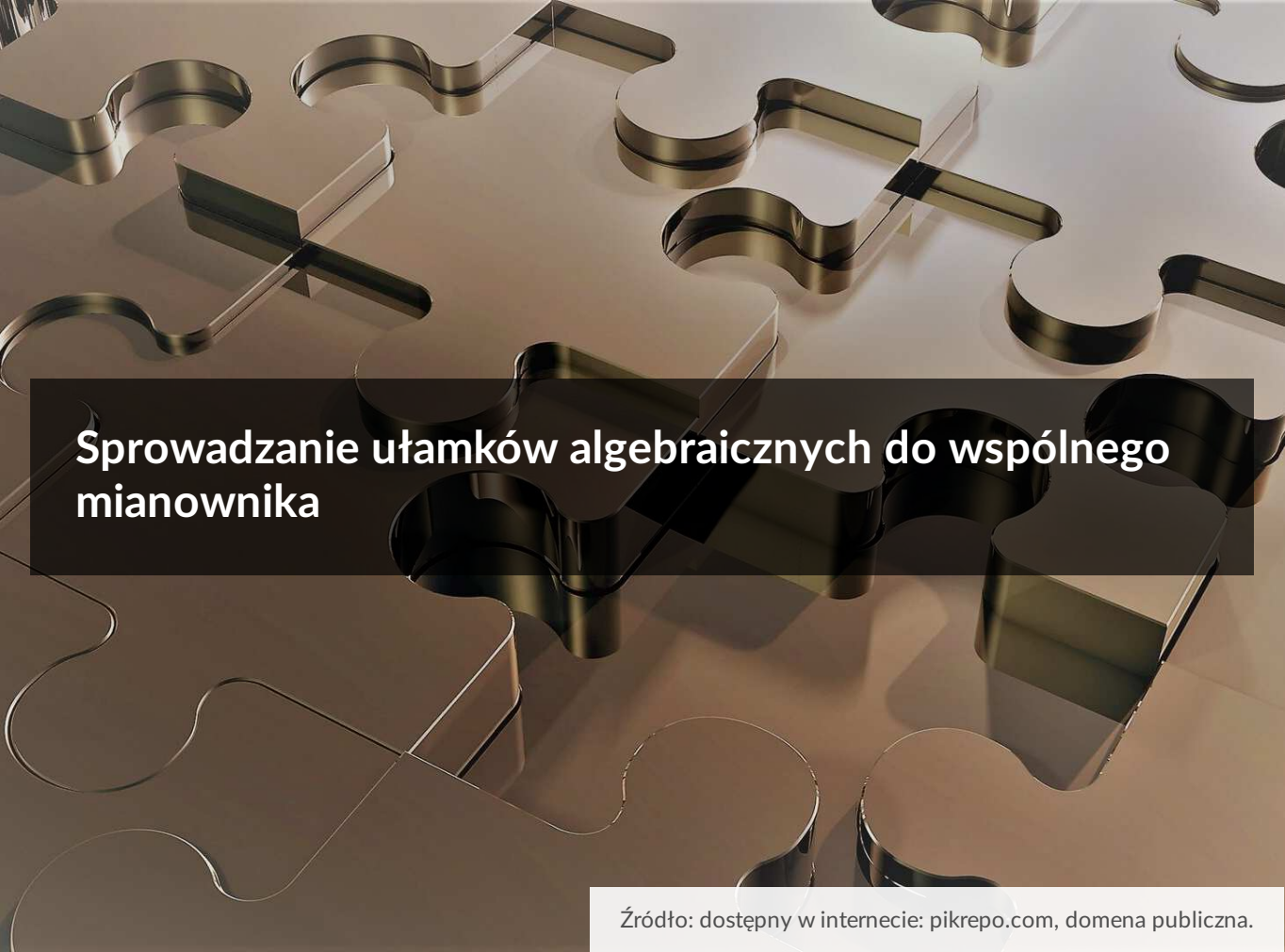




Sprowadzanie ułamków algebraicznych do wspólnego mianownika

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Gra edukacyjna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Sprowadzanie ułamków algebraicznych do wspólnego mianownika

Źródło: dostępny w internecie: pikrepo.com, domena publiczna.

Jeżeli chcemy porównać lub dodać dwa ułamki zwykłe, pomocne jest sprowadzenie ich do wspólnego mianownika.

Możemy to zrobić na wiele sposobów.

