Kolejność wykonywania działań na wyrażeniach wymiernych

Kolejność wykonywania działań na wyrażeniach wymiernych

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

W przyjętym sposobie zapisu czterech podstawowych działań znak działania wstawiamy pomiędzy wyrażeniami, których dotyczy. Na przykład jeśli dodajemy liczby 4 i 5, zapiszemy to jako $4+5$. W przypadku zapisu zawierającego więcej działań, np. $5-7+4$, potrzebna jest jakaś umowa co do kolejności ich wykonania. W naszym przykładzie zgodnie z umową znak odejmowania dotyczy liczb 5 i 7, zaś znak dodawania odnosi się do liczb (-2) (wynik wykonanego wcześniej odejmowania) i 4. Inaczej będzie, gdy np. wprowadzimy nawias i zapiszemy $5-(7+4)$.

Taki sposób zapisu działań i przyjęta kolejność ich wykonywania to pewien rodzaj umowy. Warto wyszukać np. w internecie wiadomości o dwóch innych metodach zapisu działań: zaprezentowanej w 1924 roku przez polskiego logika Jana Łukasiewicza notacji polskiej (NP) oraz mającej swoje zastosowania w naukach komputerowych wprowadzonej w połowie XX wieku odwrotnej notacji polskiej (ONP). Te dwa sposoby nie wymagają stosowania nawiasów.

Znamy podstawowe umowy dotyczące stosowania kolejności działań przy wyrażeniach arytmetycznych i algebraicznych. Pokażemy, jak je stosować przy wyrażeniach wymiernych.

Twoje cele

- Zastosujesz znane Ci zasady związane z kolejnością wykonywania działań w zadaniach z wyrażeniami wymiernymi.
- Zaplanujesz optymalną kolejność obliczeń w przykładach.

Przeczytaj

Znamy ogólne umowy dotyczące kolejności wykonywania działań na wyrażeniach algebraicznych Przypomnijmy:

Reguła: Kolejność wykonywania działań

1. wyrażenia w nawiasach;
2. potęgowanie i pierwiastkowanie;
3. mnożenie i dzielenie;
4. dodawanie i odejmowanie.

Należy również pamiętać o podstawowych własnościach działań na wyrażeniach algebraicznych:

Reguła: Prawa działań

- przemienność dodawania

$$A + B = B + A$$

- przemienność mnożenia

$$A \cdot B = B \cdot A$$

- łączność dodawania

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

- łączność mnożenia

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

- rozdzielność mnożenia względem dodawania

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

- odejmowanie można zastąpić dodawaniem wyrażenia przeciwnego

$$A - B = A + (-B)$$

- dzielenie można zastąpić mnożeniem przez odwrotność

$$A : B = A \cdot \frac{1}{B}$$

Wykonując działania na wyrażeniach wymiernych, możemy stosować wszystkie powyższe prawa. Trzeba też pamiętać podczas określania dziedziny wyrażenia o uwzględnieniu założeń wynikających z niemożności dzielenia przez 0.

Każdy z poniższych przykładów zawiera zapis rozwiązania. Stosując odpowiednie prawa działań, wiele z nich można rozwiązać innymi metodami – możemy wybrać drogę, która nam najbardziej odpowiada.

Warto przez przeglądnięciem rozwiązania, spróbować wykonać przynajmniej część przykładów samodzielnie, być może inną niż przedstawiona tutaj metodą. Jeśli wszystko wykonamy poprawie, powinniśmy uzyskać zgodne z podanymi wyniki i założenia.

Przykład 1

Obliczmy $\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{x}\right)\cdot\frac{18x}{x-3}$.

- Na początek wykonamy odejmowanie w nawiasie.

  $\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{x}\right)\cdot\frac{18x}{x-3}=$

  $=\left(\frac{x^2}{3x}-\frac{9}{3x}\right)\cdot\frac{18x}{x-3}=$

  $=\frac{x^2-9}{3x}\cdot\frac{18x}{x-3}=(i)$

- Mnożenie zaczniemy od zapisania różnicy kwadratów w postaci iloczynu i skracania.

