

Zauważmy, na mocy cechy bok-bok-bok, że $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$. Ale każdy z trójkątów ABC i ADC jest równoramienny, zatem $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle DCA|$. Wiemy, że w dowolnym równoległoboku przekątne się połowią, zatem $|BS| = |DS|$ oraz $|AS| = |CS|$. Stąd, na mocy cechy bok-kąt-bok przystające są trójkąty SAD i SCD oraz SAB i SCB . Analogicznie, na mocy cechy bok-kąt-bok przystające są trójkąty SCD i SCB . Relacja przystawania jest przechodnia, co oznacza, że $\triangle SAD \equiv \triangle SCD \equiv \triangle SAB \equiv \triangle SCB$.

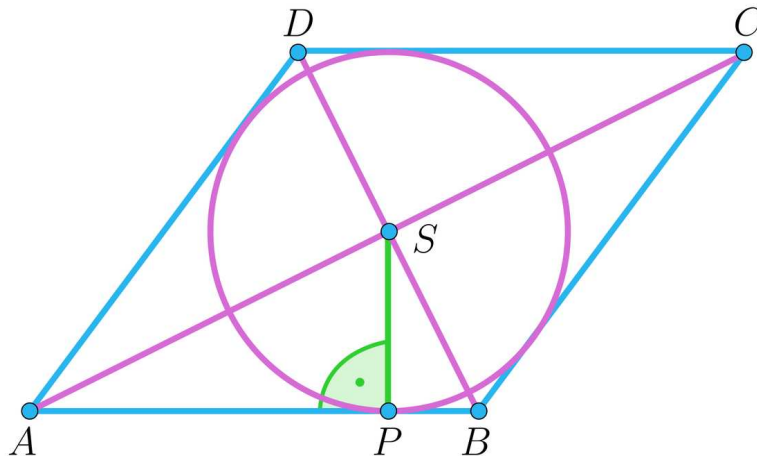
Oczywiście, kąty tych przystających trójkątów przy wierzchołku S są równe, co oznacza, że każdy z nich jest kątem prostym. Tym samym wykazaliśmy nie tylko, że przekątne rombu dzielą go na cztery trójkąty przystające, ale, że każdy z tych trójkątów jest prostokątny.

Warto wspomnieć, że prostopadłość przekątnych równoległoboku jest warunkiem wystarczającym, by taki równoległobok był rombem.

Przykład 4

Dłuższa przekątna rombu $ABCD$ ma długość $4\sqrt{5}$, a promień okręgu o środku S , wpisanego w ten romb, jest równy 2. Wyznamy pole i długość boku rombu.

Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku, gdzie P jest punktem, w którym okrąg wpisany jest styczny do boku AB .



Wykazaliśmy wcześniej, że każdy z trójkątów, na które przekątne dzielą dowolny romb, jest trójkątem prostokątnym – w szczególności trójkąt ASB . Zauważmy, że

$|\sphericalangle SAP| = |\sphericalangle BSP|$, zatem trójkąty ASB i SPB są podobne oraz $\frac{|AP|}{|AS|} = \frac{|PS|}{|BS|}$. Ale

$|AP| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{5}\right)^2 - 2^2} = 4$. Zatem z warunku $\frac{|AP|}{|AS|} = \frac{|PS|}{|BS|}$ wynika, że $\frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{|BS|}$.

Stąd $|BS| = \sqrt{5}$. Możemy już obliczyć pole rombu, jako sumę pól czterech trójkątów prostokątnych: $P = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}\right) = 20$.

Długość boku rombu można obliczyć korzystając np. z twierdzenia Pitagorasa, wtedy $|AB|^2 = (2\sqrt{5})^2 + \sqrt{5}^2 = 25$. Można też zauważyć, że wysokość rombu jest równa średnicy okręgu wpisanego i skorzystać z obliczonego wcześniej pola. Wtedy $P = 20 = |AB| \cdot 4$. Stąd oczywiście $|AB| = 5$.

Słownik

cechy przystawania trójkątów

zestaw twierdzeń określających warunki równoważne występowania relacji przystawania między dwoma trójkątami

linia środkowa w trapezie

odcinek łączący środki ramion w trapezie, jego długość jest średnią arytmetyczną długości podstaw

trapez

czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładami przedstawionymi w animacji, a następnie wykonaj polecenia.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DlugUa8uW>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej obliczania długości odcinków w wielokątach.

Polecenie 2

Dany jest trapez równoramienny $ABCD$, o dłuższej podstawie AB . Spodek E wysokości poprowadzonej z wierzchołka D dzieli podstawę AB na odcinki AE i BE o długości odpowiednio 4 i 6. Przekątna BD trapezu jest równa 10. Oblicz długości podstaw i pole trapezu.