Na przykład dla ułamków $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{10}$ wspólnym mianownikiem może być 40 – gdy każdy z ułamków rozszerzymy przez mianownik drugiego ułamka. Zwykle jednak wygodnie jest dobrać wspólny mianownik tak, by był możliwie najmniejszy – w naszym przypadku będzie to najmniejsza wspólna wielokrotność liczb 4 i 10, czyli 20.

W przypadku ułamków algebraicznych sprowadzanie do wspólnego mianownika jest potrzebne, gdy chcemy takie ułamki dodawać lub odejmować – i będziemy tu postępować analogicznie, jak w przypadku ułamków zwykłych.

Twoje cele

- Sprowadzisz ułamki algebraiczne do wspólnego mianownika.
- Wyznaczysz optymalny wspólny mianownik.

Przeczytaj

Rozważmy nieskracalne wyrażenia wymierne $\frac{F(x)}{G(x)}$ oraz $\frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie $F(x)$, $G(x)$, $P(x)$, $Q(x)$ to wielomiany, przy czym $G(x)$ i $Q(x)$ nie są wielomianami zerowymi.

Aby sprowadzić wyrażenia wymierne $\frac{F(x)}{G(x)}$ i $\frac{P(x)}{Q(x)}$ do wspólnego mianownika:

1. rozkładamy mianowniki $G(x)$ i $Q(x)$ do postaci iloczynowej (iloczyn wielomianów nierozkładalnych, wielomiany różniące się tylko przemnożeniem przez stałą zapisujemy w tej samej postaci);
2. wspólnym mianownikiem obu ułamków będzie iloczyn wielomianu $G(x)$ i tych czynników z rozkładu $Q(x)$, które nie występują w rozkładzie $G(x)$ (uwzględniamy krotności);
3. rozszerzamy oba ułamki przez odpowiednie czynniki tak, by sprowadzić je do wyznaczonego wspólnego mianownika;
4. pamiętamy o [określeniu założeń](#).

Postępując w powyższy sposób, uzyskamy wspólny mianownik możliwie najmniejszego stopnia.

Wyjaśnimy działanie opisanego algorytmu, analizując kolejne przykłady.

Przykład 1

Sprowadzimy do wspólnego mianownika ułamki.

$$\frac{2}{3x} \text{ i } \frac{5}{7x}$$

Rozwiązanie

- Optymalnym wspólnym mianownikiem będzie $21x$.
- Mamy $\frac{2}{3x} = \frac{14}{21x}$ oraz $\frac{5}{7x} = \frac{15}{21x}$.
- [Dziedzina wyrażenia algebraicznego](#) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\frac{5}{9x^2} \text{ i } \frac{7}{12x^3}$$

- Wspólnym mianownikiem będzie wspólna wielokrotność wielomianów $9x^2$ i $12x^3$.
Zauważmy, że $\text{NWW}(9; 12) = 36$, więc optymalny wspólny mianownik w tym przypadku to $36x^3$.

- Rozszerzając odpowiednio ułamki, uzyskujemy $\frac{5}{9x^2} = \frac{20x}{36x^3}$ i $\frac{7}{12x^3} = \frac{21}{36x^3}$.

- $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\frac{14}{x} \text{ i } \frac{x}{14}$$

- Wspólnym mianownikiem jest tu $14x$.
- Rozszerzając odpowiednio ułamki, uzyskujemy $\frac{14}{x} = \frac{196}{14x}$ i $\frac{x}{14} = \frac{x^2}{14x}$.
- $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Przykład 2

Sprowadzimy do wspólnego mianownika ułamki.

$$\frac{x+1}{(x+3)(x-2)} \text{ i } \frac{x-4}{(x+2)(x-2)}$$

- Zauważmy, że wspólny mianownik to $(x+3)(x+2)(x-2)$.
- $$\frac{x+1}{(x+3)(x-2)} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+2)(x-2)}$$
- $$\frac{x-4}{(x+2)(x-2)} = \frac{(x-4)(x+3)}{(x+3)(x+2)(x-2)}$$
- Założenia: $x \in \mathbb{R} \setminus -3; -2; 2$.

$$\frac{x-1}{(2x-6)(x+4)} \text{ i } \frac{3x+1}{(x-3)(3x+12)}$$

- Zauważmy, że z niektórych nawiasów w mianownikach możemy wyłączyć wspólny czynnik.