- $(i)=\frac{(x+3)(x-3)}{3x}\cdot\frac{18x}{x-3}=$

  $=\frac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{\cancel{3x}}\cdot\frac{\cancel{18x}\,6}{\cancel{x-3}}=$

  $=6(x+3)$

- Określmy założenia, uwzględniając wszystkie miejsca zerowe mianowników (przed skracaniem): $x\in\mathbb{R}\setminus\{0;3\}$.

Przykład 2

Obliczmy $\left(\frac{2x}{x-1}+1\right):\left(x+\frac{2x^3+2x^2}{x^2-1}\right)$.

- Na początek wykonajmy dodawania w nawiasach. Zauważmy, że ułamek w drugim nawiasie można skrócić.

- $\left(\frac{2x}{x-1}+1\right):\left(x+\frac{2x^3+2x^2}{x^2-1}\right)=$

$$= \left(\frac{2x}{x-1} + \frac{x-1}{x-1}\right) : \left(x + \frac{2x^2 \cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x-1)}\right) =$$

$$= \frac{2x+x-1}{x-1} : \left(\frac{x^2-x}{x-1} + \frac{2x^2}{x-1}\right) =$$

$$= \frac{3x-1}{x-1} : \frac{3x^2-x}{x-1} = (i)$$

- Dzielenie możemy zastąpić mnożeniem przez odwrotność. Pamiętajmy o skracaniu tam, gdzie jest to możliwe.

- $(i) = \frac{3x-1}{x-1} \cdot \frac{x-1}{x(3x-1)} =$

$$= \frac{\cancel{3x-1}}{\cancel{x-1}} \cdot \frac{\cancel{x-1}}{x\,\cancel{(3x-1)}} =$$

$$= \frac{1}{x}$$

- Podajmy potrzebne założenia: $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1; 0; \frac{1}{3}; 1\right\}$.

Przykład 3

Obliczmy $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x+1}}$.

- Jako pierwsze wykonamy działanie w mianowniku drugiego ułamka.

- $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x+1}} =$

$$= \frac{1}{x+2} + \frac{1}{\frac{x+1}{x+1}+\frac{1}{x+1}} =$$

$$= \frac{1}{x+2} + \frac{1}{\frac{x+2}{x+1}} = (i)$$

- Potraktujmy główną kreskę ułamkową w drugim ułamku jako znak dzielenia i zapiszmy to dzielenie jako mnożenie przez odwrotność:

- $(i) = \frac{1}{x+2} + 1 : \frac{x+2}{x+1} =$

$$= \frac{1}{x+2} + 1 \cdot \frac{x+1}{x+2} =$$

$$= \frac{1}{x+2} + \frac{x+1}{x+2} =$$

$$= \frac{x+2}{x+2} =$$

$$= 1$$

- Określmy założenia: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; -1\}$.

Przykład 4

Obliczmy $\frac{x^3-9x+1}{x^2-9} - (x+2) \cdot \left(\frac{x+3}{x^2-x-6} - \frac{x+4}{x^2-9}\right)$.

- $\frac{x^3-9x+1}{x^2-9} - (x+2) \cdot \left(\frac{x+3}{x^2-x-6} - \frac{x+4}{x^2-9}\right) = (i)$

- Wykonajmy odejmowanie w ostatnim nawiasie.

  $\frac{x+3}{x^2-x-6} - \frac{x+4}{x^2-9} =$

  $= \frac{x+3}{(x-3)(x+2)} - \frac{x+4}{(x-3)(x+3)} =$

  $= \frac{(x+3)^2}{(x-3)(x+3)(x+2)} - \frac{(x+4)(x+2)}{(x-3)(x+3)(x+2)} =$

  $= \frac{x^2+6x+9}{(x-3)(x+3)(x+2)} - \frac{x^2+6x+8}{(x-3)(x+3)(x+2)} =$

  $= \frac{x^2+6x+9-x^2-6x-8}{(x-3)(x+3)(x+2)} =$

  $= \frac{1}{(x-3)(x+3)(x+2)}$

- Podstawmy uzyskany wynik.