Polecenie 3

Krótsza podstawa trapezu ma długość 1, co stanowi $\frac{1}{52}$ jego obwodu. Oblicz pole trapezu, jeśli ramiona i dłuższa podstawa mają równe długości.

Polecenie 4

Każde z ramion trapezu jest dwa razy krótsze od dłuższej podstawy i jest o 2 dłuższe od krótszej podstawy. Krótsza podstawa jest równa wysokości trapezu. Oblicz obwód trapezu.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1

Stosunek długości przekątnych rombu jest równy $p : q$, a pole rombu jest równe $p \cdot q$.
Oblicz długość boku rombu.

Ćwiczenie 2

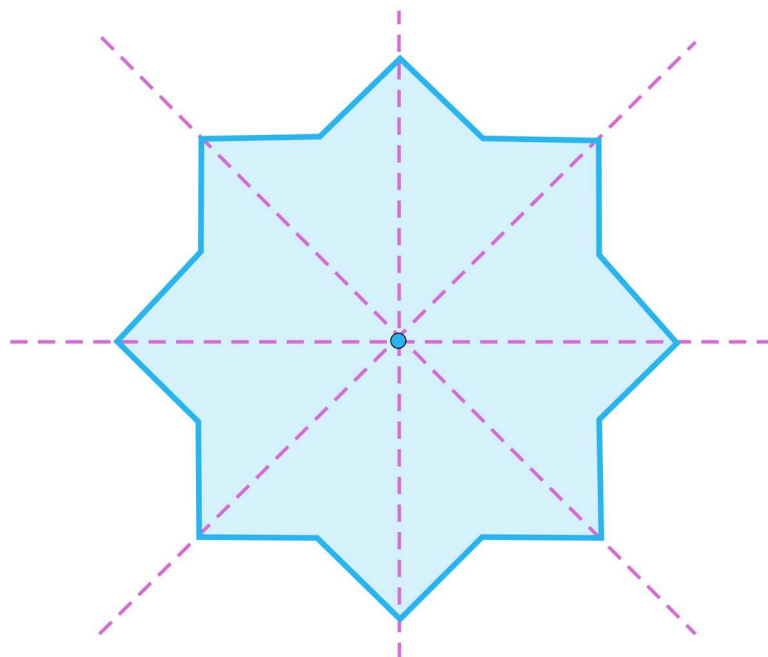
Dany jest trapez prostokątny $ABCD$, w którym dłuższa podstawa AB ma długość 6, a krótsza ma długość 3. Na ramieniu AD o długości 12, prostopadłym do podstawy, wybrano taki punkt E , że suma jego odległości od końców drugiego ramienia trapezu jest najmniejsza. Wyznacz $|BE| + |CE|$.

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4



Dwa kwadraty o boku długości 6, których odpowiednie osie symetrii pokrywają się, jak na rysunku, tworzą szesnastokąt.



Wyznacz pole tego szesnastokąta.

Ćwiczenie 5



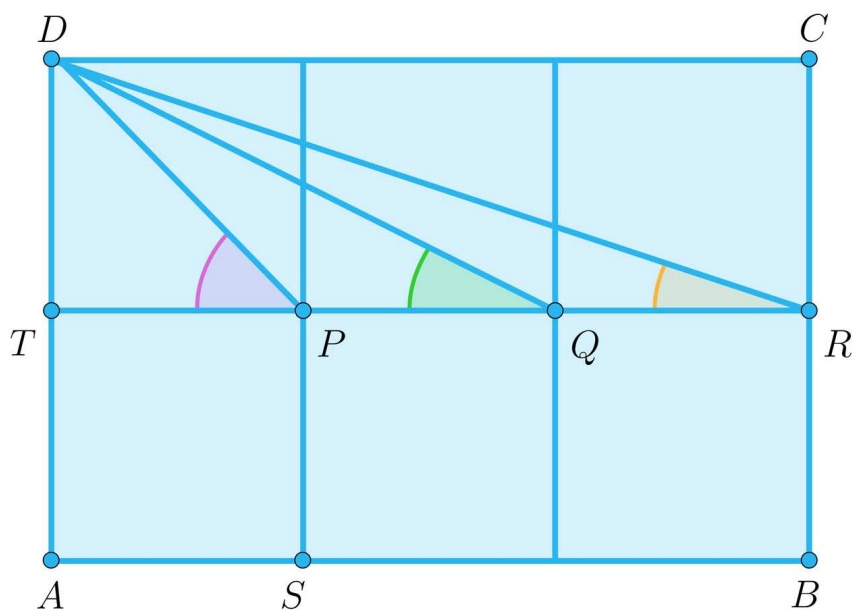
Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Prostokąt $ABCD$ podzielono na sześć przystających kwadratów, których wybrane wierzchołki oznaczono, jako: P, Q, R, S, T jak na rysunku.