$$\frac{x-1}{(2x-6)(x+4)} = \frac{x-1}{2(x-3)(x+4)}$$

$$\frac{3x+1}{(x-3)(3x+12)} = \frac{3x+1}{3(x-3)(x+4)}$$

- Dzięki takiemu zapisowi widać, że wspólny mianownik to $6(x-3)(x+4)$.
- $$\frac{x-1}{(2x-6)(x+4)} = \frac{3(x-1)}{6(x-3)(x+4)}$$
- $$\frac{3x+1}{(x-3)(3x+12)} = \frac{2(3x+1)}{6(x-3)(x+4)}$$
- Założenia: $x \in \mathbb{R} \setminus -4; 3$.

$$\frac{x^2-4}{(5-x)(3-x)} \text{ i } \frac{x^2+1}{(x-5)(x+4)}$$

- Zauważmy, że $\frac{x^2-4}{(5-x)(3-x)} = \frac{x^2-4}{(x-5)(x-3)}$.
- Zatem wspólnym mianownikiem może być iloczyn $(x-5)(x-3)(x+4)$.
- $$\frac{x^2-4}{(5-x)(3-x)} = \frac{(x^2-4)(x+4)}{(x-5)(x-3)(x+4)}$$
- $$\frac{x^2+1}{(x-5)(x+4)} = \frac{(x^2+1)(x-3)}{(x-5)(x+4)(x-3)}$$
- Założenia: $x \in \mathbb{R} \setminus -4; 3; 5$.

W przedstawionych rozwiązaniach mianownik, a czasem też licznik są zwykle pozostawione w postaci iloczynowej. W razie potrzeby można je przekształcić do innej formy.

Przykład 3

Sprowadzimy do wspólnego mianownika poniższe ułamki.

$$\frac{x+3}{4x^2-28x} \text{ i } \frac{5x-1}{6x^3-42x^2}$$

- Zapiśmy mianowniki ułamków w postaci iloczynowej.

$$\frac{x+3}{4x^2-28x} = \frac{x+3}{4x(x-7)}$$

$$\frac{5x-1}{6x^3-42x^2} = \frac{5x-1}{6x^2(x-7)}$$

- Możemy zauważyć, że wspólnym mianownikiem będzie iloczyn $12x^2(x-7)$.
- Rozszerzmy odpowiednio ułamki, sprowadzając je do wspólnego mianownika.

$$\frac{x+3}{4x^2-28x} = \frac{3x(x+3)}{12x^2(x-7)}$$

$$\frac{5x-1}{6x^3-42x^2} = \frac{2(5x-1)}{12x^2(x-7)}$$

- Założenia: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 7\}$.

$$\frac{2x^2+7}{36x^2+42x-18} \text{ i } \frac{3x^2-4}{30x^2-55x+15}$$

- Zapiśmy mianowniki ułamków w postaci iloczynowej.

$$\frac{2x^2+7}{36x^2+42x-18} = \frac{2x^2+7}{6(3x-1)(2x+3)}$$

$$\frac{3x^2-4}{30x^2-55x+15} = \frac{3x^2-4}{5(3x-1)(2x-3)}$$

- Przy takim zapisie łatwo zauważyć, że wspólnym mianownikiem może być wyrażenie $30(3x-1)(2x+3)(2x-3)$.
- Rozszerzmy zatem odpowiednio ułamki, sprowadzając je do wspólnego mianownika.

$$\frac{2x^2+7}{36x^2+42x-18} = \frac{5(2x^2+7)(2x-3)}{30(3x-1)(2x+3)(2x-3)}$$

$$\frac{3x^2-4}{30x^2-55x+15} = \frac{6(3x^2-4)(2x+3)}{30(3x-1)(2x+3)(2x-3)}$$

- Założenia: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-32; 13; 32\}$.

Przykład 4

Sprowadzimy do wspólnego mianownika ułamki.

$$\frac{x^2-4x+4}{x^2-4} \text{ i } \frac{x^2+2}{x^2+4x+4}$$

- Zapiśmy mianowniki w postaci iloczynowej. Zauważmy, że warto również zamienić na iloczyn licznik pierwszego ułamka, co pozwoli na jego skrócenie.

$$\frac{x^2-4x+4}{x^2-4} = \frac{(x-2)^2}{(x+2)(x-2)} = \frac{x-2}{x+2}$$

$$\frac{x^2+2}{x^2+4x+4} = \frac{x^2+2}{(x+2)^2}$$

- Teraz możemy zauważyć, że optymalny wspólny mianownik to $(x+2)^2$.
- $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)^2}$

Drugi ułamek pozostaje w postaci $\frac{x^2+2}{(x+2)^2}$.