- $(i) = \frac{x^3-9x+1}{(x+3)(x-3)} - (x+2) \cdot \frac{1}{(x+3)(x-3)(x+2)} =$

  $= \frac{x^3-9x+1}{(x+3)(x-3)} - \cancel{(x+2)} \cdot \frac{1}{(x-3)(x+3)\cancel{(x+2)}} =$

  $= \frac{x^3-9x+1}{(x+3)(x-3)} - \frac{1}{(x+3)(x-3)} =$

  $= \frac{x^3-9x}{(x+3)(x-3)} =$

  $= \frac{x(x+3)(x-3)}{(x+3)(x-3)} =$

  $= \frac{x\cancel{(x+3)}\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x+3)}\cancel{(x-3)}} =$

  $= x$

- Określmy założenia: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; -2; 3\}$.

Przykład 5

Obliczmy $7x + \left(\frac{x+7}{x-7} - x - 7\right) : \frac{x+7}{7x}$.

- Dzielenie możemy zastąpić mnożeniem przez odwrotność.

- $7x + \left(\frac{x+7}{x-7} - x - 7\right) : \frac{x+7}{7x} =$

$= 7x + \left(\frac{x+7}{x-7} - x - 7\right) \cdot \frac{7x}{x+7} = (i)$

- Wykonajmy obliczenia w nawiasie.

$\frac{x+7}{x-7} - x - 7 =$

$= \frac{x+7}{x-7} - \frac{x+7}{1} =$

$= \frac{x+7}{x-7} - \frac{(x+7)(x-7)}{x-7} =$

$= \frac{(x+7)(1-(x-7))}{x-7} =$

$= \frac{(x+7)(1-x+7)}{x-7} =$

$= \frac{(x+7)(8-x)}{x-7}$

- Wykorzystajmy uzyskany wynik.
- $(i) = 7x + \frac{(x+7)(8-x)}{x-7} \cdot \frac{7x}{x+7} =$

$= 7x + \frac{\cancel{(x+7)}\,(8-x)}{x-7} \cdot \frac{7x}{\cancel{x+7}} = (ii)$

- Możemy teraz wyłączyć $7x$ przed nawias i dokończyć obliczenia.
- $(ii) = 7x\left(1 + \frac{8-x}{x-7}\right) =$

$= 7x\left(\frac{x-7}{x-7} + \frac{8-x}{x-7}\right) =$

$= 7x\left(\frac{x-7+8-x}{x-7}\right) =$

$= 7x \cdot \frac{1}{x-7} =$

$= \frac{7x}{x-7}$

- Podajmy na koniec założenia: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-7; 0; 7\}$.

Przykład 6

Obliczmy $\left(\frac{x}{x+4} + \frac{4}{x-4} - \frac{8x}{x^2-16}\right) \cdot \frac{x}{x+4} + \left(\frac{4}{x-4} + \frac{8x}{x^2-16}\right) \cdot \frac{x-4}{x+4}$.

- $\left(\frac{x}{x+4} + \frac{4}{x-4} - \frac{8x}{x^2-16}\right) \cdot \frac{x}{x+4} + \left(\frac{4}{x-4} + \frac{8x}{x^2-16}\right) \cdot \frac{x-4}{x+4} = (i)$
- Obliczmy wyrażenie w pierwszym nawiasie:

$\frac{x}{x+4} + \frac{4}{x-4} - \frac{8x}{x^2-16} =$

$= \frac{x(x-4)}{(x+4)(x-4)} + \frac{4(x+4)}{(x+4)(x-4)} - \frac{8x}{(x+4)(x-4)} =$

$= \frac{x^2-4x+4x+16-8x}{(x+4)(x-4)} =$

$= \frac{x^2-8x+16}{(x+4)(x-4)} =$

$= \frac{(x-4)^2}{(x+4)(x-4)} =$

$= \frac{(x-4)^{\cancel{2}}}{(x+4)\ \cancel{(x-4)}} =$

$= \frac{x-4}{x+4}$

- Obliczmy wyrażenie w drugim nawiasie.