Z wierzchołka D poprowadzono odcinki DP, DQ, DR . Udowodnij, że suma miar kątów ostrych, jakie te odcinki tworzą z prostą PQ jest równa 90° .

Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Jacek Człapiński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Obliczanie długości odcinków w wielokątach z wykorzystaniem cech przystawania trójkątów

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, klasa I lub II, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria. Zakres podstawowy.

Uczeń:

4) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach;

8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów;

10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności;

12) przeprowadza dowody geometryczne.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje pojęcie figur przystających
- stosuje pojęcie trójkątów przystających
- stosuje cechy przystawania trójkątów
- stosuje cechy przystawania trójkątów prostokątnych

- przeprowadza dowody geometryczne

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja
- burza mózgów

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda para uczniów miała do dyspozycji komputer; lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym

Przebieg lekcji

Faza wprowadzająca:

1. Nauczyciel prosi o przypomnienie pojęcia figur i wielokątów przystających.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi o przypomnienie pojęcia przystawiania trójkątów i cech przystawiania trójkątów, metodą burzy mózgów.
2. Następnie nauczyciel prezentuje wcześniej przygotowany szkic trapezu równoramiennego o danych podstawach i prosi o wyznaczenie odległości wierzchołków dolnej podstawy od spodków wysokości. Wybrany uczeń prezentuje wynik – wówczas nauczyciel prosi o uzasadnienie poprawności rozwiązania. Jeśli uzasadnienie poda uczeń, to nauczyciel prosi pozostałych uczniów o zapisanie tego dowodu do zeszytów. Jeśli uczniowie nie podadzą uzasadnienia lub będą w nim istotne luki, to nauczyciel prezentuje przygotowany wcześniej model i wspólnie z uczniami przeprowadzają dowód przystawiania odpowiednich trójkątów.
3. Nauczyciel prosi o wykonanie polecenia z Przykładu 1. Uczniowie pracują w parach. Wybrany uczeń prezentuje rozwiązanie na tablicy.
4. Następnie nauczyciel prosi o rozwiązanie problemu opisanego w Przykładzie 2. Uczniowie pracują indywidualnie. Wybrany uczeń prezentuje rozwiązanie na tablicy.

- Nauczyciel akcentuje, że jeden z odcinków w trapezie równoramiennym, na jakie spodek wysokości dzieli dłuższą podstawę, jest równy linii środkowej trapezu.
- Nauczyciel prosi o podanie zależności między przekątnymi w równoległoboku, a następnie o udowodnienie tej zależności. Jeśli uzasadnienie poda uczeń, to nauczyciel prosi pozostałych uczniów o zapisanie tego dowodu do zeszytów. Jeśli uczniowie nie podadzą uzasadnienia lub będą w nim istotne luki, to nauczyciel wspólnie z uczniami przeprowadzają dowód przystawania odpowiednich trójkątów. Uczniowie zapisują twierdzenie o podziale wysokości w równoległoboku.
 - Następnie nauczyciel prosi o rozwiązanie problemu opisanego w Przykładzie 3. Uczniowie pracują indywidualnie. Wybrany uczeń prezentuje rozwiązanie na tablicy. Nauczyciel akcentuje, że w równoległoboku można przeprowadzić z reguły dwie różne wysokości.
 - Nauczyciel prosi o podanie zależności między przekątnymi w rombie i trójkątami wyznaczonymi przez te przekątne, a następnie prosi o udowodnienie tych zależności, poprzez wykazanie przystawania odpowiednich trójkątów. Jeśli uzasadnienie poda uczeń, to nauczyciel prosi pozostałych uczniów o zapisanie tego dowodu do zeszytów. Jeśli uczniowie nie podadzą uzasadnienia lub będą w nim istotne luki, to nauczyciel wspólnie z uczniami przeprowadzają dowód przystawania odpowiednich trójkątów.
 - Następnie nauczyciel prosi o rozwiązanie problemu opisanego w Przykładzie 4. Uczniowie pracują indywidualnie. Wybrany uczeń prezentuje rozwiązanie na tablicy.
 - Na koniec nauczyciel prosi o uruchomienie aplikacji multimedialnej i wykonanie dołączonych poleceń.
 - Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, wykorzystując umiejętności z różnych działów matematyki.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć.

Materiały pomocnicze:

[Przystawanie trójkątów](#)

Wskazówki metodyczne:

Animację można zastosować w ramach realizacji tematu o własnościach trapezu.