- Założenia: $x \in \mathbb{R} \setminus -2; 2$.
(Pamiętajmy, by podając założenia, uwzględnić sytuację początkową - przed skracaniem przez $x - 2$).

$$\frac{3x^3-x^2}{x^5-16x^3} \text{ i } \frac{4x^2-12x-16}{2x^2-16x+32}$$

- Po zapisaniu liczników i mianowników w postaci iloczynowej ułamki możemy skrócić.

$$\frac{3x^3-x^2}{x^5-16x^3} = \frac{x^2(3x-1)}{x^3(x^2-16)} = \frac{x^2(3x-1)}{x^3(x-4)(x+4)} = \frac{3x-1}{x(x-4)(x+4)}$$

$$\frac{4x^2-12x-16}{2x^2-16x+32} = \frac{4(x^2-3x-4)}{2(x^2-8x+16)} = \frac{4(x-4)(x+1)}{2(x-4)^2} = \frac{2(x+1)}{x-4}$$

- Zatem wspólnym mianownikiem może być iloczyn $x(x-4)(x+4)$.

$$\frac{3x^3-x^2}{x^5-16x^3} = \frac{3x-1}{x(x-4)(x+4)}$$

$$\frac{4x^2-12x-16}{2x^2-16x+32} = \frac{2x(x+1)(x+4)}{x(x-4)(x+4)}$$

- Założenia: $x \in \mathbb{R} \setminus -4; 0; 4$.

Słownik

diedzina wyrażenia algebraicznego

zbiór tych wszystkich liczb rzeczywistych, dla których wyrażenie algebraiczne ma sens liczbowy

określenie założeń

podanie dla wszystkich zmiennych występujących w wyrażeniu warunków, przy których wyrażenie ma sens, np.:

1. mianowniki ułamków i liczby, przez które dzielimy, muszą być różne od zera;
2. pierwiastki stopnia parzystego nie są określone dla liczb ujemnych;
3. podstawa logarytmu i liczba logarytmowana muszą być dodatnie, ponadto podstawa logarytmu musi być różna od 1;
4. nie można podnosić zera do potęgi o wykładniku 0

postać iloczynowa wielomianu

jeżeli wielomian $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots$ stopnia n ma n pierwiastków $x_1, x_2, \dots, x_n$, to można go zapisać w postaci iloczynowej

$$W(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

Gra edukacyjna

Polecenie 1

Zagraj w grę, w której należy dopasować najprostszy wspólny mianownik dla dwóch ułamków. Następnie rozwiąż polecenia.

Polecenie 2

Sprowadź ułamki $\frac{1}{4x^3-64x}$ oraz $\frac{1}{6x^4-48x^3+96x^2}$ do najprostszego wspólnego mianownika.

Polecenie 3

Sprowadź ułamki $\frac{1}{x^4+3x^2+2}$ i $\frac{1}{x^3+x^2+2x+2}$ do najprostszego wspólnego mianownika.

Polecenie 4

Sprowadź ułamki $\frac{1}{x^2+4x-12}$ oraz $\frac{1}{x^2-4x-12}$ do najprostszego wspólnego mianownika.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wskaż wszystkie przykłady, w których ułamki $\frac{1}{25x^3}$ i $\frac{1}{45x^2}$ zostały sprowadzone do wspólnego mianownika (niekoniecznie najprostszego).

☐ $\frac{5}{135x^3} \text{ i } \frac{3x}{135x^3}$

☐ $\frac{3}{75x^3} \text{ i } \frac{2x}{75x^3}$

☐ $\frac{9}{225x^3} \text{ i } \frac{5x}{225x^3}$

☐ $\frac{9x^2}{225x^5} \text{ i } \frac{5x^3}{225x^5}$

☐ $\frac{45}{1125x^3} \text{ i } \frac{25x}{1125x^3}$

☐ $\frac{9x^2}{225x^6} \text{ i } \frac{5x^3}{225x^6}$

Ćwiczenie 2



Wskaż wspólny mianownik wyrażeń $\frac{x+1}{x-2}$ oraz $\frac{x^2-2}{x+3}$.