  $\frac{4}{x-4} + \frac{8x}{x^2-16} =$

  $= \frac{4}{x-4} + \frac{8x}{(x+4)(x-4)} =$

  $= \frac{4(x+4)}{(x+4)(x-4)} + \frac{8x}{(x+4)(x-4)} =$

  $= \frac{4x+16}{(x+4)(x-4)} + \frac{8x}{(x+4)(x-4)} =$

  $= \frac{12x+16}{(x+4)(x-4)} =$

  $= \frac{4(3x+4)}{(x+4)(x-4)}$

- Podstawmy uzyskane wyniki.
- $(i) = \frac{x-4}{x+4} \cdot \frac{x}{x+4} + \frac{4(3x+4)}{(x+4)(x-4)} \cdot \frac{x-4}{x+4} = (ii)$
- Skorzystajmy teraz z prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania wyłączając przed nawias wspólny czynnik $\frac{x-4}{x+4}$.
- $(ii) = \frac{x-4}{x+4}\left(\frac{x}{x+4} + \frac{4(3x+4)}{(x+4)(x-4)}\right) = (iii)$
- Wykonajmy dodawanie w nawiasie:

  $\frac{x}{x+4} + \frac{4(3x+4)}{(x+4)(x-4)} =$

  $= \frac{x(x-4)}{(x+4)(x-4)} + \frac{4(3x+4)}{(x+4)(x-4)} =$

  $= \frac{x^2-4x+12x+16}{(x+4)(x-4)} =$

  $= \frac{x^2+8x+16}{(x+4)(x-4)} =$

$= \frac{(x+4)^2}{(x+4)(x-4)} =$

$= \frac{(x+4)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x+4)}(x-4)} =$

$= \frac{x+4}{x-4}$

- Zakończmy obliczenia, wykorzystując otrzymany wynik.
- $(iii) = \frac{x-4}{x+4} \cdot \frac{x+4}{x-4} =$

$= \cancel{\frac{x-4}{x+4}} \cdot \cancel{\frac{x+4}{x-4}} =$

$= 1$

- Określmy założenia uwzględniając wszystkie etapy obliczeń: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4; 4\}$.

Słownik

dziedzina wyrażenia algebraicznego

zbiór liczb rzeczywistych, dla których wyrażenie algebraiczne ma sens liczbowy

wyrażenie algebraiczne

wyrażenie, które można zapisać w postaci ilorazu wielomianów

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z przedstawionymi w animacji przykładami mnożenia i dzielenia wyrażeń wymiernych. Zwróć uwagę na kolejność wykonywanych czynności.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DAxLBxQcW

Film nawiązujący do mnożenia oraz dzielenia wyrażeń wymiernych.

Polecenie 2

Oblicz $\frac{3x-6}{2x-6} \cdot \left(\frac{2x-6}{x^2-4} - 2x + 6\right)$.
Pamiętaj o odpowiedniej kolejności działań i o skracaniu tam, gdzie to możliwe.
Podaj założenia.

Polecenie 3

Oblicz $\left(\frac{2x+1}{x+5} - \frac{10x+5}{25-x^2}\right) : \frac{2x+1}{x-5}$.
Pamiętaj o odpowiedniej kolejności działań i o skracaniu tam, gdzie to możliwe.
Podaj założenia.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Wskaż wynik działania $\frac{2}{x} + \frac{x}{x+1} \cdot (x^2 + 2x + 1)$.

- $\frac{x^3+x^2+2}{x^2}$
- $\frac{x^3-x^2+2}{x^2}$
- $\frac{x^3+x^2-2}{x}$
- $\frac{x^3+x^2+2}{x}$
- $\frac{x^3-x^2+2}{x^2}$

Ćwiczenie 2

Wskaż wynik działania $2 + \frac{x-1}{x+2} : \frac{1}{x+2}$.

- $\frac{x-1}{x+2}$
- $x - 1$
- $\frac{x+1}{x+2}$
- $x + 1$

Ćwiczenie 3

Wskaż wynik działania $\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x+1}\right)\cdot\frac{1}{3x+2}$.

- $\frac{1}{x^2+1}$
- $\frac{1}{x^2+x}$
- $\frac{x^2-x}{3x+2}$
- $\frac{x^2+x}{3x+2}$

Ćwiczenie 4

Wskaż wszystkie liczby rzeczywiste, które należy usunąć ze zbioru liczb rzeczywistych, aby otrzymać dziedzinę wyrażenia $\left(\frac{3-x^2}{x+1}+5x\right):\frac{x^2+6x+9}{1-x^2}$.

- 3
- $\sqrt{3}$
- -3
- -1
- 1
- 0
- $-\sqrt{3}$

Ćwiczenie 5

Połącz w pary wyrażenie i jego dziedzinę.

$\left(\frac{2x^2+3x-4}{3x^2-12} - \frac{x+5}{x+2}\right) : \frac{x^2+25}{x^2-10x+25}$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{2; 5\}$
$\left(\frac{7x^2+4}{3x^2-12} - \frac{x+2}{x+5}\right) \cdot \frac{x^2-10x+25}{x^2-25}$	$x \in \mathbb{R}$
$\left(\frac{x^2-11x-1}{3x^2+12} - \frac{x^2-9}{x^2+1}\right) : \frac{x^2+x+1}{x^2+25}$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{-5; -2; 2; 5\}$
$\left(\frac{x^2+7x+10}{x^2-7x+10} - \frac{x^2-1}{x^2-x+7}\right) \cdot \frac{x+2}{x-5}$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2; 5\}$

Ćwiczenie 6

Uzupełnij tekst, przeciągając odpowiedź we właściwe miejsce.

- Wyrażenie $\frac{a}{x} - \frac{1}{x+1} \cdot \frac{2}{x}$ można uprościć do postaci ______ dla $a =$ ______.
- Wyrażenie $\left(\frac{1}{x+1} - \frac{ax}{x-1}\right) : \frac{1}{x^2-1}$ można uprościć do postaci ______ dla $a =$ ______.

-1 | $\frac{2x}{x(x+1)}$ | 2 | $x^2 + 2x - 1$

Ćwiczenie 7

Wskaż $Q(x)$, jeśli $1 + \frac{x+1}{Q(x)} \cdot \left(x^2 + x - 2\right) = x^2$ to

- $Q(x) = x + 1$
- $Q(x) = x + 2$
- $Q(x) = x$
- $Q(x) = x - 2$

Ćwiczenie 8

Wskaż $Q(x)$, jeśli $Q(x) + \frac{1}{x} \cdot \frac{x+1}{x+2} = \frac{3x+5}{x(x+2)}$.

- $Q(x) = \frac{2}{x+1}$
- $Q(x) = \frac{2}{x+2}$
- $Q(x) = \frac{2}{x+2}$
- $Q(x) = \frac{2}{x}$

Ćwiczenie 9

Wskaż $Q(x)$, jeśli $1 - Q(x) \cdot \frac{x+2}{x-2} = -x^2 - 4x - 3$.

- $Q(x) = x - 2$
- $Q(x) = x^2 - 4$
- $Q(x) = x^2 - 2$
- $Q(x) = x - 4$

Dla nauczyciela

Autor: Michał Niedźwiedź

Przedmiot: Matematyka

Temat: Kolejność wykonywania działań na wyrażeniach wymiernych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres podstawowy. Uczeń:

7. mnoży i dzieli wyrażenia wymierne;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje zasady związane z kolejnością wykonywania działań w zadaniach z wyrażeniami wymiernymi,
- planuje optymalną kolejność obliczeń w przykładach.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- mapa myśli;
- metoda kota i myszy.

Formy pracy:

- praca w parach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

- Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z medium w sekcji „Animacja”.

Faza wstępna:

- Prowadzący wyświetla na tablicy interaktywnej zawartość sekcji „Wprowadzenie” i omawia cele do osiągnięcia w trakcie lekcji.
- Uczniowie określają kryteria sukcesu.
- Uczniowie metodą mapy myśli przypominają kolejność wykonywania działań.

Faza realizacyjna:

- Uczniowie w parach zapoznają się z treścią sekcji „Przeczytaj”, a następnie metodą kot i mysz rozwiązują ćwiczenia interaktywne w sekcji „Sprawdź się”. Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po 2 nieudanych próbach kot „łapie mysz”, która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej - role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem - procedura się powtarza.

Faza podsumowująca:

- Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
- Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 3 i 5 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- Dziedzina
- Wyrażenia wymierne

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu przed sprawdzianem.