☐ $x^2 - x + 6$

☐ $2x^2 + x - 3$

☐ $x^2 + 2x - 3$

☐ $x^2 + x - 6$

Ćwiczenie 3



Sprowadź wyrażenia do wspólnego mianownika.
Przeciągnij w puste pola właściwe ułamki.

$$\frac{x+1}{x-3} = \boxed{}$$

$$\frac{x+4}{x-1} = \boxed{}$$

$$\frac{x^2+7x-12}{(x-3)(x-1)}$$

$$\frac{x^2-2x+1}{(x-3)(x-1)}$$

$$\frac{x^2-1}{(x-3)(x-1)}$$

$$\frac{x^2+x-12}{(x-3)(x-1)}$$

Ćwiczenie 4



Sprowadź wyrażenia do wspólnego mianownika.
Przeciągnij w puste pola odpowiednie ułamki.

a)

$$\frac{3x-1}{x^2+1} = \boxed{}$$

$$\frac{x+2}{x-2} = \boxed{}$$

b)

$$\frac{x-3}{x^2+2} = \boxed{}$$

$$\frac{3x+1}{x-1} = \boxed{}$$

$$\frac{x^2-4x+3}{(x^2+2)(x-1)}$$

$$\frac{3x^3+x^2+6x+2}{(x^2+2)(x-1)}$$

$$\frac{x^3+2x^2+x+2}{(x^2+1)(x-2)}$$

$$\frac{3x^2-7x+2}{(x^2+1)(x-2)}$$

Ćwiczenie 5



Wszystkie ułamki sprowadzono do wspólnego mianownika.
Połącz w pary ułamek i jego rozszerzenie.

$$\frac{x-4}{x+3}$$

$$\frac{8x^2+25x+3}{(x+3)(4x-1)}$$

$$\frac{x+1}{4x-1}$$

$$\frac{8x^2-6x+1}{(x+3)(4x-1)}$$

$$\frac{8x+1}{4x-1}$$

$$\frac{4x^2-17x+4}{(x+3)(4x-1)}$$

$$\frac{2x-1}{x+3}$$

$$\frac{x^2+4x+3}{(x+3)(4x-1)}$$

Ćwiczenie 6



Wspólnym mianownikiem wyrażeń $\frac{x+1}{2x+1}$ i $\frac{x}{x+b}$ jest $2x^2 + 7x + 3$.

Zatem $b =$.

Ćwiczenie 7



Wskaż najprostszy wspólny mianownik ułamków $\frac{1}{x^2+2x-15}$ i $\frac{1}{x^2-x-6}$.

Określ potrzebne założenia.

☐ $(x-5)(x-3)(x+2)$

☐ $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 3; 5\}$

☐ $(x+5)(x+2)(x-3)$

☐ $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5; -3; 2\}$

☐ $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 2; 5\}$

☐ $(x+3)(x-2)(x-5)$

☐ $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5; -2; 3\}$

☐ $(x-2)(x+3)(x+5)$

Ćwiczenie 8



Dane są ułamki $\frac{1}{2x^3+x^2-11x-10}$ oraz $\frac{1}{2x^3-9x^2+4x+15}$. Oznacz czynniki, których iloczyn utworzy najprostszy wspólny mianownik tych ułamków.

☐ $(x - 3)$

☐ $(x - 2)$

☐ $(x + 3)$

☐ $(x - 1)$

☐ $(2x - 5)$

☐ $(x + 1)$

☐ $(x + 2)$

Dla nauczyciela

Autor: Michał Niedźwiedź

Przedmiot: Matematyka

Temat: Sprowadzanie ułamków algebraicznych do wspólnego mianownika

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne.

8) dodaje i odejmuje wyrażenia wymierne, w przypadkach nie trudniejszych niż: $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$, $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x+1}$;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- sprowadza ułamki algebraiczne do wspólnego mianownika.
- wyznacza optymalny wspólny mianownik.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- metoda tekstu przewodniego;
- metoda kota i myszy.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

Faza wstępna:

- Uczniowie przypominają jak sprowadza się ułamki zwykłe do wspólnego mianownika.
- Nauczyciel podaje temat i cele zajęć i wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

- Uczniowie w parach zapoznają się z treścią sekcji „Przeczytaj”, a następnie metodą kot i mysz rozwiązują ćwiczenia interaktywne w sekcji „Sprawdź się”.
- Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po 2 nieudanych próbach kot „łapie mysz”, która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej – role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem – procedura się powtarza.

Faza podsumowująca:

- Uczniowie w parach grają w grę edukacyjną.
- Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotne.

Praca domowa:

Uczniowie rozwiązują polecenia w sekcji „Gra edukacyjna”.

Materiały pomocnicze:

[Wyrażenia wymierne](#)

Wskazówki metodyczne:

Gra edukacyjna może posłużyć powtórzeniu materiału przed kartkówką.